

指數故障分布 및 斷續檢査下의 最適 加速壽命試驗의 設計†

徐洵根* · 崔鍾德*

Design of Optimal Accelerated Life Tests for the Exponential Failure Distribution under Intermittent Inspection

Sun-Keun Seo* and Jong-Deuk Choi*

Abstract

For the case where the lifetime at a constant stress level has exponential distribution, optimal accelerated life test plans are developed under the assumptions of intermittent inspection and Type I censoring. In an optimal plan, the low and high stress levels, the proportion of test units allocated and the inspection times at each stress are determined such that the asymptotic variance of the maximum likelihood estimator of logarithmic transformed mean at the use condition is minimized.

In addition to the optimal plan in which numerical technique to solve the set of nonlinear equations must be employed to determine inspection times at each stress level, we also propose another plans which employ equally-spaced or equal probability inspection schemes at two over-stress levels of corresponding optimal one.

For both optimal and proposed plans, computational results indicate that the asymptotic variance of the estimated mean at the use stress is insensitive to number of inspections at over-stress levels for the range of parameter values considered.

1. 序 論

1-1. 研究目的 및 背景

一般的인 壽命試驗(life testing)은 對象製品의 實際 使用條件과 同一한 스트레스 水準에서 遂行

하게 되나 高信賴度 제품일 경우에 適正한 試驗時間內에 충분한 情報을 얻을 수 없는 경우가 자주 발생된다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 溫度, 壓力, 回轉數, 負荷 등과 같은 스트레스의 實際 使用條件보다 加酷한 스트레스 水準 組合에서 試驗이 행해지며 이를 加速壽命試驗(accelerated life

† 이 論文은 1990年度 東亞大學校 學術研究 助成費에 의하여 研究되었음.

* 東亞大學校 工科大學 産業工學科

tests : ALT)이라 부르고 있다.

또한 壽命資料는 一部 試驗製品이 故障날 때까지 觀測되지 않는 경우가 자주 발생한다. 이를 觀測中斷 또는 終結(censoring)이라 하며, 一定 時間까지 試驗을 實施하는 第1種 觀測中斷 또는 定時終結(Type I censoring, time censoring)과 一定 갯수의 故障까지 試驗을 實施하는 第2種 觀測中斷 또는 定數終結(Type II censoring, failure censoring)이 있는데 定時 觀測中斷이 定數 觀測中斷보다 一般的으로 자주 사용된다[8].

그리고 故障時間을 정확히 把握하기 위해 試驗을 繼續的으로 觀測하는 連續檢査(continuous inspection)보다 特定時刻에 檢査時刻 사이의 試驗製品의 故障 갯수를 把握하는 斷續檢査(intermittent inspection)가 現場에서 使用하기 편리하고 檢査費用 및 努力을 줄이는 檢査方法이다. 斷續檢査에 의해 발생되는 資料는 區間資料(interval-censored data), 또는 묶음자료(grouped data)로 불리우고 있다. 定時 觀測中斷下에서 加速壽命試驗設計에 관련된 研究(Table 1 參照)와 使用條件下의 壽命試驗에서 檢査時刻를 設計하는 研究는 多數 있으나([4, 13, 16]) 이 두가지 중요한 性質을 考慮한 研究는 드물다.

例外的으로 Yum과 Choi[28]는 一定한 時間間隔마다 檢査하는 等時間 檢査下에서 指數分布의 對數平均에 대한 最尤推定量의 大標本 分散을 最小化하는 最適 加速壽命試驗 計劃을 提示하고 있다. 그러나 試驗이 실시되는 두 水準中 高스트레스 水準은 주어져 있고, 最適 低 스트레스 水準과 시험 제품 비율만 결정하며, 各 스트레스의 檢査時刻는 最適變數에 包含시키지 않고 있다.

따라서 本論文은 上記의 設計基準을 最適化하는 低 및 高 스트레스 水準과 두 스트레스 수준에서의 試驗製品 割當比率와 檢査時刻(optimum inspection time : OP)을 결정하는 最適 加速壽命試驗 計劃을 提示하고, 數值 實驗을 통해 이의 性質을 分析코자 한다.

또한 최적계획에서는 檢査時刻의 결정이 一連의 非線形 聯立方程式으로 이루어진 集合의 解를 數值解析의으로 찾아야 하는 어려운 점이 발생하므로 最適 스트레스 水準에서 最適檢査方法 대신에 사용하기 편리한 等時間 檢査(equally-spaced inspection : ES)와 等確率 檢査(equal probability inspection : EP) 方法을 이용한 加速壽命試驗 計劃을 提示하며, 이를 上記의 最適 加速壽命試驗 計劃과 比較코자 한다.

1-2. 研究狀況

加速壽命試驗에서 各 檢査單位에 스트레스를 加하는 方法에는 크게 두가지가 있다. 즉 스트레스를 故障날 때까지 또는 觀測中斷까지 固定的으로 加하는 固定 스트레스 加速壽命試驗(constant stress ALT)이 주로 사용되지만, 이 외에 各 檢査單位에 加해지는 스트레스를 一定 時間마다 바꾸는 段階의 스트레스 加速壽命試驗(step-stress ALT)[17]이 있으며, 本論文에서는 固定 스트레스 方法에 限定하여 關聯 研究狀況을 Table 1에 整理하였다.

壽命分布는 指數, Weibull(extreme value), log-normal(normal) 등이 주로 이용되며, 스트레스와 母數關係는 (對數) 線形 또는 二次, 多項式으로 假定된다. 觀測中斷形은 주로 第1種 觀測中斷形이며 예외적으로 Escobar와 Meeker[5]는 第2種 觀測中斷時的 最適 離散設計와 近似 連續設計를 하였으며, 母數推定方法으로는 最尤推定法, 最小 제곱법, 順序統計量을 이용한 線形 推定法이 쓰이고 있다.

加速壽命試驗의 設計와 관련된 研究中에 Meeker와 Hahn[14]는 壽命이 Weibull 分布를 따르고 母數와 스트레스의 관계가 線形일때 最適 計劃은 두 스트레스 수준에 의한 壽命試驗이 要求되나 模型의 假定에 대해 鈍感(robust)하지 않으므로, 統計的 效率이 떨어지나 둔감한 세 스트레스에서의 加速壽命試驗 計劃을 提示하고 있다. 또한 거의

Table 1. Classification of Constant Stress Accelerated Life Test Plans.

Authors	Failure Distribution	Stress/Parameter Relationship	Censoring Mechanism	Inspection Mode	Method of Estimation
Chernoff ([2])	exponential	linear quadratic	C, I	continuous	MLE
Little and Jebe ([9])	lognormal	linear	C	continuous	LSE
Mann ([10])	Weibull	polynomial	C	continuous	LE
Kiełpinski and Nelson ([7, 18])	lognormal	linear	I	continuous	MLE
Meeker and Nelson ([15, 19])	Weibull	linear	I	continuous	MLE
Meeker ([12])	Weibull	linear	I	continuous	MLE
Meeker and Hahn ([14])	lognormal				
Escobar and Meeker ([5])	Weibull; lognormal	polynomial	II	continuous	LE
Yum and Choi ([26])	exponential	linear	I	periodic	MLE
Seo ([23]) Seo and Yum ([24])	Weibull	linear	I	intermittent	MLE

Note

- C : Complete Sample
- II : Type II Censored Sample
- LSE : Least Squares Estimation
- I : Type I Censored Sample
- MLE : Maximum Likelihood Estimation
- LE : Linear Estimation using Order Statistics

대다수의 研究가 Table 1에서 처럼 連續檢査를 假定하고 있으며, 예외적으로 斷續檢査下의 연구로는 前節에서 言及된 Yum과 Choi[26]의 研究 外에 Seo [23]는 壽命이 Weibull 分布를 따를때 等確率 檢査에 의해 大標本 特性에 따른 最適 加速壽命試驗 計劃을 提示하고, Monte Carlo simulation에 의해 설계된 계획의 小標本 特性을 調査하였으며, Seo와 Yum[24]은 동일 분포하에서 검사시각까지 최적화 한 가속수명시험 계획과 이의 약점을 보완한 실용 계획을 제시하였다.

따라서 本 論文은 壽命이 指數分布를 따르며 스트레스와 母數의 관계가 線形일때 斷續檢査와 定時終結下에서의 加速壽命試驗을 設計코자 한다.

2. 模 型

2-1. 記號 및 假定

本 論文에서 사용되는 記號 및 假定은 다음과 같다.

〈記 號〉

- m : 스트레스水準의 數
- s_0 : 使用條件下의 스트레스(또는 s_0)
- s_h : 母數와 스트레스의 관계가 성립되는 最大 스트레스水準
- s_i : i 번째 (變換된) 스트레스水準($s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m \leq s_h, i=1, \dots, m$)
- N : 試驗製品의 總 個數
- n_i : i 번째 스트레스에서 試驗되는 製品의 個數, $i=1, \dots, m$
- t_{ci} : i 번째 스트레스에서의 觀測中斷時間, $i=1, \dots, m$
- t_{ij} : i 번째 스트레스에서 j 번째 檢査時刻, $i=1, \dots, m, j=1, \dots, k(i)$
- P_{ij} : i 번째 스트레스에서 $(t_{i,j-1}, t_{ij}]$ 에서의 故障確率, $i=1, \dots, m, j=1, \dots, k(i)$
- x_{ij} : i 번째 stress에서 $(t_{i,j-1}, t_{ij}]$ 에서의 故障個數, $i=1, \dots, m, j=1, \dots, k(i)$
- x_{ci} : 連續檢査時에 i 번째 스트레스水準에서의

觀測中斷 個數

〈假 定〉

1) 固定 스트레스에서의 試驗製品의 壽命(T)은 獨立의으로 指數分布를 따르며, 壽命 T의 確率 密度函數는 다음과 같다.

$$f(t) = 1/\theta_i \exp(-t/\theta_i) \dots\dots\dots (2.1)$$

2) θ_i 는 平均이며, (變換된) 스트레스(s_i)와의 關係는 다음과 같다.

$$\theta_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 s_i) \dots\dots\dots (2.2)$$

3) 各 스트레스에서 n_i 試驗製品은 스트레스水準에 對해 獨立的으로 試驗되며, t_{ci} 까지 觀측된다. 그리고

$$a_i = n_i/N, \sum_{i=1}^m a_i = 1, a_i > 0, i=1, 2, \dots, m. \dots\dots\dots (2.3)$$

4) 스트레스水準은 增加形으로 整理되어 있다($s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m$). 즉 스트레스水準이 높으면 더 많은 故障이 發生 可能하며, 따라서 $\beta_2 < 0$ 가 된

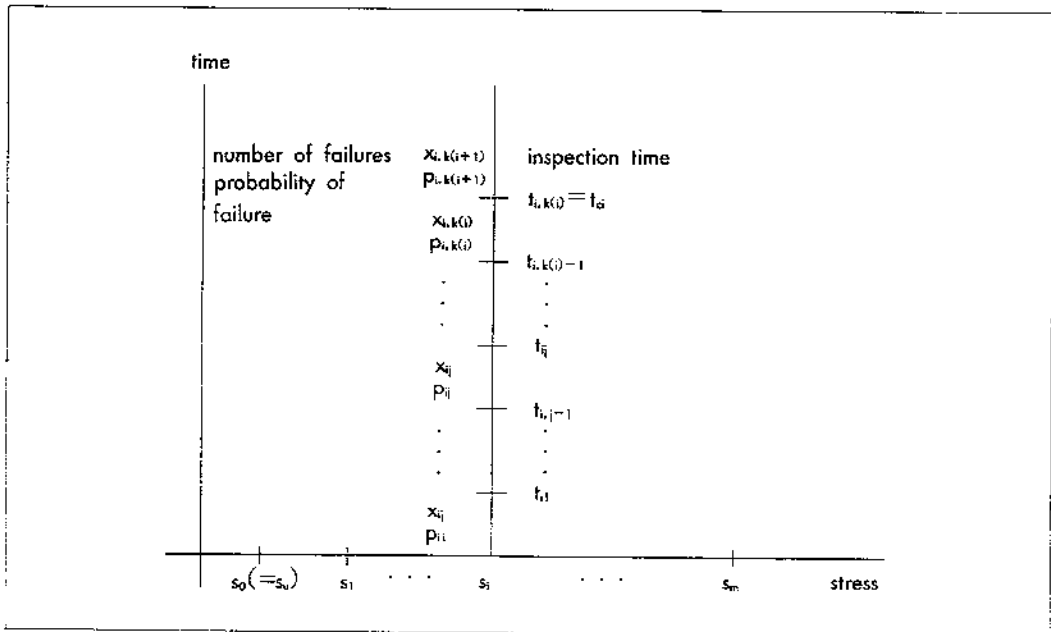


Fig. 1. The Proposed ALT Model.

다.

5) 檢査는 $t_{i1}, \dots, t_{i,k(i)}$, $i=1, 2, \dots, m$, $k(i) \geq 1$ 에 實施되며, $t_{i0}=0$ 이고 $t_{i,k(i)+1}=\infty$ 이다.

指數分布는 널리 이용되는 壽命分布중의 하나이며, 多數의 壽命資料에 適合될 수 있다[3]. 電氣 絶緣液 등에 이용되는 逆幕函數(inverse power rule) 모형이나 半導體 등 電子製品에 널리 쓰이는 Arrhenius 模型은 式(2.2)의 形態이며[11, 25], 이것은 對數 壽命資料($\ln T$)에 대한 單純回歸模型이 된다[8]. 또한 提示된 模型을 圖示한 것은 Fig. 1과 같다.

다음 節에서 設計된 加速壽命試驗 計劃은 $m=2$ 이나 여기서 一般化된 m 을 사용하여 β_0 와 β_1 에 대한 最尤推定量 및 이의 漸近的 分散을 구하고자 한다. 斷續檢査下에서 各 스트레스에서의 x_{ij} 는 多項分布를 따르므로 尤度函數는 다음과 같다.

$$L = \prod_{i=1}^m L_i = \prod_{i=1}^m n_i! \prod_{j=1}^{k(i)+1} P_{ij}^{x_{ij}} (X_{ij}!)^{-1},$$

$$\begin{aligned} \ell(\beta_0, \beta_1) &= \sum_{i=1}^m \ln L_i \\ &= C + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k(i)+1} x_{ij} \ln p_{ij} \dots\dots\dots (2.4) \end{aligned}$$

$$\text{단, } p_{ij} = \exp(t_{i,j-1}/\theta_i) - \exp(t_{ij}/\theta_i), \dots\dots\dots (2.5)$$

C는 常數.

β_0 와 β_1 의 最尤推定量($\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$)는 다음 方程式의 解로서 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k(i)+1} \{x_{ij}(B_{i,j-1} - B_{ij}) / p_{ij}\} = 0 \dots (2.6)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^m s_i \sum_{j=1}^{k(i)+1} \{x_{ij}(B_{i,j-1} - B_{ij}) / p_{ij}\} = 0 \dots (2.7)$$

$$\text{단, } B_{ij} = (t_{ij}/\theta_i) \exp(-t_{ij}/\theta_i), \dots\dots\dots (2.8)$$

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, m, \\ j &= 0, 1, \dots, k(i)+1 \end{aligned}$$

3절과 4절에서 提示된 加速壽命試驗 計劃($m=2$)에서의 最尤推定量의 存在有無는 아래의 定理에 의해서 判斷할 수 있다.

〈定理 1〉

斷續檢査에서 $x_{i0} < n_i$ 이고 $x_{i,k(i)+1} < n_i$, $i=1, 2$ 이면, 最尤推定量은 存在한다. 또한 連續檢査일 경우에는 $x_{i0} < n_i$, $i=1, 2$ 이면 最尤推定量은 存在한다.

〈證明〉

Hamada와 Tse[6]의 回歸模型에 대한 存在條件의 특수경우이므로 이 論文의 定理 1의 條件에서 두 스트레스水準의 試驗結果를 檢討하면 된다.

— 證明 끝 —

加速壽命試驗의 設計基準으로 사용되는 漸近的 分散을 導出하기 위한 Fisher의 情報量 行列(F)은 Rao[21]에 의해 다음과 같이 쓸수 있다.

$$F = N(f_{gh}) \quad g, h = 0, 1$$

$$f_{gh} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^{k(i)+1} \left(\frac{\partial p_{ij}}{\partial \beta g} \right) \cdot \left(\frac{\partial p_{ij}}{\partial \beta h} \right) / p_{ij} \dots\dots\dots (2.9)$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & s_1 \\ 1 & s_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & s_m \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & \pi_m \end{bmatrix} \text{ 이라 두면}$$

Fisher 情報量 行列은 式(2.10)이 된다.

$$F = S' IIS = \begin{bmatrix} \sum_i n_i \pi_i & \sum_i n_i \pi_i s_i \\ \sum_i n_i \pi_i s_i & \sum_i n_i \pi_i s_i^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.10)$$

$$\text{단, } \pi_i = \sum_{j=1}^{k(i)+1} (B_{i,j-1} - B_{ij})^2 / p_{ij} \dots\dots\dots (2.11)$$

또한 連續檢査時에 π_i 는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\pi_i = 1 - \exp(-t_{i0}/\theta_i) \dots\dots\dots (2.12)$$

$\hat{\beta}_0$ 와 $\hat{\beta}_1$ 의 漸近的 分散은 F의 逆行列로 구할 수 있다. 따라서 사용조건의 對數平均 또는 백분위수에 대한 最尤推定量의 漸近的 分散($\text{avar}(\ln \hat{\theta}_0)$)의 標準化된 漸近的 分散(V_0)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{avar}(\ln \hat{\theta}_0) &= \text{avar}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 s_0) \\ &= (1 \ s_0) F^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ s_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_i n_i \pi_i (s_i - s_0)^2}{\sum_{i < j} n_i n_j \pi_i \pi_j (s_i - s_j)^2} \dots\dots (2.13)$$

$$V_0 = N \text{avar}(\ln \hat{\theta}_0)$$

$$= \frac{\sum_i \alpha_i \pi_i (s_i - s_0)^2}{\sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j \pi_i \pi_j (s_i - s_j)^2} \dots\dots\dots (2.14)$$

最適 加速壽命試驗의 設計는 주어진 $s_0, s_h, t_c, k(i), i=1, 2, \dots, m$ 下에서 式(2.14)를 最小化하는 $(s_1, s_2, \dots, s_m), (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \{t_{i1}, \dots, t_{i, k(i)-1}, i=1, 2, \dots, m\}$ 을 결정하는 것이다.

3. 最適 加速壽命試驗 計劃

Chernoff[2]에 따르면 最適 加速壽命試驗은 두 스트레스의 試驗을 요구하므로 最適 低 스트레스 水準(s_1^*)과 高 스트레스 水準(s_2^*)의 결정과 이에 할당되는 시험제품의 비율 및 각 스트레스에서의 檢査時刻를 결정해야 한다. 따라서 式(2.14)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V_0 = \frac{s_1^2}{(1-\alpha_1)\pi_2(s_1-s_2)^2} + \frac{s_2^2}{\alpha_1 \pi_1(s_1-s_2)^2}$$

$$s_1 < s_2, 0 < \alpha_1 < 1 \dots\dots\dots (3.1)$$

여기서 다음의 定理에 의해 連續檢査時에 V_0 는 s_2 는 減小函數임을 보일 수 있으므로 最適 高 스트레스 水準은 s_h 가 된다.

<定理 2>

고정된 $s_1, \alpha_1, \{t_{ci}, i=1, 2\}$ 하에서 連續檢査時에 式(3.1)을 最小化하는 高 스트레스 水準(s_2^*)은 s_h 이다.

<證明>

V_0 를 s_2 에 대해 偏微分하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial V_0}{\partial s_2} = \frac{1}{\alpha_1 \pi_1} \cdot \frac{2s_1 s_2}{(s_1 - s_2)^3} + \frac{s_1^2}{(1 - \alpha_1)}$$

$$\left\{ \frac{2}{(s_1 - s_2)^3 \pi_2} - \frac{1}{\pi_2^2 (s_1 - s_2)^2} \frac{\partial \pi_2}{\partial s_2} \right\}$$

먼저 다음과 같이 $\partial \pi_2 / \partial s_2 > 0$ 임을 보일 수 있다.

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial s_2} = \frac{\partial \pi_2}{\partial \theta_2} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial s_2}$$

$$= \beta_1 \cdot \exp(-t_{c2}/\theta_2) \left(-\frac{t_{c2}}{\theta_2^2}\right) > 0,$$

단, $\beta_1 < 0$

따라서 모든 s_2 에 대해 $\frac{\partial V_0}{\partial s_2} < 0$ 가 되므로, 즉 V_0 는 s_2 의 단조감소 함수이므로 s_2^* 는 s_h 이어야 한다.

- 증명 끝 -

式(3.1)의 두 項은 각 스트레스에 대해 分離할 수 있으므로 最適計劃에서의 最適 檢査時刻(OP)은 각 스트레스에서의 π_i 를 最小化하는 檢査時刻이 되는 계산상의 잇점을 가지고 있다. 한 스트레스 水準에서 π_i 를 最小化하는 檢査時刻($t_{ij}, j=1, \dots, k(i)$)은 Ehsanes Saleh[22]에 의하면 다음의 聯立方程式에 의해 數值 解析의 方法으로 구할 수 있다.

$$z_{j+1} + z_j - 2y_j = 0, i=1, 2, j=1, \dots, k(i)-1$$

$$\dots\dots\dots (3.2)$$

단, $y_j = t_{ij} / \theta_i \dots\dots\dots (3.3)$

$$z_j = 1 - (B_j - B_{j-1}) / p_{ij} \dots\dots\dots (3.4)$$

斷續檢査下에서 최적계획의 高 스트레스 수준은 連續檢査時와 같이 s_h 로 정해진다.

<系 1>

고정된 $s_1, \alpha_1, k(i), t_{ci}, i=1, 2$ 와 최적 檢査 方法하에서 式(3.1)을 最小化하는 高 스트레스 수준은 s_h 가 된다.

<증 명>

θ_2 가 감소하면 $1 - \exp(-t_{c2}/\theta_2)$ 는 증가하므로 다음과 같이 된다(Saleh[22]).

$$\frac{\partial \pi_2^*}{\partial \theta_2} < 0 \text{ 단, } \pi_2^* : \text{ 최적 檢査방법하의 } \pi$$

그런데 $\frac{\partial \pi_2^*}{\partial s_2} = \frac{\partial \theta_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \pi_2^*}{\partial \theta_2} > 0$ 이므로 모든

s_2 에 대해 $\frac{\partial V_0}{\partial s_2} < 0$ 가 된다. 따라서 V_0 는 s_2 의

단조 감소함수이므로 s_2^* 는 s_h 가 된다.

- 증명 끝 -

따라서 식 (3.1)을 최소화하는 나머지 決定變數인 s_1 과 α_1 은 제약식이 있는 최적화 문제에서 單純換變換에 의해 制約式이 없는 문제로 變換하여 Powell [20]의 conjugate direction method에 의해 구할 수 있다. 이 방법의 각 遂行段階에서 스트레스의 檢査時刻는 식 (3.2)에 의해 결정되며 이에 따라 계산된 V_0 에 의해 最適條件 s_1^*, α_1^* 를 구하면 된다.

數值實驗을 위해 $t_{c1} = t_{c2} = t_c$, $k(1) = k(2) = k$ 라 두며 스트레스 水準과 檢査時刻를 $[0, 1]$ 사이에서 표준화 할 수 있다. 즉 $s_h = 0, s_l = 1, t_c$ 는 1로 두며 원래의 母數(' ')들은 調整된 母數(' ')로 다음과 같은 관계에 의해 相互 變換할 수 있다.

$$s' = s(s_h' - s_l') + s_l' \dots\dots\dots (3.5)$$

$$\beta_1' = \beta_1 / (s_h' - s_l') \dots\dots\dots (3.6)$$

$$\beta_0' = \ln t_c' - \{\beta_1 s_h' / (s_h' - s_l')\} + \beta_0 \dots\dots\dots (3.7)$$

$$t_{ij}' = t_c' t_{ij} \quad i=1, 2, j=1, 2, \dots, m \dots\dots\dots (3.8)$$

따라서 식 (3.5) - (3.8)과 같이 모수를 변환하더라도 문제의 성질을 변화시키지 않는다(Seo and Yum [24] 참조).

이런 가속수명시험 계획을 결정하기 위해서는 β_0 와 β_1 에 대한 事前推定이 필요하며, Chernoff[1, 2]는 이런 狀況을 locally optimal design이라 하였다. β_0 와 β_1 에 대한 事前推定方法으로 過去資料, 類似製品의 試驗資料 또는 高 스트레스 水準에서의 試驗結果 등에 의해 수행될 수 있으며, 이 추정 결과에 따른 不確實性에 대해 感度分析을 실시할 수 있다. 그러나 실제 現場에서는 β_0 와 β_1 대신에 다음의 것들이 자주 사용되며, 이용하기 편리하다.

P_u : 使用條件下에서의 t_c 까지의 故障確率

P_h : 高 스트레스 水準(s_h)下에서의 t_c 까지의 故障確率

P_u 와 P_h 에 따라 β_0 와 β_1 을 구할 수 있다. 즉

$$\beta_0 = \ln\{-1 / \ln(1 - P_u)\} \dots\dots\dots (3.9)$$

$$\beta_1 = \ln\{\ln(1 - P_u) / \ln(1 - P_h)\} \dots\dots\dots (3.10)$$

Table 2(a) - (d)는 最適 加速壽命試驗을 정리한 표로 실제 이용 가능한 P_u 와 P_h 의 값에 따라 $\beta_0, \beta_1, s_1^*, \alpha_1^*, V_0$ 를 포함하고 있으며, R_k 는 다음 식과 같이 連續檢査에 대한 斷續檢査에 의한 가속수명 시험 계획의 相對的 效率를 表示한다.

$$R_k = V_0(k) / V_0(k = \infty)$$

Table 2에 정리된 最適 加速壽命試驗 計劃에 대해 考察한 결과는 다음과 같이 정리할 수 있다.

1. k 가 2以上이 되면 連續檢査時와 비교할때 충분히 근접된 分散을 보여 주고 있다. 즉 斷續檢査의 사용 가능성을 확인해 주고 있다.
2. s_1^* 와 α_1^* 는 k 에 따라 변화가 敏感하지 않다.
3. P_u 의 증가 또는 P_h 가 감소하면 s_1^* 는 사용조건 수준으로 接近하며, α_1^* 는 1이 된다. 따라서 $P_u = 0$.
4. $P_h \leq 0.9$ 일때는 加速壽命試驗이 필요없다.
5. Yum과 Choi의 계획과 비교하면 本計劃이 항상 작은 漸近的 分散을 나타내고 있으므로 통계적으로 最良인 가속수명시험 계획이 된다.

4. 提示된 加速壽命試驗 計劃

3節에서 提示된 最適 加速壽命試驗 計劃은 設計基準를 최소화하는 低 및 高 스트레스 수준과 두 스트레스에 割當되는 시험제품의 比率, 두 스트레스의 檢査시각을 결정하고 있으나 檢査시각의 결정은 컴퓨터를 이용한 數值解析的 方法이 아니고는 힘들다. 따라서 最適 두 스트레스 수준에서 最適 檢査시각에 의한 시험보다 等時間 檢査 또는 等確率 檢査를 실시하는 것이 現場에서 편리하다.

等時間 檢査에 의한 제시된 加速壽命試驗 計劃은

Table 2(a). Optimal ALT Plan When $P_0=0.0001$.

P_h	β_0	β_1	k	s_1^*	α_1^*	V_0	R_k
0.99	9.2103	-10.7375	1	0.659	0.678	167.9389	1.5303
			2	0.699	0.752	117.3994	1.0698
			3	0.703	0.761	112.9645	1.0294
			5	0.705	0.766	110.8756	1.0103
			10	0.706	0.768	110.0216	1.0026
			∞	0.707	0.769	109.7399	1
			0.90	9.2103	-10.0443	1	0.699
2	0.708	0.790				163.0249	1.0208
3	0.710	0.793				161.1429	1.0090
5	0.710	0.794				160.2131	1.0032
10	0.711	0.795				159.8273	1.0000
∞	0.711	0.795				159.6995	1
0.50	9.2103	-8.8438				1	0.697
			2	0.697	0.824	345.4554	1.0018
			3	0.698	0.824	345.1133	1.0008
			5	0.698	0.824	344.9388	1.0003
			10	0.698	0.824	344.8653	1.0001
			∞	0.698	0.824	344.8408	1
			0.10	9.2103	-6.9599	1	0.630
2	0.630	0.849				1268.8441	1.0000
3	0.630	0.849				1268.8187	1.0000
5	0.630	0.849				1268.8057	1.0000
10	0.630	0.849				1268.8002	1.0000
∞	0.630	0.849				1268.7984	1
0.01	9.2103	-4.6101				1	0.445
			2	0.445	0.890	5274.8421	1.0000
			3	0.445	0.890	5274.8414	1.0000
			5	0.445	0.890	5274.8411	1.0000
			10	0.445	0.890	5274.8409	1.0000
			∞	0.445	0.890	5274.8409	1
			0.001	9.2103	-2.3030	1	0.000
2	0.000	1.000				10002.8902	1.0000
3	0.000	1.000				10002.8902	1.0000
5	0.000	1.000				10002.8902	1.0000
10	0.000	1.000				10002.8902	1.0000
∞	0.000	1.000				10002.8902	1

Yum과 Choi의 방법과는 低 스트레스 수준과 割當 比率이 다른 계획이며, 검사시각의 결정방법은 다음과 같다.

$$ES: t_{ij} = j/k, j=1, \dots, k-1, i=1, 2 \dots \dots \dots (4.1)$$

$$EP: y_{1j} = -\ln\{1-(j P_h/k)\}, j=1, \dots, k-1$$

$$y_{2j} = -\ln\{1-(j P_0/k)\}, j=1, \dots, k-1$$

$$t_{ij} = \theta_1 \cdot y_{ij}, i=1, 2 \dots \dots \dots (4.2)$$

여기서 P_1 는 최적 低 스트레스(s_1^*)에서의 觀測 中斷時刻까지의 故障確率로서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_i = 1 - \exp(-t_{ci}/\theta_1), \text{ 단, } \theta_1 = \exp(\beta_0 + \beta_1 s_1^*) \dots \dots \dots (4.3)$$

Table 3은 대표적인 P_0 와 P_h 에 의한 3가지 검사

Table 2(b). Optimal ALT Plan When $P_0=0.001$.

P_h	β_0	β_1	k	s_1^*	α_1^*	V_0	R_k
0.99	6.9073	-8.4344	1	0.566	0.711	94.4038	1.4702
			2	0.617	0.775	68.2809	1.0634
			3	0.622	0.783	65.9289	1.0267
			5	0.625	0.787	64.8173	1.0094
			10	0.626	0.789	64.3621	1.0023
			∞	0.626	0.790	64.2118	1
0.90	6.9073	-7.7413	1	0.610	0.794	98.0821	1.0878
			2	0.621	0.811	91.9054	1.0188
			3	0.623	0.813	90.9475	1.0082
			5	0.624	0.815	90.4736	1.0029
			10	0.625	0.815	90.2768	1.0007
			∞	0.625	0.815	90.2116	1
0.50	6.9073	-6.5407	1	0.590	0.846	179.7715	1.0063
			2	0.591	0.847	178.9222	1.0016
			3	0.591	0.847	178.7673	1.0007
			5	0.591	0.847	178.6883	1.0002
			10	0.591	0.847	178.6550	1.0001
			∞	0.591	0.847	178.6439	1
0.1	6.9073	-4.6569	1	0.447	0.888	519.3080	1.0001
			2	0.447	0.888	519.2658	1.0000
			3	0.447	0.888	519.2580	1.0000
			5	0.447	0.888	519.2539	1.0000
			10	0.447	0.888	519.2523	1.0000
			∞	0.447	0.888	519.2517	1
0.01	6.9073	-2.3071	1	0.000	1.000	1000.2919	1.0000
			2	0.000	1.000	1000.2919	1.0000
			3	0.000	1.000	1000.2918	1.0000
			5	0.000	1.000	1000.2918	1.0000
			10	0.000	1.000	1000.2918	1.0000
			∞	0.000	1.000	1000.2918	1

방법에 따른 V_0 와 동일한 스트레스 간격 및 시험 제품수에 의해, 즉 중간($s_1=0.5$)과 高 스트레스 수준에서 同一한 시험제품 比率에 의해 ES, EP 검사방법으로 시험되는 표준 가속수명시험 계획 (Meeker[12]와 Nelson 등[18]이 명명)에서의 V_0 를 보여 주고 있다. Table 3을 檢討하면 提示된 계획은 極端的으로 P_0 가 적고 P_h 가 큰 경우에 V_0 가 최적 검사방법보다 3% 정도 크지만 그 외의 경우는 거의 차이가 없고 고려된 모든 경우에서 표준계획보다 훨씬 적은 분산을 보여주므로 實用的 側面에서 最適 加速壽命試驗 計劃의 代用으로 推薦할 만 하다.

또한 等時間 검사와 等確率 검사에 의한 加速壽

命試驗을 비교해 보면 제시된 계획과 표준계획에서 等時間 검사가 等確率 검사보다 항상 V_0 가 적으나 그 차이는 微細하다. 따라서 等時間 檢査가 等確率 檢査보다 檢査시각 결정이 容易하므로 等時間 檢査에 의한 最適 加速壽命試驗 計劃을 推薦할 만 하다. 그러나 等確率 檢査는 특히 小標本 일때 모수의 最尤推定量의 존재 가능성이 크며, Meeker [13]에 의하면 사용조건하에서 故障率의 어떤 樣態 (증가형, 일정형, 감소형)에 대해서도 統計的으로 상당히 效率的이라고 하므로 지수 고장분포가 의 심스러울때 等時間 檢査의 代用으로 이용 가능하다.

Table 2(c). Optimal ALT Plan When $P_0=0.01$.

P_h	β_0	β_1	k	s_1^*	α_1^*	V_0	R_k
0.99	4.6001	-6.1273	1	0.402	0.776	41.8282	1.3597
			2	0.473	0.818	32.3398	1.0513
			3	0.480	0.824	31.4319	1.0217
			5	0.484	0.828	30.9994	1.0077
			10	0.485	0.829	30.8216	1.0019
			∞	0.486	0.829	30.7629	1
0.90	4.6001	-5.4342	1	0.444	0.842	43.0835	1.0674
			2	0.460	0.853	40.9564	1.0147
			3	0.463	0.855	40.6213	1.0064
			5	0.465	0.856	40.4551	1.0023
			10	0.465	0.856	40.3860	1.0006
			∞	0.465	0.856	40.3630	1
0.50	4.6001	-4.2336	1	0.366	0.898	66.7434	1.0042
			2	0.368	0.899	66.5319	1.0010
			3	0.368	0.899	66.4932	1.0005
			5	0.368	0.899	66.4735	1.0002
			10	0.368	0.899	66.4652	1.0000
			∞	0.368	0.899	66.4624	1
0.10	4.6001	-2.3498	1	0.000	1.000	100.0538	1.0000
			2	0.000	1.000	100.0531	1.0000
			3	0.000	1.000	100.0530	1.0000
			5	0.000	1.000	100.0530	1.0000
			10	0.000	1.000	100.0529	1.0000
			∞	0.000	1.000	100.0529	1

Table 2(d). Optimal ALT Plan When $P_0=0.1$.

P_h	β_0	β_1	k	s_1^*	α_1^*	V_0	R_k
0.99	2.2504	-3.7775	1	0.030	0.979	9.9772	1.0839
			2	0.144	0.936	9.3803	1.0190
			3	0.157	0.935	9.2822	1.0084
			5	0.163	0.934	9.2328	1.0030
			10	0.165	0.934	9.2129	1.0007
			∞	0.166	0.934	9.2051	1
0.90	2.2504	-3.0844	1	0.020	0.999	9.9994	1.0076
			2	0.050	0.982	9.9461	1.0022
			3	0.055	0.980	9.9340	1.0010
			5	0.057	0.980	9.9275	1.0004
			10	0.058	0.979	9.9248	1.0001
			∞	0.058	0.979	9.9239	1
0.50	2.2504	-2.4360	1	0.000	1.000	10.0093	1.0009
			2	0.000	1.000	10.0024	1.0002
			3	0.000	1.000	10.0011	1.0001
			5	0.000	1.000	10.0004	1.0000
			10	0.000	1.000	10.0001	1.0000
			∞	0.000	1.000	10.0000	1

Table 3. Comparison of V_0 for ALT Plans.

P_0	P_h	k	Optimal			Standard*	
			OP	ES	EP	ES	EP
0.0001	0.99	2	117.3994	121.9090	122.6986	215.8470	216.2125
		3	112.9645	114.9162	116.5966	212.6041	213.3270
0.001	0.90	2	91.9054	92.1029	92.4322	136.8530	137.0333
		3	90.9475	91.0457	91.2818	136.2553	136.3812
0.01	0.50	2	66.5319	66.5327	66.5346	94.0905	94.0930
		3	66.4932	66.4936	66.4947	94.0301	94.0314
0.10	0.90	2	9.9461	9.9483	9.9519	20.7112	20.7728
		3	9.9340	9.9351	9.9378	20.4785	20.5219

* a standard plan with $s_1=0.5$ and $\alpha_1=0.5$

그리고 제시된 等時間 檢査下에서의 加速壽命試驗計劃은 동일한 檢査方法下에서 最適 저 스트레스水準과 이에 相當되는 試驗製品の 比率를 결정한 Yum과 Choi의 試驗計劃의 V_0 와 거의 차이가 없으며 본 계획의 檢査時刻는 最適은 아니지만 統計적으로 最適인 저 스트레스 수준과 試驗製品 比率로 試驗을 실시하므로 實驗者를 심리적으로 안심시킬 수 있는 長點이 있다.

또한 Table 4는 P_0 와 P_h 의 가능한 값의 범위에 따른 사전 推定값(각각 \tilde{P}_0, \tilde{P}_h)에 의해 V_0 의 感度分析을 실시한 일부 결과인데 Yum과 Choi의 계획처럼 사전 추정값에 V_0 가 그리 敏感하지 않음을

파악할 수 있다. 여기서의 感度란 예를 들면 $P_0=0.01, P_h=0.9$ 일때에 \tilde{P}_0 와 \tilde{P}_h 를 0.003과 0.7로 잘못 추정시에 等時間 檢査下의 분산의 증가 비율은 Table 4에서 6.33%임을 알 수 있다(Table 4에서 $\tilde{P}_0=0.01, \tilde{P}_h=0.8$, 等確率 檢査時에 感도가 .9990이므로 이 경우에 \tilde{P}_0, \tilde{P}_h 값에 따른 等確率 檢査時刻이 $P_0=0.01, P_h=0.9$ 일때의 等確率 檢査時刻보다 最適 檢査時刻에 가깝다는 것을 파악할 수 있다).

〈數值 例〉

어떤 전자제품의 壽命은 指數分布를 따른다고 알려져 있으며, 사용 絕對溫度(273+섭씨온도)의

Table 4. Sensitivities of V_0 When True $P_0=0.01$ and $P_h=0.9$.

\tilde{P}_h	1) \tilde{P}_0	\tilde{P}_0				
		0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
0.003	ES	1.0633	1.0753	1.0816	1.0801	1.0715
	EP	1.0580	1.0720	1.0838	1.0885	1.0916
0.005	ES	1.0163	1.0239	1.0299	1.0312	1.0304
	EP	1.0117	1.0208	1.0311	1.0374	1.0461
0.01	ES	1.0086	1.0020	1	1.0008	1.0057
	EP	1.0047	.9990	1	1.0043	1.0160
0.03	ES	1.1108	1.0685	1.0410	1.0323	1.0329
	EP	1.1070	1.0654	1.0398	1.0334	1.0386
0.05	ES	1.2693	1.1816	1.1206	1.0976	1.0856
	EP	1.2654	1.1783	1.1186	1.0973	1.0890

1) Inspection Scheme.

逆數(-1/절대온도 : 스트레스 수준이 증가형이 되도록 “-” 첨가)와 平均壽命과는 式(2.2)와 같은 線形關係가 成立한다고 한다. 사용조건의 온도는 50°C이며, 최대온도는 120°C이다. 50°C와 120°C에서 180일 동안 고장날 확률은 0.1%와 90%로 推定되며, 各 스트레스에서 200개의 시험제품으로 3회의 단속검사를 실시코자 한다.

따라서 $t_c' = 180$, $s_u' = -0.00310$, $s_h' = -0.00254$ 가 되어 s_2^* 는 120°C이며 Table 1로부터 $s_1^* = 0.623$, $\alpha_1^* = 0.813$ 이 되므로, $n_1 = 163$, $n_2 = 37$ 이고, $s_1^* = -0.00271$, 즉 96°C가 된다. 그리고 각 검사방법에 따른 표준화된 검사시각과 실제 검사시각은 다음과 같다.

OP : $(t_{11}, t_{12}, t_{13}) = (0.3281, 0.6617, 1.0)$

$(t_{21}, t_{22}, t_{23}) = (0.2545, 0.5735, 1.0)$

$(t_{11}', t_{12}', t_{13}') = (59, 119, 180)$

$(t_{21}', t_{22}', t_{23}') = (46, 103, 180)$

ES : $(t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}) = (1/3, 2/3, 1)$, $i = 1, 2$

$(t_{i1}', t_{i2}', t_{i3}') = (60, 120, 180)$, $i = 1, 2$

EP : $(t_{11}, t_{12}, t_{13}) = (0.3197, 0.6527, 1.0)$

$(t_{21}, t_{22}, t_{23}) = (0.1549, 0.3979, 1.0)$

$(t_{11}', t_{12}', t_{13}') = (58, 117, 180)$

$(t_{21}', t_{22}', t_{23}') = (29, 72, 180)$

5. 結 論

本 論文은 壽命이 指數分布를 따를때 斷續檢査 및 定時終結下에서 사용조건하의 對數平均에 대한 最尤推定量의 漸近的 分散을 最小화하는 低 및 高 스트레스 수준과 시험제품 割當比率과 각 스트레스에서의 最適 檢査시각을 결정하는 가속수명시험을 설계하였다.

最適 加速壽命試驗 計劃의 數值實驗 결과는 各 스트레스 수준에서 多數의 檢査횟수가 필요하지 않으므로 連續檢査보다 실시 容易한 斷續檢査의 有用성을 보여주고 있다. 또한 數值解析 방법에

의한 最適 檢査시각을 정해야 하는 어려움을 피하기 위하여 最適計劃의 두 스트레스 수준에서 等時間 檢査와 等確率 檢査방법에 의한 가속수명시험 계획을 제시하여 漸近的 分散의 側面에서 比較한 결과 差異가 적으므로 最適 加速壽命試驗 計劃의 大용으로 推薦할 만 하다.

追後 研究課題로는 사용조건과 高 스트레스 水準에서의 一定期間 동안의 故障確率에 대한 事前推定이 필요하므로 이에 따른 adaptive design과 다른 壽命 分布나 觀測中斷 形態 그리고 費用같은 最適 基準下에서 加速 壽命試驗의 設計가 要望된다.

참고문헌

- [1] Chernoff, H., "Locally Optimal Designs for Estimating Parameters," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 24, pp.586-602, 1953.
- [2] Chernoff, H., "Optimal Accelerated Life Designs for Estimation," *Technometrics*, Vol. 4, pp.381-408, 1962.
- [3] Davis, D.J., "An Analysis of Some Failure Data," *Journal of American Statistical Association*, Vol. 47, pp.111-150, 1952.
- [4] Ehrenfeld, S., "Some Experimental Design Problems in Attribute Life Testing," *Journal of American Statistical Association*, Vol. 57, pp.668-679, 1962.
- [5] Escobar, L.A. and Meeker, W.Q., "Planning Accelerated Life Tests with Type II Censored Data," *Journal of Statistical Computations and Simulation*, Vol. 23, pp.273-297, 1986.
- [6] Hamada, M. and Tse, S.K., "A Note on the Existence of Maximum Likelihood Estimates in Linear Regression Models Using Interval-Censored Data," *Journal of Royal Statistical Society Series B*, Vol. 50, pp.293-296, 1988.

[7] Kielpinski, T.J. and Nelson, W., "Optimal Censored Accelerated Life Tests for Normal and Lognormal Life Distributions," IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-24, pp.310-320, 1975.

[8] Lawless, J.F., *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley and Sons, New York, 1982.

[9] Little, R.E. and Jebe, E.H., "A Note on the Gain in Precision for Optimal Allocation in Regression as Applied to Extrapolation in S-N Fatigue Testing," Technometrics, Vol. 11, pp.389-392, 1969.

[10] Mann, N.R., "Design of Over-Stress Life Test Experiments When Failure Times have the Two-Parameter Weibull Distribution," Technometrics, Vol. 14, pp.437-451, 1972.

[11] Mann, N.R., Schafer, R.E. and Singpurwalla, N.D., *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*, John Wiley and Sons, New York, 1974.

[12] Meeker, W.Q., "A Comparison of Accelerated Life Test Plans for Weibull and Lognormal Distributions and Type I Censoring," Technometrics, Vol. 26, pp.157-171, 1984.

[13] Meeker, W.Q., "Planning Life Tests in Which Units are Inspected for Failure," IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-35, pp.571-578, 1986.

[14] Meeker, W.Q. and Hahn, G.J., "How to Plan an Accelerated Life Test—Some Practical Guidelines," ASQC Basic References in Quality Control: Statistical Techniques, Vol. 10, 1985.

[15] Meeker, W.Q. and Nelson, W., "Optimal Accelerated Life Tests for the Weibull and Extreme Value Distributions," IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-24, pp.321-332, 1975.

[16] Nelson, W., "Optimum Demonstration Te-

sts with Grouped Inspection Data from an Exponential Distribution," IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-26, pp.226-231, 1977.

[17] Nelson, W., "Accelerated Life Testing—Step—Stress Models and Data Analysis," IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-29, pp.103-108, 1980.

[18] Nelson, W. and Kielpinski, T.J., "Theory for Optimum Censored Accelerated Life Tests for Normal and Lognormal Life Distributions," Technometrics, Vol. 18, pp.105-114, 1976.

[19] Nelson, W. and Meeker, W.Q., "Theory for Optimum Accelerated Censored Life Tests for Weibull and Extreme Value Distributions," Technometrics, Vol. 20, pp.171-177, 1978.

[20] Powell, M.J.D., "An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives," Computer Journal, Vol. 7, pp.155-162, 1964.

[21] Rao, C.R., *Linear Statistical Inference and Its Application*, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, 1973.

[22] Saleh, A.K. MD. Ehsanes, "Estimation of the Parameters for the Exponential Distribution Based on Optimum Order Statistics in Censored Samples," Annals of Mathematical Statistics, Vol. 37, pp.1717-1735, 1966.

[23] Seo, S.K., "Development of Optimal Accelerated Life Test Plans for Weibull Distribution under Intermittent Inspection," Journal of the KSQC, Vol. 17, pp.89-106, 1989.

[24] Seo, S.K. and Yum, B.J., "Accelerated Life Test Plans under Intermittent Inspection and Type I Censoring: The Case of Weibull Failure Distribution," Naval Research Logistics, Vol. 38, pp.1-22, 1991.

[25] Viertl, R., *Statistical Methods in Accelerated*

Life Testing. Vandenhoeek & Ruprecht. Göttingen, 1988.

[26] Yum, B.J. and Choi, S.C., "Optimal De-

sign of Accelerated Life Tests under Periodic Inspection." *Naval Research Logistics*, Vol. 36, pp. 779-793, 1989.
