Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 17, No. 1, June, 1991

多分割 線型背囊問題

원중연* · 정성진**

The multi-divisional linear knapsack problem

Joong-Yeon Won* and Sung-Jin Chung**

Abstract

The multi-divisional knapsack problem is defined as a binary knapsack problem where each of mutually exclusive divisions has its own capacity. We consider the relaxed LP problem and develop a transformation which converts the multi-divisional linear knapsack problem into smaller size linear knapsack problems. Solution procedures and a numerical example are presented.

1. 序　　論

多分割 背囊問題(MK： multi-divisional knapsack problem)는 다음과 같이 정의된다.

(MK)： minimize $\sum_{i\in I}\sum_{j\in N_i} c_{ij}x_{ij}$, ………………… (1)

s.t. $\sum_{i\in I}\sum_{j\in N_i} a_{ij}x_{ij}\geq b_0$, ……………………… (2)

$\sum_{j\in N_i} a_{ij}x_{ij}\geq b_i$, $\forall i\in I$, ………………… (3)

$x_{ij}\in\{0,1\}$, $\forall j\in N_i$, $i\in I$. …………… (4)

여기서, $c_{ij}>0$, $a_{ij}>0$, $\forall j\in N_i$, $i\in I$, $b_0>\sum_{i\in I} b_i$ 이다.

위 문제에서 고려되는 부서(division)가 하나일 경우, 즉 $|I|=1$일 때는 제약식 (3)이 제약식 (2)에 포함되므로, (MK)는 기존의 0－1 배낭문제가 된다. $|I|>1$일 경우의 문제(MK)는 독립적으로 分割된 부서들에 필요한 자원양 b_i를 충족하면서, 총체적으로 필요자원양 b_0가 만족되도록 최소의 비용으로 각 과제들을 선택하는 문제이다.

문제(MK)의 정수 최적해를 찾기 위하여 分枝限界技法을 사용할 때 線型緩和된 문제인 多分割 線型背囊問題를 효율적으로 푼다는 것은 매우 중요하다. 이것은 分枝限界技法의 적용중에 많은 후보문제가 발생하므로 線型緩和된 후보문제의 최적해를 신속하게 찾으므로써 탐색해야 할 후보문제들을 미리 절단할 수 있기 때문이다.

본 연구에서는 多分割 線型背囊問題의 특성을 연구하고 이를 활용한 해법을 제시한다.

* 경기대학교 산업공학과
** 서울대학교 산업공학과

2. 特 性

多分割 線型背囊問題(LMK)는 다음과 같다.

$$\text{(LMK)}: \quad z^* = \text{minimize} \sum_{i\in I}\sum_{j\in N_i} c_{ij}x_{ij}, \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i\in I}\sum_{j\in N_i} a_{ij}x_{ij} \geq b_0, \quad \cdots\cdots (6)$$

$$\sum_{j\in N_i} a_{ij}x_{ij} \geq b_i, \ \forall i \in I, \quad \cdots\cdots (7)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \ \forall j \in N_i, \ i \in I. \quad \cdots\cdots (8)$$

문제(LMK)에서 제약식(7) 및 (8)은 각 i에 대해 서로 독립적이므로 제약식(6)이 緩和된 문제는 다음 $|I|$개의 副問題(SPi)들로 구성된다($i\in I$).

$$\text{(SPi)}: \quad \text{minimize} \sum_{j\in N_i} c_{ij}x_{ij},$$

$$\text{s.t.} \sum_{j\in N_i} a_{ij}x_{ij} \geq b_i,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \ \forall j \in N_i.$$

副問題(SPi)는 線型背囊問題이므로 최적해는 쉽게 구해진다. 최적해를 $(\hat{x}_{ij})$이라 할 때, 양의 값을 취하는 변수들의 지수집합을 J_i라 하고, 0과 1 사이의 분수값을 취하는 변수가 존재하면 그 지수를 f_i라 하자. 또한, f_i가 존재하는 지수 i의 집합을 I_f라 하자($\forall i\in I$). 즉,

$$J_i = \{j \mid \hat{x}_{ij} > 0, \ \forall j = 1, \cdots, |N_i|\}, \ \forall i \in I,$$

$$I_f = \{i \mid 0 < \hat{x}_{if_i} < 1, \ \forall i \in I\}$$

다음의 線型背囊問題(LK)를 고려하자.

$$\text{(LK)}: \quad \bar{w} = \text{minimize} \sum_{i\in I_f} c_{if_i}x_{if_i} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in N_i\setminus J_i} c_{ij}x_{ij},$$

$$\text{s.t.} \sum_{i\in I_f} a_{if_i}x_{if_i} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in N_i\setminus J_i} a_{ij}x_{ij} \geq b_0 - \sum_{i\in I} b_i,$$

$$0 \leq x_{if_i} \leq u_{if_i}, \ \forall i \in I_f,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \ \forall j \in N_i \setminus J_i, \ i \in I.$$

여기서, $u_{if_i} = 1 - \hat{x}_{if_i}$이다($\forall i\in I_f$).

定理 1 문제(LK)의 최적해를 $(\bar{x}_{ij})$라 하고, 부문제(SP_i)의 최적해를 $(\hat{x}_{ij})$라 하자. 그러면, 문제(LMK)의 최적해 (x_{ij}^*)는 다음과 같다.

$$x_{ij}^* = \begin{cases} \hat{x}_{ij}, & \forall j \in J_i \setminus \{f_i\}, \ i \in I \\ \bar{x}_{ij} + \hat{x}_{ij}, & \forall j = f_i, \ i \in I_f \\ \bar{x}_{ij}, & \forall j \in N_i \setminus J_i, \ i \in I \end{cases}$$

(증명) 문제(LMK)에서 가능해이기 위해서는 제약식(7) 및 (8)을 만족하여야 하므로, 자원양 b_0 중 $\sum_{i\in I} b_i$에 해당하는 양은 우선적으로 각 副問題(SPi)들에 할당된다. 제약식(6) 및 제약식(7)의 계수가 같으므로 問題(LMK)에서 자원양 b_0가 $\sum_{i\in I} b_i$일 경우의 최적해는 각 副問題로부터의 최적해 $(\hat{x}_{ij})$에 해당된다. (LMK)의 자원양 b_0는 $\sum_{i\in I} b_i$ 보다 크므로 제약식(7)은 항상 만족된다. 여기서, 0과 1사이의 분수값을 취하는 변수 $x_{if_i}(i\in I_f)$는 $1-\hat{x}_{if_i}$ 만큼 더 증가 가능하므로 문제(LMK)는 問題(LK)로 변환된다. 따라서, 정리가 성립한다. ■

3. 解法 및 分析

定理 1에 기반한 解法은 다음과 같다.

단계 1. $I_f \leftarrow \phi$, $J_i \leftarrow \phi$, $\bar{b}_i \leftarrow b_i$, $\forall i\in I$, $\bar{b}_0 \leftarrow b_0 - \sum_{i\in I} b_i$ 이라 한다.

단계 2. 모든 부문제(SPi)에서 J_i 및 f_i를 구한다($i\in I$). 각 부문제(SPi)에서의 과정은 다음과 같다($\forall i\in I$).

$$c_{if_i}/a_{if_i} = \min_{j\in N_i\setminus J_i} \{c_{ij}/a_{ij}\}$$

$\bar{b}_i > a_{if_i}$이면, 다음을 수행한다.

$\bar{b}_i \leftarrow \bar{b}_i - a_{if_i}$

$J_i \leftarrow J_i \cup \{f_i\}$

단계 2의 처음으로 간다.

$\bar{b}_i \leq a_{if_i}$이면, 다음을 수행한다.

$J_i \leftarrow J_i \cup \{f_i\}$

$u_{if_i} \leftarrow 1-\bar{b}_i/a_{if_i}$

$u_{if_i}>0$ 이면, $I_f \leftarrow I_f \cup \{i\}$라 한다.

단계 3. 다음을 계산하여 q 및 f_q를 결정한다.

$$c_{qf_q}/a_{qf_q}=\min[\min_{i\in I_f}\{c_{if_i}/a_{if_i}\},\ \min_{i\in I\setminus I_f}\ \min_{j\in N_i\setminus J_i}\{c_{ij}/a_{ij}\}]$$

($I_f=\phi$ 이거나 $I\setminus I_f=\phi$이면, 해당되는 비율을 ∞라 한다.)

$q\in I_f$이면, 단계 4로 간다.

$q\in I\setminus I_f$이면, 단계 5로 간다.

단계 4. $\bar{b}_0 \leq u_{qf_q}a_{qf_q}$이면, 다음을 수행하고 단계 6으로 간다.

$u_{qf_q} \leftarrow u_{qf_q}-\bar{b}_0/a_{qf_q}$

$\bar{b}_0 > u_{qf_q}a_{qf_q}$이면, 다음을 수행하고 단계 3으로 간다.

$\bar{b}_0 \leftarrow \bar{b}_0-u_{qf_q}a_{qf_q}$

$J_q \leftarrow J_q \cup \{f_q\}$

$I_f \leftarrow I_f \setminus \{q\}$

단계 5. $\bar{b}_0 \leq a_{qf_q}$이면, 다음을 수행하고 단계 6으로 간다.

$u_{qf_q} \leftarrow 1-\bar{b}_0/a_{qf_q}$

$\bar{b}_0 > a_{qf_q}$이면, 다음을 수행하고 단계 3으로 간다.

$\bar{b}_0 \leftarrow \bar{b}_0-a_{qf_q}$

$J_q \leftarrow J_q \cup \{f_q\}$

단계 6. 최적해는 다음과 같다. 과정을 끝낸다.

$$x_{ij}=\begin{cases}1-u_{ij}, & j=f_i \\ 1, & j\in J_i, j\neq f_i \\ 0, & j\in N_i\setminus J_i \end{cases}\quad i=q \text{ 또는 } i\in I_f$$
$$x_{ij}=\begin{cases}1, & j\in J_i \\ 0, & j\in N_i\setminus J_i \end{cases}\quad i\in I\setminus I_f (i\neq q)$$

위 해법의 단계 3에서 최소 비율이 같게 되는 q나 f_q가 여러개 존재하면 代案最適解가 발생할 수 있다. 대안최적해의 존재여부에 대한 판별기준은 단계 4 및 단계 5에서의 기준과 같다.

多分割 線型背囊問題(LMK)는 $|I|+1$개의 제약식을 갖는 문제이나, 定理 1에 의하여 이 문제의 최적해는 작은 규모의 $|I|+1$개 線型背囊問題의 최적해로부터 效率的으로 구할 수 있다. 즉, $|I|$개 부문제(SPi)의 최적해는 複雜度 $O(|N_i|)$에, 문제(LK)의 최적해는 複雜度 $O(\sum_{i\in I}|N_i|)$에 찾을 수 있다[1].

4. 數値例題

다음과 같은 問題의 최적해를 구한다.

$$\text{Minimize } \sum_{i\in I}\sum_{j\in N_i} c_{ij}x_{ij},$$

$$\text{s.t. } \sum_{i\in I}\sum_{j\in N_i} a_{ij}x_{ij}\geq 150,$$

$$\sum_{j\in N_1} a_{1j}x_{1j}\geq 110,$$

$$\sum_{j\in N_2} a_{2j}x_{2j}\geq 14,$$

$$0\leq x_{ij}\leq 1,\ \forall j\in N_i,\ i\in I=\{1,2\}$$

여기서 목적함수 계수 c_{ij} 및 제약식의 계수 a_{ij}는 다음 표와 같다.

i	c_{ij}, a_{ij} \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	c_{1j}	5	3	4	6	5	5	7	8	13	15	17	15	21	23	30
	a_{1j}	2	3	7	10	12	15	17	19	23	25	28	30	31	32	35
2	c_{2j}	4	2	3	4	5	7	9	6	8	11	13	13	14	19	20
	a_{2j}	1	2	4	5	7	9	11	12	13	14	15	16	17	18	19

〈1회〉

단계 1. $I_f=\phi$, $J_1=J_2=\phi$, $\bar{b}_1=110$, $\bar{b}_2=14$, $\bar{b}_0=26$.

단계 2. $J_1=\{6,7,5,8,12,9\}$

$u_{19}=1-17/23=6/23$

$I_f=\{1\}$, $f_1=9$

$J_2=\{8,9\}$

$u_{29}=1-2/13=11/13$

$I_f=\{1,2\}$, $f_2=9$

단계 3. $\min[\min_{i=1,2}\{c_{if_i}/a_{if_i}\},\ \infty]=c_{19}/a_{19}$

$(=13/23)$

$q(=1)\in I_f$이므로, 단계 4로 간다.

단계 4. $\bar{b}_0(=26)>u_{19}a_{19}(=6)$이므로

$\bar{b}_0=26-6=20$

$J_1=\{6,7,5,8,12,9\}$

$I_f=I_f\setminus\{1\}=\{2\}$

단계 3으로 간다.

〈2회〉

단계 3. $\min\{c_{29}/a_{29},\ c_{13}/a_{13}\}=c_{13}/a_{13}(=4/7)$

$q(=1)\in I\setminus I_f$이므로, 단계 5로 간다.

단계 5. $\bar{b}_0(=20)>a_{13}(=7)$

$\bar{b}_0=20-7=13$

$J_1=\{6,7,5,8,12,9,3\}$

단계 3으로 간다.

〈3회〉

단계 3. $\min\{c_{29}/a_{29},\ c_{1,10}/a_{1,10}(=c_{14}/a_{14})\}$

$=c_{1,10}/a_{1,10}(=c_{14}/a_{14}=15/25)$

f_q로서 10을 선택한다.

$q(=1)\in I\setminus I_f$이므로, 단계 5로 간다.

단계 5. $\bar{b}_0(=13)<a_{1,10}(=25)$

$u_{1,10}=12/25$

단계 6으로 간다.

단계 6. 최적해는 다음과 같다.

$x_{13}=x_{15}=x_{16}=x_{17}=x_{18}=x_{19}=x_{1,12}=1$, $x_{1,10}=13/25$,

$x_{1j}=0$, $\forall j\neq 3,5,6,7,8,9,10,12$

$x_{28}=1$, $x_{29}=2/13$, $x_{2j}=0$, $\forall j\neq 8,9$

해법과정 중 3회의 단계 3에서 최소비율이 같은 f_q가 두개 존재한다. f_q로서 4를 선택하면, 4회에서 다음과 같은 대안최적해가 발생한다.

$x_{13}=x_{14}=x_{15}=x_{16}=x_{17}=x_{18}=x_{19}=x_{1,12}=1$,

$x_{1,10}=3/25$,

$x_{1j}=0$, $\forall j\neq 3,4,5,6,7,8,9,10,12$

$x_{28}=1$, $x_{29}=2/13$, $x_{2j}=0$, $\forall j\neq 8,9$

參考文獻

[1] Balas, E. and Zemel, E., "An Algorithm for Large Zero-One Knapsack Problems," *Opns. Res.* 28, 1130-1154, 1980.

[2] Faaland, B.H., "The Multiperiod Knapsack Problem," *Opns. Res.* 29, 612-616, 1981.

[3] Zemel, E., "The Linear Multiple Choice Knapsack Problem," *Opns. Res.* 28, 1412-1423, 1980.

[4] 원중연, 정성진, "一般 多重選擇 線型背囊 問題에 대한 效率的인 解法," 한국경영과학회지, 15(2), 33-44, 1990.