Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 17, No. 2, Dec., 1991

多種類의 고객을 지닌 閉鎖型 대기행렬 네트워크 模型의 出力率 限界

俞仁善* · 金聖植**

On the Throughput Bounds of the Closed Queueing Networks with Multiple Classes of Customers

In-Seon Yoo and Sung-Shick Kim

Abstract

The exact solution of the closed queueing networks(CQN) is known only for the product form (BCMP) queueing networks. Various computational algorithms are available to derive system throughput(the rate at which a system completes units of computational work) of the networks. However, the computational expense of an exact solution is often excessive when there are multiple classes of cutomers.

Instead of computing the exact values, it may be sufficient to derive bounds on the performance measures. Techniques for obtaining bounds on BCMP queueing networks have appeared in the past years. This paper also presents bounds on throughput in CQN models with multiple classes of customers.

1. 서 론

컴퓨터/통신 시스템과 柔軟 生產시스템(FMS) 등과 같이 네트워크로 구성된 시스템의 性能을 評價하는 일이 주요한 關心事가 되고 있다. 시스템 分析者는 作業量의 增減에 따라 시스템의 出力率(throughput)과 응답시간(response time)을 豫測해야 할 경우가 종종 있게 된다. 이때 고려대상인 시스템을 模型化하기 위해 적용되는 방법의 하나로 "乘法型(product form 또는 BCMP[1])"인 閉鎖型 대기행렬 네트워크(closed queueing network : CQN)가 이용된다. 이 CQN 模型에서는 作業量이

* 水原大學校 經商大學 經營學科
** 高麗大學校 工科大學 產業工學科

明示的으로 나타나므로, 원하는 性能尺度(performance measure)를 얻기 위해서 여러 作業量에 대해 模型을 풀 수 있다.

乘法型 CQN에 대한 性能尺度를 구하는 정확한 解法은 解를 도출하는데 걸리는 시간이 시스템內의 상태數에 따라 指數的으로 증가하게 되어 현실적으로 적용할 수 있는 문제의 크기에 제한을 받게 된다. 이를 극복하기 위하여 정확한 방법을 대신하여 상대적으로 적은 계산량으로 性能尺度를 구하는 방법들이 개발되었으며, 그 중의 하나가 限界(bounds)를 구하는 방법이다. 여기서 구하는 限界는 시스템 出力率(throughput) (또한 그것과 雙對的인 관계를 갖는 시스템 응답시간(response time)의 限界도 간단하게 구할 수 있음)의 上下限(upper/lower limit)이 계산된다. 이 방법은 계산이 容易하고 그 결과도 實用性을 가질 수 있을 만큼 정확하여 널리 쓰이고 있는 것이 사실이다[3,9]. 그런데 그 동안 CQN 模型의 限界에 관한 硏究는 單一 종류의 고객들이 있는 경우(single class of customer)를 다룬 것이 대부분이다.

本 연구는 多種類의 고객(multiple classes of customers)을 지닌 乘法型 CQN에 관한 出力率 限界를 구성하고 적용하는 방법을 論한다. 出力率 限界에 영향을 주는 주요 要因은 각 종류의 고객이 시스템內에서 머무는 동안 작업장別로 요구하는 시간量인 負荷量(load)에 대한 變動係數(負荷量들의 평균에 대한 표준편차의 相對的 比率 : coefficient of variation(CV))와 시스템內에 존재하는 일정한 고객數(以下 "母集團의 크기(population size)"라고 함)이므로, 먼저 負荷量들의 變動係數를 계산하여 그 값에 따라 概略的인 出力率 限界를 간편하게 구하는 式을 제시한다. 이와 같은 限界値를 구했을 때의 利點으로는 고객종류別 出力率 尺度에 대해 費用을 적게 들이면서도 간편하고 概略的인 曲線이나 式을 얻을 수 있으며, 또한 隘路作業場(bottleneck device) 때문에 생기는 出力率의 限界値를 미리 알아볼 수 있다.

2. CQN 模型

CQN은 네트워크의 位相(topology), 작업장의 종류, 서비스 요구량 및 네트워크의 母集團에 의해 설명될 수 있다. 네트워크의 位相은 작업장의 數(M)과 종류 r(r=1, …, R)의 고객이 작업장 i(i=1, …, M)를 방문하는 평균 비율인 방문比率(visit ratio) V_{ir}로 표현된다. 여기서 고객의 종류는 그 자신의 經路變換(routing) 行態와 서비스요구량에 따라 나누어지며, 그 數는 R(R≥1)로 표현된다. 乘法型 解(product form solution)가 존재하기 위한 假定들에 따라 허용가능한 서비스原則으로는 단지 PCPS(first come, first served), PS(processor sharing), LCPS-PR(last come, first served-preemptive resume) 또는 IS(infinite server ; delay) 등이다. 종류 r의 고객이 작업장 i에서 받는 서비스 시간은 S_{ir}로 나타낸다. 만약 작업장 i가 IS작업장이라면, 그 작업장에서는 S_{ir} 대신에 Z_r로 나타내는데, 예를 들어 이 Z_r을 컴퓨터 시스템에서는 터미날의 think time이라고 부른다.

狀態獨立(state-independent)인 작업장의 서비스 시간에 방문 比率을 곱한 $D_{ir}=V_{ir}S_{ir}$을 종류 r 고객에 의한 작업장 i에서의 負荷量(load)이라고 한다. 이 負荷量 D_{ir}은 종류 r의 고객 각각이 시스템內에 머무는 동안 작업장 i에 요구하는 시간량이다. 그리고 각 고객종류마다 시스템內에 존재하는 일정한 고객數 즉 母集團은 常數이다.

종류 r 고객이 각 작업장에 요구하는 負荷量의 평균 값, 가장 작은 값 및 가장 큰 값을 각각 $D_{a,r}$, D_{mr}, D_{br}이라고 하면, 가장 큰 負荷量 D_{br}을 지닌 작업장을 종류 r 고객의 隘路作業場(bottleneck device)이라고 부른다. 주어진 고객數(母集團)는 벡터 $N=(N_1, N_2, \cdots, N_R)$으로 표시되는데, 여기서 N_r은 종류 r의 總 고객數(종류 r의 고객母集團의 크기 또는 作業量)이다. 네트워크內의 總 고객數(作業量)는 $N=N_1+N_2+\cdots+N_R$이 되며, 구하고자

하는 性能尺度는 종류 r 고객의 시스템 出力率 $X_r(N)$이다. 그것과 雙對的인 관계를 갖는 시스템 응답시간 $R_r(N)$는 $X_r(N) \cdot R_r(N) = N_r$인 Little의 公式[7]을 이용하여 간단히 얻을 수 있다.

시스템 作業量이 N이 증가함에 따라 이 尺度들이 어떤 樣相으로 변화하는가를 조사해야 할 경우가 있다. 單種類의 고객만 처리하는 네트워크인 경우 作業量을 증가시킨다는 概念은 간단히 시스템內의 고객數 N을 증가시키는 것을 의미하지만, 多種類의 고객들을 처리하는 네트워크에서는 이와 같은 概念이 그대로 적용될 수 없다. 왜냐하면 母集團 백터 N은 R次元이므로 N을 증가시키는 방법은 그 가능한 組合의 數 만큼 있기 때문이다. 이런 경우 생각할 수 있는 한가지 방법으로써 다른 母集團들을 常數(constant)로 남겨놓고 한번에 하나씩 한 고객종류에 대한 母集團의 크기를 증가시켜 보는 것이다. 이제 한 고객종류에 대한 作業量(母集團의 크기)의 變化에 따른 시스템의 性能에 관심을 갖는다고 하자. $N_r=1$이고, r과 다른 모든 고객종류 s에 대해 $N_s=0$일 때 $R_{0r}=R_r(N)$이다.

3. 시스템 出力率

시스템의 性能에 관한 필요한 情報를 얻기 위해서는 실용적이고 간편한 分析技法이 필요하다. 이들 技法 중 가장 널리 쓰이는 것의 하나로서 필요한 性能尺度들에 관한 限界(bound)를 구하는 것이다. 기본적인 CQN의 全體解(global solution)를 구하는 방법과는 근본적으로 다른 出力率 限界를 導出하는 既存의 몇가지 방법을 論하기로 한다. 여기서의 IS가 아닌 작업장이고 특별히 다루고자 할 때는 think time이 Z_r인 작업장이라고 한다.

3-1. Bottleneck Analysis(Asymptotic Bound Analysis ; ABA)[6]

ABA는 單種類의 고객을 시스템하는 네트워크의 모든 작업장 i에서 고객의 처리率은 시스템 出力率에 대한 上限界 $1/D_i$를 넘을 수 없다는 概念이 기초를 두고 있다.

$$\text{單種類} : X(N) \leq \min\left\{\frac{1}{D_b}, \frac{N}{(R_0+Z)}\right\} \cdots\cdots\cdots (1)$$

3-2. Balanced Job Bounds(BJB)[9]

3-2-1. 單種類 CQN

네트워크에 대해 乘法型 解가 존재하고 또한 IS작업장이 없다면, 單種類의 고객을 취급하는 CQN의 시스템 出力率은 본래 네트워크의 모든 작업장들에서 최대 負荷量과 평균 負荷量 사이의 均衡을 이루는 네트워크들의 出力率에 의한 限界들 사이에 존재한다.

가. BJB :

$$\frac{N}{R_0+(N-1)D_b} \leq X(N) \leq \frac{N}{R_0+(N-1)D_a} \cdots\cdots\cdots (2)$$

그런데 (2)식의 上限界보다 정확한 上限界를 최근 Dallery[2]가 도출하였는데 다음과 같다.

나. 개선된 BJB :

$$\frac{N}{R_0+(N-1)D_b} \leq X(N) \leq \frac{N}{R_0+(N-1)D_c} \cdots\cdots\cdots (3)$$

여기서 $D_c=\Sigma_{i=1}^{M} D_i^2/R_0$이다. 그리고 그는 (3)식이 (2)식보다 우월함을 수학적으로 증명하였다.

IS작업장이 있는 시스템에서의 BJB下限界는 IS작업장으로 대치시킨 후 (2)식을 이용하면 구해진다.

다. IS작업장이 있는 시스템의 BJB下限界 :

$$\frac{N}{R_0+Z+(N-1)D_c} \leq X(N) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

이에 대응하는 下限界도 얼마 前까지 구하지 못했으나 Dallery[2]가 또한 제시하였다.

라. IS작업장이 있는 시스템의 개선된 BJB上限界:

$$\frac{N}{R_0+Z+(N\text{-}1)D_a}<X(N)<\min\left\{\frac{N}{R_0+Z+(N\text{-}1)D_d},\frac{N}{R_0+Z+(N\text{-}1)D_c}\right\}\cdots\cdots(5)$$

여기서 $D_d=\Sigma_{i=1}^{M} D_i^2/(R_0+Z)$이다.

3-2-2. 多種類 CQN

IS작업장이 없는 多種類의 고객들을 처리하는 네트워크의 경우, 효율적이지는 못하지만 가장 간단한 形態를 갖는, 종류 r 고객의 出力率 限界는 다음과 같다.

$$\frac{N_r}{(M+N\text{-}1)D_{br}}\leq X(N)\leq\frac{N_r}{(M+N\text{-}1)D_{mr}}\cdots\cdots(6)$$

3-3. Kriz확장법[5]

Kriz는 BJB의 결과를 보다 확장하여 IS작업장을 지닌 네트워크에도 적용할 수 있도록 BJB의 결과를 일반화시켰고, 單種類와 多種類의 고객들을 처리하는 限界들의 관계식을 구성하였다.

多種類 CQN의 下限界:

$$\frac{N_r}{R_0+Z_r+(N\text{-}1)D_{br}}\leq X_r(N)\cdots\cdots(7)$$

Kriz의 방법은 概略的인 平均値分析(Mean Value Analysis)의 槪念[8]에서 얻어진 것으로 以前의 모든 狀態들에 대해 反復計算을 피하기 위해서 바로 前의 狀態에 대한 性能尺度들을 概算値(approximation)로 이용하였다. (7)식은 限界들의 體系(hierarchy)를 얻기 위해 여러번 이용될 수 있다. 이런 방법은 Eager등[3]의 PHB(Performance Bound Hierarchy)와 비슷하다.

3-4. Composite Bound Method(CBM)[4]

종류 r 이외의 모든 고객종류들에 대한 最少의 出力率 下限界 X_s : LOW−(N)들이 주어졌을 때, 最少 利用率을 계산하면

$$U_{ir}:\text{other}-(N)=\sum_{s\neq r}X_s:\text{LOW}-(N)\cdot D_{is}$$

이다. 이 값은 r 이외의 고객 종류들에 의한 각 작업장에서의 利用率 값이다. 따라서 각 작업장이 餘分으로 갖고 있는 利用率은

$$U_{ir}:\text{CUB}+(N)=1-U_{ir}:\text{other}-(N)$$으로

종류 r의 고객들이 그 작업장에서 획득할 수 있는 최대 利用率이다. 이 최대 利用率값들이 각 작업장과 시스템에서 허용할 수 있는 최대 出力率을 결정하게 된다.

모든 작업장 i에서 종류 r 고객의 시스템 出力率에 대해 Composite Upper Bound X_r : CUB+(N)은 종류 s 고객의 出力率 下限界 X_s : LOW−(N)이 주어지면

$$X_r(N)\leq X_r:\text{CUB}+(N)=\min_i\frac{1-\Sigma_{s\neq r}X_s:\text{LOW}-(N)\cdot D_{is}}{D_{ir}}\cdots\cdots(8)$$

으로 얻어진다. 따라서 이 방법은 가장 바람직한 下限界가 주어진다면 대체로 정확한 上限界를 얻을 수 있으나, 반면에 주어지는 下限界에 너무 의존되어 있으므로 반드시 모든 종류의 下限界를 조사하여여야 하고 그에 따라 계산량이 다소 느는 단점이 있다.

4. 多種類 CQN模型의 出力率 限界式

本 硏究의 目的인 多種類의 고객을 지닌 乘法型 CQN에 관한 出力率 限界를 구성하기로 한다. 먼저 旣存의 (6)식을 증명하기 위해 다음의 變數들을 定義하기로 한다. $R_{ir}(\mathbf{N})$은 종류 r의 모든 고객이 작업장 i를 방문하여 대기하고 서비스 받는데, 걸리는 總 시간이라 하면, 平均値分析(Mean Value Analysis)과 도착定理를 이용하면

$$R_{ir}(\mathbf{N})=D_{ir}\cdot(1+L_{ir}(\mathbf{N}\text{-}1_r))$$

여기서 $L_{ir}(\mathbf{N}\text{-}1_r)$은 CQN의 고객 母集團벡터가 $\mathbf{N}\text{-}1_r$일 때 작업장 i에서의 고객종류 r의 평균고객數이다. 모든 負荷量 D_{ir}이 D_r로 同一할 때

$$\Sigma_i R_{ir}(\mathbf{N})=\Sigma_i D_r\cdot(1+L_{ir}(\mathbf{N}\text{-}1_r))=D_r\cdot(M+N\text{-}1)$$

이때 M은 네트워크內의 작업장數이다. 따라서 $X_r(\mathbf{N})=N_r/\Sigma_i R_{ir}(\mathbf{N})$이므로

$$X_r(\mathbf{N})=\frac{N}{(M+N+1)\cdot D_r}$$

실제 네트워크에 BJB를 적용하기 위해서는 가장 작은 負荷量 D_{mr}을 지닌 작업장과 隘路工程 D_{br}를 확인해야만 한다. 乘法型 CQN에 대한 出力率은 모든 작업장의 負荷量이 D_{br}로 증가된 동일한 CQN 出力率보다는 확실히 크다. 또한 出力率은 각 작업장의 負荷量 D_{mr}으로 균형을 이루는 네트워크의 出力率을 넘을 수 없으므로 (6)식

$$\frac{N_r}{(M+N-1)\cdot D_{br}}<X_r(\mathbf{N})<\frac{N_r}{(M+N-1)\cdot D_{mr}} \qquad \cdots\cdots (6)$$

이 얻어진다. 그러나 실제 이들 限界는 보다 개선되어질 수 있다.

$$\Sigma_i R_{ir}(\mathbf{N})=\Sigma_i D_{ir}\cdot(1+L_{ir}(\mathbf{N}\text{-}1_r))=$$

$$R_{or}+\Sigma_i\cdot L_{ir}(\mathbf{N}\text{-}1)$$

여기서 R_{or}가 단지 負荷量들의 合이기 때문이다. $D_{br}>D_{ir}$이므로

$$\Sigma_i R_{ir}(\mathbf{N})\leq R_{or}+(N\text{-}1)\cdot D_{br}$$

따라서 개선된 下限界 式은 다음과 같이 (7)식으로 나타낸다.

$$X_r(\mathbf{N})\geq\frac{N_r}{R_{or}+(N\text{-}1)\cdot D_{br}} \qquad \cdots\cdots (7)$$

한편, 上限界는 각 작업장에서의 고객종류別 평균 고객數를 고려하여 구할 수 있다. 結合 알고리즘(convolution)에서 : $L_{ir}^{(n)}=\Sigma_{j=1}^{n}\alpha j\cdot D_{ir}^{j}$으로 α_j값들은 관련된 작업장 i와 무관한 陽의 계수이다. $D_{ir}>D_{jr}$이므로 $L_{ir}(\mathbf{N})>L_{jr}(\mathbf{N})$이다. 따라서

$$\Sigma_i D_{ir}\cdot L_{ir}(\mathbf{N}\text{-}1)\geq D_{ar}\,\Sigma_i L_{ir}(\mathbf{N}\text{-}1_r)=D_{ar}\cdot(N\text{-}1)$$

이때 D_{ar}는 작업장에서의 고객종류 r의 평균 負荷量이다. $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 0$이고 유사하게 b_i項에 대해 $\Sigma_i a_i\cdot b_i\geq\bar{a}\,\Sigma_i b_i$인데, 여기서 $\bar{a}$는 여기서 $\bar{a}$의 평균이다. 평균 $\bar{a}$를 중심으로 n項을 두 부분으로 나누어 k 項씩 고려하면 쉽게 증명할 수 있다.

$$\Sigma_{i=1}^{n} b_i(a_i-\bar{a})=\Sigma_{i=1}^{k}(b_i-b_k)\cdot(a_I-\bar{a})+b_k\Sigma_{i=11}^{k}(a_i-\bar{a})+\Sigma_{i=k+1}^{n}(b_k-b_i)\cdot(\bar{a}-a)-b_k\,\Sigma_{i=k+1}^{1}(\bar{a}-a_i)$$

$$=\Sigma_{i=1}^{k}(b_i-b_k)\cdot(a_i-\bar{a})+\Sigma_{i=k+1}^{n}(b_k-b_i)\cdot(\bar{a}-a_i)$$

위 식에서 合의 모든 項들의 因子 모두 非陰이므로 $\Sigma_i\ a_i \cdot b_i > \bar{a}\ \Sigma_i\ b_i$식이 된다. 合을 정리하면 다음과 같은 上限界 式을 얻을 수 있다.

$$X_r(N) \leq \frac{N_r}{R_{or}+(N-1)\cdot D_{ar}}$$

이 上限界値는 반복계산없이 간단하게 얻어진다. 以上의 두 限界値를 정리하면;

$$\frac{N_r}{R_{or}+(N-1)D_{ar}} \leq X_r(N) \leq \frac{N_r}{R_{or}+(N-1)D_{ar}} \quad \cdots\cdots(9)$$

또한 (2)식 보다 우월한 (3)식을 導出하였던 Dallery[2]의 결과를 그대로 多種類의 고객을 지닌 네트워크에도 확대 적응할 수 있는데, (9)식의 上限界에서 D_{ar}을 D_{cr}로 대치하면 된다. 이때 $D_{cr}=\Sigma_{i=1}^{M} D_{ir}^2/R_{or}$이다.

그런데 IS작업장이 하나도 없는 多種類 대기행렬 네트워크에서 出力率 限界들을 간편하게 구하는 限界式을 구성하기 위해 以上의 결과를 아무런 條件없이 직접 적용하면 부정확한 限界도 얻어질 수 있다. 예를 들어 BJB의 (9)式에서 下限界는 항상 정확한 解에 근접하므로 문제가 없으나, 上限界는 종류 r의 고객의 실제 出力率보다도 작은 경우가 생길 수 있으므로 경우에 따라 上限界가 아닐 수도 있다[2].

그와 같은 주요 原因은 각 작업장에서 종류 r 고객의 負荷量 D_{ir}과 고객종류別 母集團 크기 N_r과 밀접한 관계가 있다는 사실을 각종 模型의 分析결과 조사되었다. 그러므로 本節에서는 먼저 고객종류別 負荷量 D_{ir}들의 特性을 파악하기 위해 평균과 표준편차를 계산해서 이들의 變動係數(CV_r=표준편차/평균)를 구하고, 각 고객종류의 母集團 크기 N_r들에 따라 여러 限界式 중에서 가장 알맞는 것을 선택하기로 한다. 이때 CV의 경계값으로 1이 조사되어 이에 따라 세 종류의 限界式을 적용한다.

종류 r의 고객數 N_r과 變動係數(CV_r)에 따라 구할 수 있는 限界式을 제시한다.

1) $CV \geq 1$일때:

(9)식을 적용하고, 보다 더 정확한 上限界를 얻으려면 (8)식을 적용한다.

2) $CV < 1$일때:

$$\frac{N_r}{R_{or}+(N-1)D_{br}} \leq X_r(N) \leq \frac{N_r}{R_{or}+(N-1)D_{cr}} \quad \cdots\cdots(10)$$

또한 1)의 경우에서도 N_r이 매우 큰 경우나 해당 고객종류의 N_r이 다른 종류의 母集團보다 크거나 같은 경우이면 보다 더 정확하다.

3) CV가 0에 가까울때(또는 N_r이 다른 고객종류의 母集團보다 매우 큰 경우)

$$\frac{N_r}{(M+N-1)\ D_{br}} \leq X_r(N) \leq \frac{N_r}{(M+N-1)D_{mr}} \quad \cdots\cdots(11)$$

앞으로는 (9), (10) 및 (11)식의 上限界를 각각 X_r: BJB+(N), X_r: IBJB+(N), X_r: SBJB+(N)로 표시하여 사용한다.

5. 適用例題

두가지 例를 들어 前述한 限界式 선정방법을 입증해 보기로 하는데, 첫째 例는 기준의 타당성을 보인 것이고, 두번째 例는 그와 같은 기준을 적용하지 않을 경우 誤謬가 발생한다는 것을 보이기 위한 것이다.

例-1) 負荷量들이 $D_{11}=0.9$, $D_{12}=0.9$, $D_{21}=0.1$, $D_{22}=1.0$인 두 종류의 고객이 있고 작업장도 두개인 간단한 네트워크를 고려하자. 작업량이 $N=(N_1, N_2)=(2, 3)$인 경우 出力率 限界를 구하자.

$R_{01}=1.0000$, $D_{a1}=0.5000$, $D_{b1}=0.9000$,
$D_{c1}=0.8200$, $D_{m1}=0.1000$, $CV_1=0.1300$
$R_{02}=1.9000$, $D_{a2}=0.9500$, $D_{b2}=1.0000$,
$D_{c2}=0.9526$, $D_{m2}=0.9000$, $CV_2=0.0740$

따라서 종류 1의 고객은 (9)식을 그리고 종류 2의

고객은 (11)식을 적용한다. (9)식에 의한 종류 1 고객의 出力率 限界는

$$0.4347 < X_1(N) < 0.667$$

되며, (11)식을 적용하여 얻어진 종류 2 고객의 出力率 限界는

$$0.5085 < X_2(N) < 0.555$$

이고 MVA에 의한 정확한 출력률은 $X_2(N)=0.538$이다. 이때 종류 2 고객의 出力率 限界를 구하는 식으로 (9)식의 上限界를 이용한다면 上限値가 0.526이 나와서 (9)식의 적용은 타당치 못하다. 數値에서 알 수 있듯이 $X_2(N)$의 上限界는 정확하나 $X_1(N)$의 上限界는 정확하지 못하므로, (9)식의 BJB下限界를 이용하는 CBM방법을 적용하면 CV>1일때 매우 정확한 上限界 X_1 : CUB+(N)을 얻을 수 있으므로 이 방법을 이용하자. X_1 : CUB+(N)를 구하기 위해 (8)식을 적용하면 0.603이 나온다.

敏感度 分析을 하기 위해 前述한 네트워크와 같이 $N_2=3$으로 고정시키고 $N_1=1, 2, \cdots, 10$으로 변화시키면서 종류 1 고객의 出力率 限界의 변화를 조사하여 圖式化하면 그림 1과 같다.

〈예 2.〉

작업장	고객종류별 負荷量		
	D_{i1}	D_{i2}	D_{i3}
1	1.0	0.6	0.7
2	0.6	0.3	1.0
3	0.4	0.4	1.2

로 負荷量이 주어지고 $N=(N_1, N_2, N_3)=(2, 3, 3)$인 CQN을 고려해 보자.

$R_{01}=2.0000$, $D_{a1}=0.6700$, $D_{b1}=1.0000$,
$D_{c1}=0.7600$, $D_{m1}=0.4000$, $CV_1=0.5270$
$R_{02}=1.3000$, $D_{a2}=0.4330$, $D_{b2}=1.6000$,
$D_{c2}=0.4690$, $D_{m2}=0.3000$, $CV_2=0.3535$

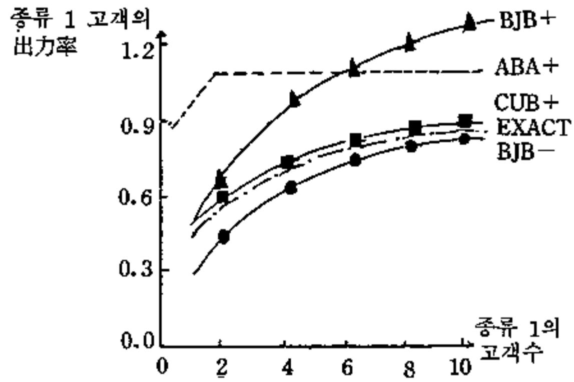

그림 1. 종류 1 고객의 出力率 限界曲線

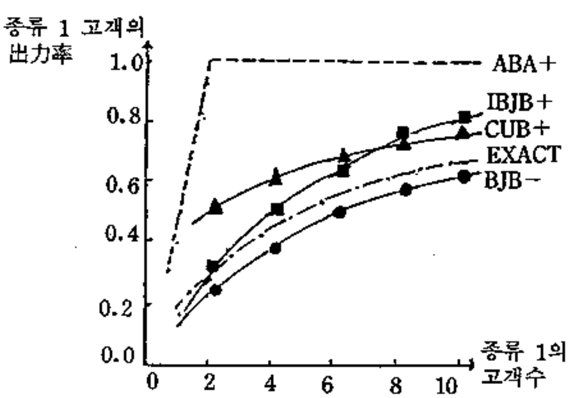

그림 2. 종류 1 고객의 出力率 限界曲線

$R_{03}=2.9000$, $D_{a3}=0.9670$, $D_{b3}=1.2000$,
$D_{c3}=1.0100$, $D_{m3}=0.7000$, $CV_3=0.2603$

고객종류 1과 2는 CV<1인 경우에 해당하므로 (10)식을 적용하고, 고객종류 3은 CV값이 0에 가까운 경우이므로 (11)식을 적용한다. $N_1=2, 4, 6, 8, 10$으로 변화시키면서 (10)식에서 限界値와 CBM에 의한 X_1 : CUB+(N)값, 그리고 MVA에 의한 $X_1(N)$을 구하여 아래와 같이 그림 2로 나타내었다.

정확한 비교를 위해 다음과 같은 表 1을 구성하였다.

表 1. 종류 1 고객의 각종 出力率 限界値

N_1	X_1 : BJB-(N) (9), (10)식의 下限界	X_1(N) 정확한 값	X_1 : SBJB+(N) (11)식의 上限界	X_1 : IBJB+(N) (10)식의 上限界	X_1 : CUB+(N) (9)식의 上限界
2	0.2222	0.2897	0.5000	0.2869	0.4870
4	0.3636	0.4513	0.8333	0.4767	0.5781
6	0.4615	0.5495	1.0700	0.6116	0.6418
8	0.5333	0.6147	1.2500	0.7124	0.6886
10	0.5882	0.6615	1.3890	0.7905	0.7248

表 1에서 알 수 있듯이 CV<1일 때 $N_1=2$인 경우, 다른 고객종류의 母集團이 상대적으로 커서 (10)식을 적용하면 실제 정확한 값보다도 上限界가 오히려 작아서 타당치 못하다. 따라서 (8)과 (11)식의 上限界만이 이용될 수 있다. 이에 대해서는 4節의 限界式의 選定基準에서도 언급하였다. 그러나 $N_1>3$이면 (10)식을 이용하는 것이 가장 정확한 限界를 얻을 수 있다. N_1이 커지면 커지수록 X_1 : CUB+(N)도 매우 정확해진다. 그리고 고객종류 3의 CV는 0에 가깝고 N_3만을 변화시키는 경우 모든 종류들에서 (11)식만이 정확한 限界를 얻을 수 있고, N_3가 커지면 (9)와 (10)식을 적용할 수 있다.

6. 결 론

CQN 模型은 시스템 性能評價의 주요한 도구로써 이용되어 왔다. 이 模型의 정확한 解는 단지 乘法型 (BCMP) 네트워크의 경우에만 알려져 있다. 몇가지 개발된 계산 알고리즘을 이용하여 네트워크의 出力率을 구하기도 하지만, 이와 같은 정확한 값들 대신에 上下限界들을 導出하는 것으로 충분할 경우가 있다. 이 限界들을 정확한 解를 구하는 것에 비해 매우 간단하며 계산량도 극히 적으므로 그동안 BCMP 네트워크의 出力率 限界들을 구하기 위한 여러 방법이 개발되어 왔다. 本 硏究에서는 먼저 이들 각 방법을 비교 분석하여 上下限界에 영향을 주는 주요한 要因이 각 고객종류의 母集團 크기와 負荷量에 대한 變動係數라는 사실을 알아내었다. 보다 정확한 上下限界를 구하기 위한 基準과 節次를 제시하였으며, 그 결과로 매우 정확한 限界値를 얻을 수 있었다.

References

[1] Baskett, F., Chandy, K. M., Muntz, R. R., and Palacios, F. G., "Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers", *J. ACM*, Vol. 22, No. 2(1975), pp. 248-260.

[2] Dallery, Y., "An improved balanced job bound analysis of closed queueing networks", *Operations Research Letters*, Vol. 6, No. 2(May 1987), pp. 77-82.

[3] Eager, D. L. and Sevcik, K. C., "Performance bound hierarchies for queueing networks", *ACM Trans. Computer Systems*, Vol. 1, No. 2 (1983), pp. 99-115.

[4] Kerola, T., "The composite bound method for computing throughput bounds in multiple class

environments", *Performance Evaluation*, Vol. 6, No. 1(1986), pp. 1-9.

[5] Kriz, J., "Throughput bounds for closed queueing networks", *Performance Evaluation*, Vol. 4, No. 1(1984), pp. 1-10.

[6] Lazowska, E. D., Zahorjan, J., Graham, G. S., and Sevcik, K. C., *Quantitative System Performance: Computer System Analysis Using Queueing Network Models*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1984).

[7] Little, J. D. C., "A proof of the queueing formula: L=λW", *Operations Research*, Vol. 9 (1961), pp. 383-387.

[8] Reiser, M. and Lavenberg, S. S., "Mean-value analysis of closed multichain queueing networks", *J. ACM*, Vol. 27, No. 2(1980), pp. 313-322.

[9] Zahorjan, J., Sevcik, K. C., Eager, D. L., and Galler, B., "Balanced job bound analysis of queueing networks", *C. ACM*, Vol. 25, No. 2 (Feb. 1982), pp. 34-41.