Journal of the KSQC
Vol. 19, No. 2, Dec.1991

1991년 12월 韓國品質管理學會誌 제19권 제2호

차별 벌과금과 공통납기를 고려한 흐름작업 일정 계획에 관한 연구
A study on Flow Shop Scheduling Problems with Different Weighted Penalties and a Common Due Date.

이 정 환* 노 인 규*

Abstract

This paper is concerned with the flow shop schduling problems considering different weighted penalty costs for earliness and lateness, and a common due date. The objective of the paper is to develop an efficient heuristic scheduling algorithm for minimizing total penalty costs and for determining the optimal common due date. The postitional weight index and, the product sum method are used.
A numerical example is given for illustrating the proposed algorithm.

1. 서 론

생산일정 계획 문제는 오랜기간 전부터 많은 사람들의 관심을 끌고 있으며, 연구의 대상이 되어왔다[1,2]. 지금까지 대부분의 생산일정계획 문제는 작업총처리시간(makespan), 평균처리시간(mean flow time) 및 순수납기 지연(tardiness)을 최소화하는 문제를 취급하였다. 납기 문제에서도 순수납기지연에 의거한 수행측도로

* 동의대 산업공학과
** 한양대 산업공학과

평균납기지연(average tardiness), 최대납기지연(maximum tardiness)과 또한 순수납기지연 작업수(number of tardy jobs)등에 대한 연구가 이루어져 왔다. 그런데 이와 같은 수행척도에서는 작업이 조기완료되는 경우 재고유지비용, 제품의 진부성 등에 의한 비용을 고려하지 않았다.

그러나 근래에 와서는 일본 도요다 자동차 시스템인 적시 적정생산체제(JIT)의 보급에 따라 작업을 일찍 완료하더라도 납품을 못하고, 납기일까지 보관하는 경우가 많다. 이와 같은 경우 조기완료비용을 고려한 생산일정계획 문제도 많이 다루어지고 있다 [3, 4].

따라서 본 연구는 공통납기를 갖는 흐름생산(flow shop)시스템에서 조기완료 및 납기지연 비용을 고려한 생산일정계획 문제에서 비용을 최소화하는 공통납기 결정 및 생산일정을 구하고자 한다.

생산완료시간의 분산을 최소화하는 문제는 Merten과 Muller[5], Schrage[6], Eilon과 Chowdhury[7]에 의해서 연구가 시작되었다. Sidnery[8]는 단일기계의 생산일정계획문제에서 처음으로 조기완료 및 납기지연비용을 고려하였다. Kanet[9]는 공통의 납기와 순서계획을 다룬 MAL(Mean Absolute Lateness)의 단일기계문제를 제시했으며, Bagchi et al.[10, 11]는 계속해서 이를 수리적으로 입증하였다. Hal[12]은 단일기계와 복수기계에서 완료시간 편차의 최소화 문제를 다루었으며, Prabddha et al. [13]와 Emmons[14]는 공통납기를 가진 복수기계의 경우를 다루었다. Chung-Yee Lee et al[15]는 단일기계에서 순수납기지연 작업수와 조기완료 및 납기지연 벌과금을 최소화하는 문제를 다루었다. 그러나 현재까지의 연구는 단일기계 및 병열기계에서 조기완료 납기지연을 고려한 생산일정계획 문제를 다루어 왔다. 본 연구는 공통납기를 가진 특수한 경우의 흐름생산(flow shop)시스템에서 조기완료 및 납기지연에 대한 균일한 가중치를 부여한 것과는 달리 가중치가 다른 경우를 대상으로 하였다. 또 작업중 지연(between-job delay)을 WIP(work-in-process)로 고려하여 이를 조기완료 비용에 포함시켜 조기완료 및 납기지연 비용을 최소화하는 공통납기 및 생산일정순서를 구하고자 한다.

제2장 문제의 정의에서는 모델전개를 위한 부호설명 및 전제조건을 기술했으며, 제3장에서는 수학적 모델설정과 그 해법을 제시했으며, 수치예를 들고, 제4장에서는 결론을 유도하였다.

2. 문제의 정의

2.1 부호설명

본 연구에서 모델전개를 위한 부호는 다음과 같이 정의한다.

$N = \{1, 2, \cdots, \}$: n개의 독립된 집합

P_J : 작업 J의 작업 시간(processing time), $J \in N$

R_J : 작업 J의 출발시간(starting time)

C_J : 작업 J의 가공완료시간(completion time), $J \in N$

d : 공통납기

$B = \{ J \mid C_J \leq d \}$: 조기완료된(early completed) 작업의 집합

$A = \{ J \mid C_J > d \}$: 지연된 작업(tardy jobs)의 집합

$n_1 = | B |$

$n_2 = | A |$

단 $| B |$, $| A |$는 집합 B, A의 갯수(cardinalty)를 나타냄

[J] : 집합 B에서 J번째 집합

(J) : 집합 A에서 J번째 집합

W_b : 집합 B의 작업에 대한 가중치

W_a : 집합 A의 작업에 대한 가중치

f(x)=최종기계에서 발생한 조기완료/납기지연의 벌과금합

f'(x)=공정중의 대기발생에 의한 벌과금합

F(x)=최종기계 및 공정중의 벌과금 합

I(J)=j번째 기계의 대기시간

t_{ji}= i번째 기계에서 j번째 작업시간

2.2 전제조건

본 연구에서 고려하는 흐름작업의 일반적인 전제조건은 다음과 같다[2].

(1) 첫번째 기계에서의 모든 작업은 시간 '0'에서 처리 가능하다.

(2) 각 작업은 m개 공정으로 구성되며, 각 공정은 각기 다른 기계에서 처리된다.

(3) 공정의 준비기간은 작업순서에 독립적이며, 가공시간에 포함된다.

(4) 작업의 내용은 사전에 알려져 있다.

(5) m개의 다른 기계는 계속적으로 이용 가능하다.

(6) 개별공정은 도중에 중단됨이 없이 처리된다.

(7) 마지막 기계 마지막 작업을 기준으로 backward 방식으로 일정계획한다.

본 연구는 다음의 목적식을 최소화하는 일정계획 S를 구하는 것이다.

$$Z(S) = \sum_{J=B} W_b | C_j - d | + \sum_{J=A} W_a | C_j - d | \cdots\cdots (1)$$

공통납기를 고려한 일정계획에 대한 해법의 개발을 위한 일정계획의 기본적인 성질에 대하여 요약하며 다음과 같다 [9,10,11,16,18,19].

정리 1(P1) 최적일정계획에서 B내에서의 작업은 LPT(Longest Processing Time)순으로 나열되며, $R_j \geq d$인 작업은 SPT순서로 나열된다. 이와 같은 결과에 따른 일정계획은 V자 모양의 최적일정을 형성한다.

정리 2(P2) $d \leq P1$이면 SPT순서가 최적이다. 만약 $W_b < W_a$이면 $d \leq (P_1 + P_2)/2$에 있어서 SPT순서가 최적이다.

정리 3(P3) 작업의 최적 순서집합에서 이들 중 한 작업의 완료시간이 납기 d와 일치하는 최적일정이 존재한다.

정리 4(P4) 만약 B에 속한 작업이 WLPT (Weighted Largest Processing Time) 순서로 나열되면, $P_{[1]}/W_{[1]} \geq P_{[2]}/W_{[2]} \geq \cdots \geq P_{[n1]}/W_{[n1]}$이고, A에 속하는 작업은 WPST(Weighted Shortest Processing Time) 순서로 나열된다면, $P_{(n2)}/W_{(n2)} \leq P_{(n2-1)}/W_{(n2-1)} \leq \cdots \leq P_{(1)}/W_{(1)}$이 된다.

정리 5(P5) 만약 독립된 작업의 갯수 n이 짝수이면 $n_1 = n_2$

(즉 $| B | = | A |$)이고 n이 홀수이면 $n_1 = n_2 + 1$

(즉 $| B | = | A | + 1$)이 되어 이 값에서 공통납기의 위치 [d]가 결정된다.

이런 일정계획은 가중치가 부여된 단일 기계의 공통납기와 일정계획 문제에 있어서 V자 모양의 LPT, SPT로 배치된 최적일정계획을 형성한다.

3. 수학적 모델설정 및 해법

3.1 수학적 모델

(1) 최종기계에서의 생산일정계획

WMAD(Wekghted Mean Absolute Deviation)문제는 NP-complete문제이지만, 다음과 같은 2가지 경우로 나누면 최적일정계획은 다항적 시간(polynomial time)으로 구할 수 있다 [13].

① 모든 작업에 대한 모든 가중치가 동일하다.

$W_j = k$(상수), $j \in N$

② 조기완료와 납기지연된 작업이 서로 다른 가중치를 가진다.

$W_j = W_b,\ j \in B$

$W_j = W_a,\ j \in A$

예 1. $W_j = k$(상수), $j \in N$

이 경우에 식 (1)의 목적식은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$Z(S) = \sum_{j \in B} k(j-1)P_{[j]} + \sum_{j \in A} K \cdot j \cdot P_{(j)} \quad \cdots(2)$$

식 (2)의 일정계획문제의 목적식은 2 개의 똑같은 수를 서로 곱(parirwise product)하여 합으로 정식화할 수 있다. 하나의 집합은 작업 매개변수 (즉 작업시간)과 다른 하나는 작업특성과는 독립적인 위치가중치(positional weight)의 집합이므로 해답은 쉽게 구할 수 있다. 즉 함수의 최소값은 가장 큰 작업시간과 가장 작은 위치가중치를 서로 짝지우며 (matching), 그 다음 두번째로 큰 작업시간과 두번째로 작은 위치 가중치를 서로 짝짓기해서 얻을 수 있다. 목적식은 이와같은 곱의 합(product-sum) 형태이며, 그 해는 최대-최소 짝짓기(largest-to-smallest matching) 방식의 해답을 가진다.

만약 작업시간이 비증가순서(nonincreasing)로 ($P_1 \geq P_2 \geq \cdots \geq P_n$)과 같이 나열된다면 작업 1은 첫번째 (가중치=0)로 일정계획되어야 하며, 작업 2와 3은 두번째와 마지막 번째로 서로 순서에 관계없이 일정계획된다.

가중치가 같은 쌍이 많을 때에는 $2^{[n/2]}$의 대체적인 최적일정계획을 가진다[12].

예 2. $W_j = W_b, J \in B$ and $W_j = W_a,\ j \in A$

이 경우에는 작업이 조기완료되는 집합 B에 대해서는 동일한 가중치 W_b와 납기지연이 된 작업집합 A에 대해서는 동일한 가중치 W_a를 서로 다르게 가지기 때문에 식(1)의 목적식은 다음과 같이 된다.

$$Z(S) = \sum_{j \in B} W_b(j-1)P_{[j]} + \sum_{j \in A} W_a \cdot j \cdot P_j \quad \cdots(3)$$

식 (3)은 Panwalker et al. (1982)이 다룬 최소가중편차(minimal weighted deviation) 문제와 동일하게 된다.

예를 들어 만약 $W_b=1$, $W_a=3$이라고 하면 10개의 작업에 대한 위치가중치는 (0,1,2,3,4, 15,12,9,6,3)로 계산된다. 그러므로 가장 큰 3개의 작업은 LPT순서로 처음에 처리되며, 작업 4와 5는 4번째와 마지막에 처리될 수 있다.

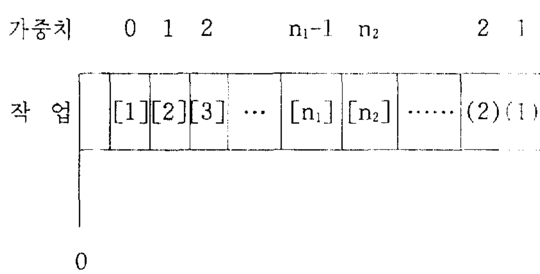


그림 1. 위치가중치

(2) 지연의 종류

이 흐름생산은 특수한 경우의 것으로 몇 가지 제약조건을 갖는 주문생산과 같은 것이다. 모든 작업은 동일한 설비를 이용하여야 한다. 또한 각 작업은 동일한 순서로 이들 설비를 통하여 처리되어야 하며, 하나의 작업은 현재 작업중인 설비에서 마칠때 가지는 다음 설비에서 처리될 수 없다.

이와같은 흐름작업에서의 지연은 다음과 같이 3 가지가 있다.[17].

① 초기지연(run in delay) (ⓐ) : 작업 시작시 첫번째 기계에서 작업중 다음 기계에 작업물이 도착되지 않아서 발생하는 대기

② 작업중지연(between job delay) (#) : 기계와 기계사이에서 작업시간의 균형이 맞지 않아서 발생하는 대기

③ 말기지연(run out delay) (*) : 마지막 작업이 마지막 기계에서 작업중일 때 그 앞의 기계에 작업이 없어서 발생하는 대기

본 연구에서는 두번째 지연인 작업중지연(between-job delay)을 고려 대상으로 하였다. 이를 나타내면 그림2와 같다.

M1	J1	J2		J3	*	
M2	ⓐ	J1	#	J2	J 3	*
M3	ⓐ	J1	#	J 2	#	J3

그림 2. 흐름작업에서 지연형태 예

(3) 공정중 지연

아래의 그림과 같이 2 대의 기계에 작업이 계획되면 공정중 지연값은 다음과 같이 계산한다.

M1	t_{11}	…	$I_{(n-3)}$	$t_{(n-2)}$	$I_{(n-2)}$	$t_{(n-1)}$	$I_{(n-1)}$	$t_{(n)1}$	(n)
M2		…	$t_{(n-3)2}$		$(n-2)2$		$(n-1)2$		(n)

그림 3. 공정중 지연 예

여기서 I의 값을 계산하면 다음과 같다.

$$I_{(n)}=t_{(n)2}$$

$$I_{(n-1)}=\max\,[0,\ t_{(n)2}+t_{(n-1)2}-t_{(n)1}-I_n]_n$$

$$I_{(n-2)}=\max\,[0,\ t_{(n)2}+t_{(n-1)2}+t_{(n-2)2}-t_{(n)1}-t_{(n-1)1}-I_n-I_{(n-1)}]$$

$$I_{(j)}=\max\sum_{i=j}^{n}t_{(i)2}-\sum_{j=j+1}^{n}t_{(i)1}-\sum_{j=j+1}^{n}I_{(1)}],\ \text{if } j=1,2,\cdots,n-1$$

$$I_{(n)}=I_{(2)2}\qquad ,\text{if } j=n$$

3.2 해법

단계 1 기계 M_2에서 V−Shape 순서로 작업을 순서화한다.

1−1 W_b, W_a 값을 고려한 위치가중치를 계산한다.

1−2 작업시간이 가장 긴 것과 위치가중치가 가장 적은 것을 짝짓고, 곱의 합(product sum)이 최소가 되도록 작업을 순서화한다.

단계 2 기계 M_1에서도 M_2와 똑같은 작업순서로 하여 기계 M_1, M_2에서 공정중 지연시간을 고려한 일정계획을 역순으로 수립한다.

기계 M_1에서의 첫번째 작업의 시작시간을 '0'으로 보정한다.

단계 3 단계 2의 순서화에 의거한 공통납기(d*)를 결정한다.

단계4 기계M_1에서공정중지연에대한벌과

금을 계산한다.

단계 5 기계 M_2에서 공통납기에 따른 벌과금을 계산한다.

단계 6 지연시간 및 납기에 따른 최종 벌과금을 계산한다.

3.3 수치 예

본 알고리즘의 해법에 대한 수치에는 다음과 같다.

작업	1	2	3	4	5
t_{j1}	3	5	1	6	7
t_{j2}	9	5	5	9	8

단계 1 기계 M_2에서 V-모형 순서로 한다.

정리 5에 의거하여 공통납기는 5개의 작업인 경우 3번째 작업을 마칠 때이다.

1.1 W_b, W_a를 고려한 위치가중치

가중치가 동일한 경우

0 1 2 3 1

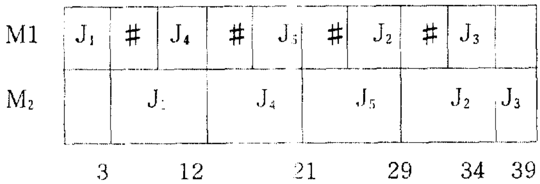
$W_b=1$, $W_a=3$으로 가정했을 경우의 위치가중치

0 1 2 6 3

1.2 작업시간과 위치가중치를 고려한 작업순서화

1- 4- 5- 2- 3

단계 2 기계 M_1에서 첫작업의 시작시간을 '0'으로 Gantt chart에 그리면 다음과 같다 (#=작업중지연).



단계 3 공통납기결정

$d^*=29$

단계 4 기계 M_1에서의 지연시간

$I_{[5]} = t_{[5]2} = 5$

$I_{[4]} = \max\{0, t_{[5]2}+t_{[4]2}-t_{[5]1}-I_5\}$

$= \max\{0\ 5+5-1-5\} = 4$

$I_{[3]} = \max\{0, t_{[5]2}+t_{[4]2}+t_{[3]2}-t_{[5]1}-t_{[4]1}-I_5-I_4\}$

$= \max\{0,\ 5=5=8-1-5-5-4\}$

$= 3$

$I_{[2]} = \max\{0, t_{[5]2}+t_{[4]2}+t_{[3]2}+t_{[2]2}-t_{[5]1}-t_{[4]1}-I_{[3]1}-I_5-I_4-I_3\}$

$= \max\{0,\ 5+5+8+9+1-5-7-5-4-3\}$

$= 2$

$I_{[1]} = \max\{0, t_{[5]2}+t_{[4]2}+t_{[3]2}+t_{[1]2}+t_{[2]2}-t_{[5]1}-t_{[4]1}-t_{[3]1}-t_{[4]1}-I_5-I_4-I_3-I_2\}$

$= \max\{0,\ 5=5=8=9=9=-1-5-7-6-5-4-3-2\} = 3$

$f'(X)=\sum I_j= 3+2+3+4 = 12$

단계 5 기계 M_2에서 공통납기에 대한 벌과금

식 (1)에 의거하여

$f(X=(8+17)=3(5+10)=25+45=70$

단계 6 $F(X)= f'(X)+f(X)=12+70=82$

4. 결 론

본 연구소에서는 차별 벌과금과 공통납기를 고려한 흐름 생산시스템의 일정계획 문제에 대하여 효율적인 발견적 기법의 알고리즘을 개발하였다.

각 작업의 순서를 정하기 위하여 작업시간과 위치가중값의 곱의 합(Product sum)을 최소화하는 방법으로 작업순서를 정하였다. 이 순서에 의거하여 공통납기도 결정한다.

JIT의 개념에 따라 납기일까지 보관납품의 경우 조기벌과금과 납기지연에 따른 벌과금에 차등을 두었으며, 각 작업사이에 발생하는 지연은 조기벌과금에 포함시켜 총비용을 최소화하는 작업순서를 구하였다.

본 연구는 2 대의 기계를 배치한 흐름작업 형태이므로 보다 많은 기계를 배치한 흐름작업 형태에 대한 고찰도 필요하다고 하겠다.

References

1.Conway, R. W., Maxwell, W. L. and Miller, L.W.(1967), *Theory of Scheduling*, Addison Wesley, Messachusetts.

2. Baker, K. R.(1974), *Introduction to Sequencing and Scheduling*, Wiley, New York.

3. Christy, D. P. and Kanet, J.J.(1990), "*Manufacturing Systems with Forbidden Early Shipment*," Int. J. Prod. Res., 28 − 1, pp. 91 − 100.

4. Scudder, G. d. and Hoffmann, T. R.(1989), "*The Use of Value−based Priorities When Early Shipments are forbidden*," Int. J. Prod, Res., 27,2, pp. 353 − 369

5. Merten A. G. and Muller, M. E.(1972), "*Variance Minimization in Single Machine Sequencing Problems*," Management Science, 18, 9, pp. 518 − 528.

6. Schrage L. (1975), "*Minimizing the Time − in − System Variance for a Finite Jobset*," Management Science, 21, 5, pp. 540 − 543.

7. Eilon. S. and Chowdhury, I. G.(1977), "*Minimizing Waiting Time Variance in the Single Machine Problem*," Management Science, 23, 6, pp. 567 − 575.

8. Sidney, J. B.(1977), "*Optimal Single Machine Scheduling with Earliness and Tardiness Penalties*," Operations Research, 25, 1, pp. 62 − 69.

9. Kanet, J.J.(1981), "*Minimizing the Average Deviation of Job Completion Time about a Common Due Date*," Naval Research Logistics Quarterly, 28, 4, pp. 643 − 651.

10. Bagchi, U., Chang, Y.L. and Sullivan, R.S. (1987)., "*Minimizing Absolute and Squared Deviations of Complete Time wkith Different Earliness and Tardiness Penalties and a Common Due Date*," Naval Research Logistics Quarterly, 34, pp. 739 − 751.

11. Bagchi, U. jChang, Y. L. and Sullivan, R.S.(1986), "*Minimizing Mean Absolute Deviation of Completion Time about a Common Due Date*," Naval Research Logistics Quarterly, 33, pp. 227 − 240.

12. Hall, N. G.(1986), "*Single − and Multiple − Processor Models for Minimizing Completion Time Variance*," Naval Research Logistics Quarterly, 33, pp.49 − 54.

13. Prabuddha De, Ghosh, J. B. and Wells, C.E.(1990), "*Con. Due–Date Determination and Sequencing*," Computer OR, 17, 4, pp. 333–342.

14. Emmons, H.(1987), "*Scheduling to a Common Due Date on Parallel Uniform Processors*," Naval Research Logistics Quarterly, 34, pp. 803–810.

15. Lee, C. Y., Danusaputro, S.R. and Lin, jC.S.(1991), "*Minimizing Weighted Number of tardy jobs and weighted earliness–tardiness penalties about a common due date*," Computer OR, 18, 4, pp. 379–389.

16. Panwalker, S. S. Smith, M. L., and Seidman, A.(1982), "*Common Due Date Assignment to MInimize Total jPenalty for the One Machine Scheduing Problem*," Operations Research, 30, 2, pp. 391–399.

17. King, J. R. and Spachis, A. S.(1980), "*Heuristics for flow shop scheduling*," Int. J. Prod. Res., 18, 3, pp. 345–357.