

# 자동차 배출가스보증시험에 다변수 축차검사의 적용에 관한 연구+ (Multivariate Sequential Rectifying Inspection with Applicability to the Motor Vehicle Emission Certified Test)

조 재 립\*

## ABSTRACT

Currently the problem of air pollution caused by the motor vehicle emission is one of the most serious problems to be solved. Thus we needed the inspection method and technical innovation constraining the motor vehicle emission. In order to establish the more reasonable certified test, the multivariate sequential rectifying inspection plan designed in this paper has been applied to the domestic vehicles by analyzing the statistic characteristics of the emission distribution.

This inspection method is designed to satisfy the evaluation measure constraining domestic vehicle emission, and it serves the defect rectifying system and performance certification of catalytic converts. As the prior parameter for the domestic vehicles, we used the data for the catalytic converts which passed the certified test excuted by the EPK. For the case of engine test, we used those data which passed the certified test of domestic vehicles. The multivariate sequential rectifying inspection plan of the vector parameter is able to minimize the average sample number and increase the pass probability of operating characteristic curve.

+ 본 논문은 경희대학교 국제교류위원회의 해외과건교수 연구비에 의해 수행하였음

\* 경희대학교 공과대학 산업공학과 교수

As a result it can be proved that this inspection plan is the optimal sequential rectifying inspection costs economically and is to be used effectively for the certified test constraining the injurious gasses of motor vehicles.

## 1. 서 론

자동차 배출가스에 의한 대기오염은 큰 문제점으로 대두되고 있다. 우리의 생활수준이 향상되면서 자동차의 보유대수는 급증하고 있으나 보다 더 좋은 환경의 질에 대한 욕구는 더욱 강하게 나타나기 때문에 자동차 배출가스의 방지대책은 강구되어야 한다.

지금까지의 자동차 배출가스의 저감기술은 엔진내에서의 방지기술로서 공연비의 제어, 점화시기의 제어, 흡, 배기계 등의 엔진 개선 등에 의하여 달성할 수 있었으나 1987.7.1부터 적용되는 배출가스 규제기준을 만족시키기 위해서는 기존의 엔진 내에서의 방지기술 만으로는 목표를 달성할 수 없으므로 배출가스 방지장치가 추가로 부착되고 있다.

이는 삼원촉매장치를 사용해서 오염물질을 정화시키는 후처리장치의 부착이 불가피하게 되어 현재에 이르고 있다[20]. 삼원촉매장치는 배기가스 중의 HC는 파리듬과 CO는 백금 촉매에 의해 산화되어 무해한 탄산가스와 물로 만들며 NOx는 로듐촉매에 의해 질소로 환원시키는 기능을 가진 정화장치로서 촉매가 제기능을 발휘하기 위해서는 정확한 공연비가 요구되므로 배출가스 중의 산소농도를 산소검출기로 검지하여 기화기에 피드백시켜 공연비를 조절하는 전자장치가 필요하게 되었다. 또한 여기서 사용되는 귀금속 촉매는 납이나 인에 의하여 심한 피독현상을 나타내며 촉매의 기능이

저하되므로 무연휘발유의 사용이 필연적이다. 따라서 배출가스 방지장치의 내구도, 성능보증, 결함시정과 같은 새로운 제도를 도입하여 차량의 구분 및 측정방법을 변경해야만 한다.

이러한 새 규정에 의해 사용하고져 하는 측정방법은 LA-4모드 및 Transient Test모드로서 도시의 대표적인 실 주행모드이며 미국환경보호청(EPA)에서 사용하는 측정방법이다. [14]. 이들 모드는 평균차속, 가속도율, 아이들링시간, 평균주행거리 및 측정조건이 다르기 때문에 측정치의 직접적인 비교는 어려우나 우리나라 환경청(EPK)은 휘발유 및 LPG 가솔린차(승용차)배출가스 방지장치의 내구도 80,000km(약 50,000mile)를 요구하고 있다. 즉 자동차가 80,000km주행 후에도 HC는 0.438 g/km, CO는 2.74 g/km, NOx는 0.718 g/km의 표준치를 만족해야만 한다[18]. 또한 배출가스장치의 내구도와 관련하여 배출가스를 감소할 목적으로 부착된 장치의 성능보증기간을 자동차 제작자가 정하고 이 기간내에 배출가스 허용기준을 만족시키지 못하여 차량 소유자가 환경보존법이나 도로운송차량법 등에 의하여 벌금 등의 제제조치를 받을 경우 장치의 결함을 소유자의 비용부담없이 시정해 주어야 하며 운행중인 자동차의 상당대수가 적절히 정비, 유지되고 있지만 환경보존법 시행규칙에서 정하는 배출가스 농도기준에 적합하지 않다고 환경청이 판단하는 경우 차량제작자는 차량소유자의 비용부담없이 결함을 시정해 주어야 한다는 결함시정 제도가 도입되고 있다[19].

따라서 본 논문에서는 자동차 배출가스 정화 장치의 성능을 보증하기 위한 보증시험에 축차 검사의 원리를 이용하여 다변수 축차검사 계획의 이론을 정립 및 개발하고 보증시험 데이터와 내구성시험 데이터를 응용하여 개발된 다변수 축차검사의 성능과 효과를 분석하고자 한다.

## 2. 다변수 축차검사 계획

새 자동차가 배출가스 정화장치의 보증기간 동안 배출가스의 표준규제치를 초과하지 않음을 보증하는 보증시험(certified test)은 우리나라 환경청이 그 시험절차를 수립하여 시행하도록 고시하고 있다[17]. 따라서 환경청은 생산된 차량을 유사한 배출특성을 가진 엔진그룹으로 분류하여 그 대표차량 승용차에 대해 80,000km의 주행시험으로 각 엔진그룹의 엔진 열화율(Deterioration Factor=DF)을 결정하고 고속주행과 저속주행 비율을 결정하여 측정된 저속주행비에 DF를 적용하여 그 이후에도 표준규제치(S)이하가 되도록 성능을 보증하게 된다[16]. 따라서 각 승용차의 엔진그룹에 대하여 배출가스 시험을 수행하기 위해 다변수 축차검사의 로트를 결정하면 이 로트로 부터 배출가스시험을 수행한 승용차에 대해 합격, 불합격의 판결과 다시 다른 차량을 시험할 것인가 혹은 시험하지 않고 나머지 차량을 합격시킬 것인가 또는 불합격시킬 것인가를 결정하는 축차적인 검사절차를 통해 의사결정을 하게 된다[3].

본 논문에서 시도하는 다변수 축차검사의 로트가 n개의 검사차량으로 구성되었다고 하면

그 검사특성치는  $W_1, \dots, W_i, \dots, W_n$ 으로 놓을 수 있다. 그러면 이 확률변수는 서로 독립이고 이들의 평균치(M)에 대한 분포가 사전분포로 존재한다고 하자. 또한 각 차량은 배출가스에 대한 표준치를 갖고 있으며 이들이 측정오차로 인해 i번째 검사차량은 시험결과치  $Y_i \neq W_i$ 가 되고 기준치(T)를 도입하여 보면 확률 변수 Y에 대한 결과는 다음과 같이 표기할 수 있다.

$Y_i > T$ 일 확률은  $P(W_i > S/Y_i = y_i)$ 로 나타낼 수 있으며  $W_i, Y_i, M$ 의 확률변수가 정규분포를 한다면  $W_i \sim N(w/M, \eta)$ ,  $Y_i \sim N(y/w_i, \epsilon)$ ,  $M \sim N(m/\mu, r)$ 로 표기할 수 있다. 따라서  $Y_i = y_i$  라는 실측치는  $W_i$ 에 직접적인 정보를 제공하며  $W_2 - W_n$ 에 대한 간접적인 정보를 제공하게 된다.

한편 다변수 축차검사비용을  $C_1: w_i < S$ 임에도 불합격된 검사차량의 비용,  $C_2: w_i > S$ 임에도 합격된 검사차량의 비용,  $C_3$ : 단위당 검사비용이라고 하자. 그러면  $W_i$  확률변수는 다변수 정규분포의 경우로 변환하여 배출가스의 각 검사항목에 대한 참품질은 벡터값을 갖는 다변수로 표기할 수 있다. 즉  $\underline{W}_i (i=1, \dots, n)$ 이라 하면

$$\underline{W}_i = \begin{pmatrix} W_{i1} \\ \vdots \\ W_{it} \\ \vdots \\ W_{in} \end{pmatrix}$$

따라서  $\underline{W}_i$ 는 서로 독립이며 다변수 정규분포를 하는 확률변수이므로 이들의 평균 벡터  $\underline{M}$ 은

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_t \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}$$

이고  $\underline{W}_i$ 의 정밀도 매트릭스는  $\underline{\eta}$ 이다. 또한 측정된 시험결과치를  $\underline{Y}_i$ 라 하면

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{1i} \end{pmatrix}$$

이 되며  $Y_i$ 는 서로 독립이고 다변수 정규분포를 하는 확률변수로 평균이  $\underline{w}_i$ 이고  $\underline{\epsilon}$ 의 정밀도 매트릭스를 갖는다.

다음으로  $\underline{M}$ 에 대한 사전분포의 값으로 평균이  $\underline{\mu}$ 이고 정밀도 매트릭스가  $\underline{\tau}$ 임을 알고 있다면  $f(\underline{w}:\underline{m})$ ,  $h(\underline{y}:\underline{m})$ 와  $g(\underline{m})$ 는 다변수 정규분포의 밀도함수가 된다.

한편  $\underline{W}_i$ 에 대해 표준치  $\underline{S}$ 가 존재한다면

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_i \end{pmatrix}$$

여기서 검사차량  $i$ 는 만일  $W_{ij} > S_j (j=1, \dots, \ell)$ 이면 불합격된다.

또한 기준치  $\underline{T}$ 가  $Y_i$ 에 대해 존재한다면

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_i \end{pmatrix}$$

이다. 만약 어떤  $j$ 에 대해서  $Y_{ij} = y_{ij}$ 이고  $y_{ij} > T_j$ 라면 검사차량은 불합격된다.

여기서  $t(\underline{y}:\underline{m})$ 는  $\underline{M} = \underline{m}$ 일때 시험결과치  $Y_i$ 의 밀도함수라 하면 평균  $\underline{m}$ 와 정밀도 매트릭스  $\underline{\tau} = \underline{\epsilon}^{-1}(\underline{\epsilon} + \underline{\eta})^{-1}\underline{\eta}$ 를 갖게 된다.

따라서 검사로트의 평균  $\underline{m}$ 의 사후밀도함수는  $g(\underline{m}:\underline{y})$ 이고 평균이  $(\underline{\tau} + \underline{r})^{-1}(\underline{\tau}\underline{\mu} + \underline{r}\underline{y})$ 이고 정밀도 매트릭스  $\underline{\tau} + \underline{r}$ 를 갖는 다변수 정규분포를 한다[6].

이때 고정비  $C_1$ 은 모든 품질기준  $\ell$ 에 대해 표준치 이내에 있음에도 불합격되는 비용으로 보고, 고정비  $C_2$ 는 모든 품질기준  $\ell$ 에 대해 표준치보다 큼에도 합격되는 비용으로 하며,  $C_3$ 는 검사차량을 검사하는 고정검사비용으로 하

면 다변수 측차점사절차에 의한 Bayes의 위험은 다음과 같이 기능방정식의 순환함수로 표기된다[7].

$$\rho_k(g(\underline{m})) = \min\{K r_0(g(\underline{m})), r_1(g(\underline{m})) + E y[\rho_{k-1}(g(\underline{m}:\underline{Y}))] + C_3\}, \quad (1)$$

( $K=1, \dots, n$ )

여기서;  $\rho_k(g(\underline{m})) = K$ 개의 검사차량이 검사를 받기 위해 남아 있을 때의 Bayes의 위험;  $r_0(g(\underline{m})) =$ 검사없이 차량을 합격시킬 위험;  $r_1(g(\underline{m})) =$ 검사차량을 검사한 후 합격시킬 것인가 또는 불합격시킬 것인가를 판정할 위험.

이 다변수 정규분포의 경우  $r_0$ 와  $r_1$ 의 함수는  $\bar{r}_0$ 와  $\bar{r}_1$ 로 대체할 수 있으며 여기서

$$\bar{r}_0(\underline{a}, \underline{b}) = r_0(N(\underline{X}:\underline{a}, \underline{b})),$$

$$\bar{r}_1(\underline{a}, \underline{b}) = r_1(N(\underline{X}:\underline{a}, \underline{b})),$$

이고 여기서  $N(\underline{X}:\underline{a}, \underline{b})$ 는 평균이  $\underline{a}$ 이고 정밀도 매트릭스  $\underline{b}$ 를 갖는  $\ell$ 변수 정규분포의 밀도함수이다.

마찬가지로  $\rho_k$ 함수는  $\bar{\rho}_k$ 함수로 대체할 수 있으며 여기서

$$\bar{\rho}_k(\underline{a}, \underline{b}) = \rho_k(N(\underline{X}:\underline{a}, \underline{b}))$$

이다. 결과적으로 Bayes의 최적위험함수는

$$\bar{\rho}_k(\underline{\mu}, \underline{\tau}) = \min\{K \bar{r}_0(\underline{\mu}, \underline{\tau}), \bar{r}_1(\underline{\mu}, \underline{\tau}) + E y \cdot [\bar{\rho}_{k-1}((\underline{\tau} + \underline{r})^{-1}(\underline{\tau}\underline{\mu} + \underline{r}\underline{y}), \underline{\tau} + \underline{r})] + C_3\}. \quad (2)$$

( $K=1, \dots, n$ )

여기서  $\bar{r}_0$ 와  $\bar{r}_1$ 은 다음에서 계산해 보겠다.

### 3. $\bar{r}_0$ 의 계산

다변수 분포의 문제에서 검사없이 한 검사차

량을 합격시키는데 수반되는 위험  $r_0$  함수는 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$r_0(g(\underline{m})) = C_2 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{m} [1 - \int_{-\infty}^{s_1} \dots \int_{-\infty}^{s_\ell} d\underline{w} f(\underline{w}; \underline{m})] g(\underline{m})$$

$$= C_2 [1 - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{m} \int_{-\infty}^{s_1} \dots \int_{-\infty}^{s_\ell} d\underline{w} f(\underline{w}; \underline{m})] g(\underline{m}). \quad (3)$$

여기서  $C_2$  비용은  $i$ 점사차량에 대해  $\underline{W}_i \leq \underline{S}$  ( $\underline{W}_i$ 와  $\underline{S}$ 각 쌍에 대해)인 바로전 검사 항목과 동일한 확률값을 갖는 비용으로  $\underline{W}_i$ 와  $\underline{S}$ 의 모든 값에 적용된다. 다변수 정규분포의 밀도함수  $f$ 와  $g$ 는 다음과 같다

$$f(\underline{w}; \underline{m}) = (2\pi)^{-s} |\underline{\eta}|^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} (\underline{w} - \underline{m})' \underline{\eta} (\underline{w} - \underline{m})\right],$$

$$g(\underline{m}) = (2\pi)^{-t} |\underline{\tau}|^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} (\underline{m} - \underline{\mu})' \underline{\tau} (\underline{m} - \underline{\mu})\right].$$

이 두 밀도함수를 곱하면

$$f(\underline{w}; \underline{m}) g(\underline{m}) = (2\pi)^{-t} |\underline{\eta} \underline{\tau}|^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} [(\underline{w} - \underline{m})' \underline{\eta} (\underline{w} - \underline{m}) + (\underline{m} - \underline{\mu})' \underline{\tau} (\underline{m} - \underline{\mu})]\right\}.$$

여기서 지수항만 분리하면

$$-\frac{1}{2} [\underline{w}' \underline{\eta} \underline{w} + \underline{m}' \underline{\eta} \underline{m} - \underline{w}' \underline{\eta} \underline{m} - \underline{m}' \underline{\eta} \underline{w} - \underline{m}' \underline{\tau} \underline{m} + \underline{\mu}' \underline{\tau} \underline{\mu} - \underline{m}' \underline{\tau} \underline{\mu} - \underline{\mu}' \underline{\tau} \underline{m}].$$

$\underline{\eta}$ 와  $\underline{\tau}$ 가 대칭이므로 지수항을 다시 정리하면

$$-\frac{1}{2} [\underline{w}' \underline{\eta} \underline{w} + \underline{\mu}' \underline{\tau} \underline{\mu} + \underline{m}' (\underline{\eta} + \underline{\tau}) \underline{m} - 2 \underline{m}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})]$$

만일  $(\underline{\eta} + \underline{\tau})$ 가 양의 값으로 정의되고  $\underline{C}$ 가 복수 매트릭스라면  $\underline{C}' (\underline{\eta} + \underline{\tau}) \underline{C} = \underline{I}$  (여기서  $\underline{I}$ 는 단위 매트릭스)이면  $\underline{X} = \underline{C}' \underline{m}$  ( $\underline{m} = \underline{C} \underline{X}$ )가 되어 다음과 같이 대체할 수 있다.

$$\underline{m}' (\underline{\eta} + \underline{\tau}) \underline{m} = \underline{X}' \underline{C}' (\underline{\eta} + \underline{\tau}) \underline{C} \underline{X} = \underline{X}' \underline{X}$$

이 변형된 야코비안 매트릭스  $\underline{C}$ 의 절대값은  $|\underline{C}|$ 로 놓을 수 있으며 따라서 지수항은 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$-\frac{1}{2} [\underline{w}' \underline{\eta} \underline{w} + \underline{\mu}' \underline{\tau} \underline{\mu} + \underline{X}' \underline{X} - 2 \underline{X}' \underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})].$$

지수항을 완성하면

$$-\frac{1}{2} [\underline{w}' \underline{\eta} \underline{w} + \underline{\mu}' \underline{\tau} \underline{\mu} - [\underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})] [\underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})] + \underline{X}' \underline{X} - 2 \underline{X}' \underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu}) + [\underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})] [\underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})]]$$

$$= -\frac{1}{2} \{ \underline{w}' \underline{\eta} \underline{w} + \underline{\mu}' \underline{\tau} \underline{\mu} - [\underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})] [\underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})] + [\underline{X} - \underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})] [\underline{X} - \underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})] \}.$$

고로  $\bar{r}_0$ 는 다음과 같다.

$$\bar{r}_0(\underline{\mu}, \underline{\tau}) = C_2 [1 - \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{x} \int_{-\infty}^{s_1} \dots \int_{-\infty}^{s_\ell} d\underline{w} \text{mod} |\underline{C}| (2\pi)^{-t} |\underline{\eta} \underline{\tau}|^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \{ \underline{w}' \underline{\eta} \underline{w} + \underline{\mu}' \underline{\tau} \underline{\mu} - [\underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})] [\underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})] + [\underline{X} - \underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})] [\underline{X} - \underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})] \} \right\}]$$

$$= C_2 [1 - (2\pi)^{-t/2} |\underline{\eta} \underline{\tau}|^{1/2} \text{mod} |\underline{C}| \int_{-\infty}^{s_1} \dots \int_{-\infty}^{s_\ell} d\underline{w} \exp\left\{-\frac{1}{2} \{ \underline{w}' \underline{\eta} \underline{w} + \underline{\mu}' \underline{\tau} \underline{\mu} - [\underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})] [\underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})] \} \right\}]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{x} \exp\left\{-\frac{1}{2} [\underline{X} - \underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})] [\underline{X} - \underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})]\right\},$$

적분한 두번째 항은  $(2\pi)^{t/2}$  감소하게 되며, 만일  $(2\pi)^{-t/2}$ 씩 일정한 값을 곱하면  $\ell$  변수의 확률밀도 함수는 평균 벡터값이  $\underline{C}' (\underline{\eta} \underline{w} + \underline{\tau} \underline{\mu})$ 이고 매트릭스 정밀도  $\underline{I}$ 를 갖는 전체 구간을 적분한 값과 일치하게 된다.

윗 식을 간단히 표기하면

$$\bar{r}_0(\underline{\mu}, \underline{\tau}) = C_2 [1 - (2\pi)^{-t/2} |\underline{\eta} \underline{\tau}|^{1/2} \text{mod} |\underline{C}|$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{s_1} \cdots \int_{-\infty}^{s_1} d\mathbf{w} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\{\mathbf{w}'\hat{\eta}\mathbf{w} + \underline{\mu}'\hat{\tau}\underline{\mu} - [\underline{C}'(\hat{\eta}\mathbf{w} + \hat{\tau}\underline{\mu})][\underline{C}'(\hat{\eta}\mathbf{w} + \hat{\tau}\underline{\mu})]\right\}\right\},$$

또한 지수항은 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$-\frac{1}{2}\left[\mathbf{w}'\hat{\eta}\mathbf{w} + \underline{\mu}'\hat{\tau}\underline{\mu} - (\hat{\eta}\mathbf{w} + \hat{\tau}\underline{\mu})'\underline{C}'(\hat{\eta}\mathbf{w} + \hat{\tau}\underline{\mu})\right]$$

$\underline{C}$ 를 고려하여 환원하면

$$(\underline{C})'(\hat{\eta} + \hat{\tau})\underline{C} = \underline{I}$$

$$(\underline{C})^{-1}\underline{C}'(\hat{\eta} + \hat{\tau})\underline{C}\underline{C}^{-1} = (\underline{C})^{-1}\underline{I}\underline{C}^{-1}\underline{I}\underline{C},$$

$$\text{즉, } \hat{\eta} + \hat{\tau} = (\underline{C})^{-1}\underline{C}^{-1} = (\underline{C}\underline{C})^{-1}.$$

$$\text{고로 } \underline{C}\underline{C}' = (\hat{\eta} + \hat{\tau})^{-1}.$$

이 결과를 지수항에 대체하면

$$-\frac{1}{2}\left[\mathbf{w}'\hat{\eta}\mathbf{w} + \underline{\mu}'\hat{\tau}\underline{\mu} - [(\hat{\eta}\mathbf{w} + \hat{\tau}\underline{\mu})]'(\hat{\eta} + \hat{\tau})^{-1}(\hat{\eta}\mathbf{w} + \hat{\tau}\underline{\mu})\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\mathbf{w}'[\hat{\eta} - \hat{\eta}'(\hat{\eta} + \hat{\tau})^{-1}\hat{\eta}]\mathbf{w} - 2\mathbf{w}'\hat{\eta}'(\hat{\eta} + \hat{\tau})^{-1}\hat{\tau}\underline{\mu} + \underline{\mu}'[\hat{\tau} - \hat{\tau}'(\hat{\eta} + \hat{\tau})^{-1}\hat{\tau}]\underline{\mu}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\mathbf{w}'[\hat{\eta}'(\hat{\eta} + \hat{\tau})^{-1}(\hat{\eta} + \hat{\tau}) - \hat{\eta}'(\hat{\eta} + \hat{\tau})^{-1}\hat{\eta}]\mathbf{w} - 2\mathbf{w}'\hat{\eta}'(\hat{\eta} + \hat{\tau})^{-1}\hat{\tau}\underline{\mu} + \underline{\mu}'[\hat{\tau}'(\hat{\eta} + \hat{\tau})^{-1}(\hat{\eta} + \hat{\tau}) - \hat{\tau}'(\hat{\eta} + \hat{\tau})^{-1}\hat{\tau}]\underline{\mu}\right]$$

마지막 표기에  $(\hat{\eta} + \hat{\tau})^{-1}(\hat{\eta} + \hat{\tau})$  항이 두 곳에 있다.

그래서  $\hat{\eta} = \hat{\eta}'$ 와  $\hat{\tau} = \hat{\tau}'$ 가 됨을 이용하여 다음과 같이 식을 줄일 수 있다.

$$-\frac{1}{2}\left\{(\mathbf{w} - \underline{\mu})'\hat{\eta}'(\hat{\eta} + \hat{\tau})^{-1}\hat{\tau}(\mathbf{w} - \underline{\mu})\right\}.$$

마지막으로  $\text{mod}|C|$ 를 고려하고 다음 사실에 의거하여

$$\underline{C}'(\hat{\eta} + \hat{\tau})\underline{C} = \underline{I},$$

$$|C| \cdot |\hat{\eta} + \hat{\tau}| \cdot |C| = |I|.$$

$$\text{그러나 } |C| = |C| \cdot |I| = 1,$$

고로

$$|C|^{-2} = \frac{1}{|\hat{\eta} + \hat{\tau}|}$$

따라서

$$\text{mod}|C| = |\hat{\eta} + \hat{\tau}|^{-1/2}$$

그러면  $r_0$ 는

$$\bar{r}_0(\underline{\mu}, \underline{\tau}) = C_2 \left\{1 - (2\pi)^{-t/2} \left(\frac{|\hat{\eta}\hat{\tau}|}{|\hat{\eta} + \hat{\tau}|}\right)^{1/2}\right.$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{s_1} \cdots \int_{-\infty}^{s_t} d\mathbf{w} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{w} - \underline{\mu})'\hat{\eta}'(\hat{\eta} + \hat{\tau})^{-1}\hat{\tau}(\mathbf{w} - \underline{\mu})\right]\left. \right\}.$$

가 되어 평균벡터  $\underline{\mu}$ 와 정밀도 매트릭스  $\hat{\eta}'(\hat{\eta} + \hat{\tau})^{-1}\hat{\tau}$ 의  $l$ -변수 규정분포 밀도함수를 포함하게 된다.

#### 4. $\bar{r}_1$ 의 계산

다변수문제에서  $r_1$ 에 대한 식을 유도하기 위해서는 다음 관계식을 고려해야 한다.

$$r_1 = C_1 \cdot P[\underline{W}_i \leq S/Y_i \leq \underline{T}] + C_2 \cdot P[\underline{W}_i \leq S/Y_i \leq \underline{T}]$$

여기서 두번째 항은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_2 \cdot P[Y_i \leq \underline{T}] \cdot \{1 - P[\underline{W}_i \leq S/Y_i \leq \underline{T}]\} = C_2 \cdot \{P[Y_i \leq \underline{T}] - P[Y_i \leq \underline{T}/\underline{W}_i \leq S]\}.$$

따라서  $r_1$ 에 대해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r_1(g(\underline{m})) = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{m}$$

$$\int_{-\infty}^{s_1} \cdots \int_{-\infty}^{s_t} d\mathbf{w} g(\underline{m}) f(\mathbf{w}; \underline{m}) \left[1 - \int_{-\infty}^{T_1} \cdots \int_{-\infty}^{T_t} dy\right]$$

$$h(\underline{y}; \underline{w}) + C_2 \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{m} g(\underline{m})$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{w}\right]$$

$$f(\underline{w}; \underline{m}) \int_{-\infty}^{T_1} \cdots \int_{-\infty}^{T_t} d\underline{y} h(\underline{y}; \underline{w}) - \int_{-\infty}^{S_1} \cdots \int_{-\infty}^{S_t} d\underline{w}$$

$$f(\underline{w}; \underline{m}) \int_{-\infty}^{T_1} \cdots \int_{-\infty}^{T_t} d\underline{y} h(\underline{y}; \underline{m}).$$

(5)식에서  $\bar{r}_0$ 을 구할 때와 같이

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{m} g(\underline{m}) f(\underline{w}; \underline{m})$$

$$= (2\pi)^{-t/2} \left( \frac{|\underline{\eta}\underline{\tau}|}{|\underline{\eta} + \underline{\tau}|} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2}(\underline{w} - \underline{\mu})' \underline{\eta}' (\underline{\eta} + \underline{\tau})^{-1} \underline{\tau} (\underline{w} - \underline{\mu}) \right].$$

만약,

$$h(\underline{y}; \underline{w}) = (2\pi)^{-t/2} |\underline{\epsilon}|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\underline{y} - \underline{w})' \underline{\epsilon} (\underline{y} - \underline{w}) \right],$$

라 하면

$$\bar{r}_0(\underline{\mu}, \underline{\tau}) = C_1 \int_{-\infty}^{S_1} \cdots \int_{-\infty}^{S_t} d\underline{w} (2\pi)^{t/2} \left( \frac{|\underline{\eta}\underline{\tau}|}{|\underline{\eta} + \underline{\tau}|} \right)^{1/2}$$

$$\exp \left[ -\frac{1}{2}(\underline{w} - \underline{\mu})' \underline{\eta}' (\underline{\eta} + \underline{\tau})^{-1} \underline{\tau} (\underline{w} - \underline{\mu}) \right].$$

$$\left\{ 1 - \int_{-\infty}^{T_1} \cdots \int_{-\infty}^{T_t} d\underline{y} (2\pi)^{-t/2} |\underline{\epsilon}|^{-1/2} \exp \right.$$

$$\left. \left[ -\frac{1}{2} (\underline{y} - \underline{w})' \underline{\epsilon} (\underline{y} - \underline{w}) \right] \right\} + C_2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{w} \right.$$

$$(2\pi)^{-t/2} \left( \frac{|\underline{\eta}\underline{\tau}|}{|\underline{\eta} + \underline{\tau}|} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2}(\underline{w} - \underline{\mu})' \underline{\eta}' (\underline{\eta} + \underline{\tau})^{-1} \underline{\tau} (\underline{w} - \underline{\mu}) \right]$$

$$\int_{-\infty}^{T_1} \cdots \int_{-\infty}^{T_t} d\underline{y} (2\pi)^{-t/2} |\underline{\epsilon}|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\underline{y} - \underline{w})' \underline{\epsilon} (\underline{y} - \underline{w}) \right]$$

$$- \int_{-\infty}^{S_1} \cdots \int_{-\infty}^{S_t} d\underline{w} (2\pi)^{-t/2} \left( \frac{|\underline{\eta}\underline{\tau}|}{|\underline{\eta} + \underline{\tau}|} \right)^{1/2}$$

$$\exp \left[ -\frac{1}{2}(\underline{w} - \underline{\mu})' \underline{\eta}' (\underline{\eta} + \underline{\tau})^{-1} \underline{\tau} (\underline{w} - \underline{\mu}) \right]$$

$$\int_{-\infty}^{T_1} \cdots \int_{-\infty}^{T_t} d\underline{y} (2\pi)^{-t/2} |\underline{\epsilon}|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\underline{y} - \underline{w})' \underline{\epsilon} (\underline{y} - \underline{w}) \right].$$

$(\underline{y} - \underline{w}) \underline{\epsilon} (\underline{y} - \underline{w}) \right]$ .

따라서  $C_2$ 를 곱한 두번째 항은 다음과 같이 단순화 할 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{T_1} \cdots \int_{-\infty}^{T_t} d\underline{y} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{w} (2\pi)^{-t/2}$$

$$\left( \frac{|\underline{\eta}\underline{\tau}|}{|\underline{\eta} + \underline{\tau}|} \right)^{1/2}$$

$$\exp \left[ -\frac{1}{2}(\underline{w} - \underline{\mu})' \underline{\eta}' (\underline{\eta} + \underline{\tau})^{-1} \underline{\tau} (\underline{w} - \underline{\mu}) \right]$$

$$(2\pi)^{-t/2} |\underline{\epsilon}|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\underline{y} - \underline{w})' \underline{\epsilon} (\underline{y} - \underline{w}) \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{T_1} \cdots \int_{-\infty}^{T_t} d\underline{y} (2\pi)^{-t/2}$$

$$\exp \left[ -\frac{1}{2} (\underline{y} - \underline{\mu})' \underline{\epsilon}' (\underline{\alpha} + \underline{\epsilon})^{-1} \underline{\alpha} (\underline{y} - \underline{\mu}) \right],$$

$\bar{r}_0$ 의 추정에서와 같이

$$\underline{\alpha} = \underline{\eta}' (\underline{\eta} + \underline{\tau})^{-1} \underline{\tau}.$$

그러면  $\bar{r}_1$ 은 다음과 같다.

$$\bar{r}_1(\underline{\mu}, \underline{\tau}) = C_1 (2\pi)^{-t/2} |\underline{\epsilon}|^{-1/2} \int_{-\infty}^{S_1} \cdots \int_{-\infty}^{S_t} d\underline{w}$$

$$\exp \left[ -\frac{1}{2}(\underline{w} - \underline{\mu})' \underline{\alpha}' (\underline{w} - \underline{\mu}) \right]$$

$$\cdot \left\{ 1 - (2\pi)^{-t/2} |\underline{\epsilon}|^{-1/2} \int_{-\infty}^{T_1} \cdots \int_{-\infty}^{T_t} d\underline{y} \right.$$

$$\exp \left[ -\frac{1}{2} (\underline{y} - \underline{w})' \underline{\epsilon} (\underline{y} - \underline{w}) \right] \right\} +$$

$$C_2 \left\{ (2\pi)^{-t/2} \left( \frac{|\underline{\alpha}\underline{\epsilon}|}{|\underline{\alpha} + \underline{\epsilon}|} \right)^{1/2} \right.$$

$$\int_{-\infty}^{T_1} \cdots \int_{-\infty}^{T_t} d\underline{y}$$

$$\exp \left[ -\frac{1}{2} (\underline{y} - \underline{\mu})' \underline{\epsilon}' (\underline{\epsilon} + \underline{\alpha})^{-1} \underline{\alpha} (\underline{y} - \underline{\mu}) \right] -$$

$$(2\pi)^{-t/2} |\underline{\alpha}|^{-1/2} |\underline{\epsilon}|^{-1/2} \int_{-\infty}^{S_1} \cdots \int_{-\infty}^{S_t} d\underline{w}$$

$$\int_{-\infty}^{T_1} \cdots \int_{-\infty}^{T_t} d\underline{y}.$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(w-\mu)\alpha(w-\mu)+(y-w)\epsilon(y-w)}{\dots}\right]\right\} \quad (6)$$

이라 놓으면 이 점도 합격이나 불합격의 기준 평면이 된다. 따라서 이 관계식은 다음 결과를 얻게 된다.

### 5. 최적의 합격, 불합격 판정기준

최적의 합격, 불합격의 판정역은 평면형태로 나타나게 되며 그 형태에 따라 판정위험을 최소화할 수 있기 때문에 합격, 불합격의 기준이 최적이지 아닌 것에 대해서도 잘 검토해 볼 필요가 있다. 때문에 전체적인 검사결과는 부분적인 최적검사계획이 될 수 있으며 최적의 합격, 불합격에 대한 형태를 어떻게 결정하느냐 하는 문제가 발생하게 된다.

어떤 검사항목이 바로 검사되고 그 결과치  $Y=y$ 가 관측되었다고 하자. 이때 그 검사항목이 불합격될 위험은  $C_1$ 의 비용을 포함하게 되고 그 검사항목의 품질  $W$ 가 표준치  $S$ 에 적합한 확률을 갖게 된다.

즉,  $C_1P[W \leq S/Y=y]$ 의 값을 갖게 되고 그 검사항목을 합격시킬 위험은  $C_2$ 의 비용을 갖게 되고 그 검사항목의 품질  $W$ 가  $S$ 와 다른 확률 값을 갖게 된다.

즉,  $C_2P[W \leq S/Y=y]$ 의 값을 갖게 된다.

이 방법을 확산해 보면 어떤 검사결과치  $y^*$ 에 대해

$$C_2P[W \leq S/Y=y^*] = C_1P[W \leq S/Y=y^*]$$

라 놓으면 이것은 바로 어떤 검사항목을 합격시키거나 불합격시키지도 않는 무관심점이 된다. 그 다음 어떤 기준치  $T$ 에 대해서도

$$C_1P[W \leq S/Y=T] = C_2P[W \leq S/Y=T]$$

$$P[W \leq S/Y=T] = \frac{C_2}{(C_1+C_2)} \quad (7)$$

여기서  $T$ 값은 다변수 측차검사계획의 검사속행역과는 무관하게 되며 그들은 독립적으로 결정된다. 실제로 한 검사항목을 시험하여 결정하게 되는 최적의 합격, 불합격역이 된다. 이 최적합격, 불합격의 기준평면은(7)식에 대한 모든  $T$ 를 발견하는 일이다. 다변수 정규분포에 대해 이 기준평면을 발견하는 일은  $T_0$ 의 계산 방법을 사용할 수 있다. 어떤 검사항목이 다변수 정규분포를 하는 경우 평균 벡터  $\mu$ 와 매트릭스 정밀도  $\alpha$ 를 갖는  $W$ 의 사전분포가 주어지면

$$\alpha = \eta(\eta + \tau)^{-1}\tau$$

여기서  $\mu$ 와  $\tau$ 는 문제의 검사항목을 시험하기전 로트의 평균품질분포  $M$ 의 모수이다. 시험이 끝난 후 이 검사항목은 그 품질분포의 검사결과치가 다르게 나타난다. 만일 검사결과치  $y$ 가 얻어졌다면 이들의 사후분포는 다변수 정규분포의 경우 평균벡터는  $(\alpha + \epsilon)^{-1}(\alpha\mu + \epsilon y)$ 이고 매트릭스 정밀도는  $\alpha + \epsilon$ 가 된다[6].

이것은  $Y=T$ 로 주어지는 경우  $W$ 는 다변수 정규분포로 평균벡터  $(\alpha + \epsilon)^{-1}(\alpha\mu + \epsilon y)$ 와 매트릭스 정밀도  $\alpha + \epsilon$ 를 갖게 된다. 이렇게 필요한 모든 정보는  $T$ 의 최적값에 대해(7)식의 해를 구하는데 이용된다. 또한 이것은 2변수 정규분포의 경우 여러 모수값의 조합에 따라 계산할 수 있다. 그 결과 Fig.1과 Fig.2를 그릴 수 있다.



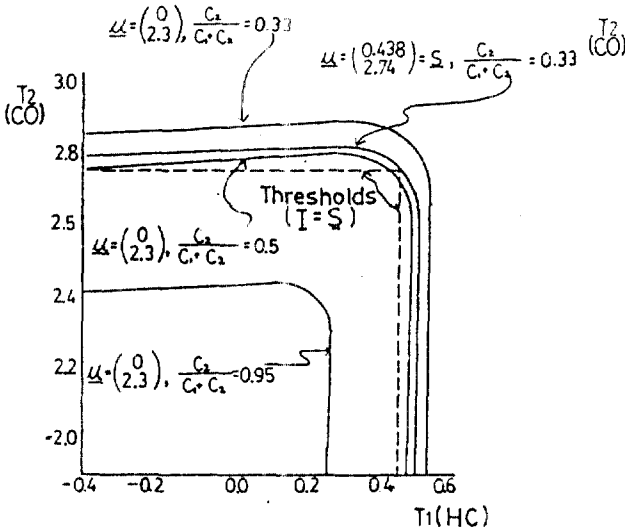


Fig. 1 Optimal Pass-Fail Thresholds Using Automotive Emissions Data

이 자동차 배출가스 데이터는 일반적으로 사용되는 탄화수소(HC)와 일산화탄소(CO)에 관계된 값을 사용하였다. 특히 다음 데이터를 일반화한 것이 Fig.1이다.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 4.4 & -0.40 \\ -0.40 & 2.2 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 111.0 & -41.1 \\ -41.1 & 38.6 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0.438 \\ 2.74 \end{pmatrix}.$$

$\mu_{C_1, C_2}$ 에 대해 사용된 값은 Fig.1에 적었다. 여기서 몇개의 사전 평균과 비용을 최적 기준치의 그래프로 나타내었다. 바로 그 기준은( $T=S$ ) 환경정의 기준으로 생각 할수 있다. 그래서 기준평면은 최적기준평면과 같게되나 실제로는 표준치(S)와 다른 경우도 있다. 이것은  $\mu$ 의 값이 변화하고  $C_2/(C_1+C_2)$ 의 비가 변화하기 때문이다. 또한 그림에 나타나지 않았지만 검사모트에서 검사항목수가 변함에 따라  $\alpha$ 값이 변하게 되며 이 값은 기준평면을 형성하게 된다.

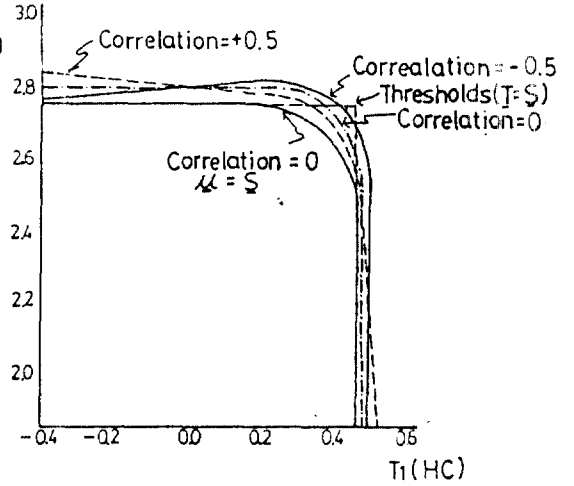


Fig. 2 Effect of Correlation in Prior Distribution on Optimal Pass-Fail Thresholds

Fig.2는 최적기준 평면의 형태에 따라 사전 분포에서의 상관관계를 알아볼 수 있다. 이 그림은 다음 데이터를 사용하였다

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 66.7 & 0 \\ 0 & 23.3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0.438 \\ 2.74 \end{pmatrix}, \quad \frac{C_1}{(C_1+C_2)} = 0.5,$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.3 \end{pmatrix}$$

$\alpha$ 의 값은 사전분포의 상관계수 값을 0, -0.5, -0.5로 되도록 다음 값을 취했다.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 4.4 & 0 \\ 0 & 2.2 \end{pmatrix}$$

기준평면은 (1)  $C_2/(C_1+C_2) = 0.5$  (2) 상관관계 "0" (3) 사전평균  $\mu$ 가 S와 같게 되면 최적기준 평면이 된다.

따라서 다변수 정규분포의 경우에 대해 요약 하면 다음과 같다.

- (1) 최적합격, 불합격역의 평면은 Fig.1에서 상자플 평면으로 나타나며 최적기준평면은 표준치 S와 같지 않을수 있다.

- (2) 한 로트를 검사하면  $\underline{M}$ 분포에 대한 평균과 정밀도가 변화하기 때문에 최적기준은 변화한다.
- (3)  $\bar{r}_i$ 은 (6)식에 의해 표기되며  $\underline{T}$ 에 대한 최적치를 사용하지 않으면 검사없이 나머지 로트를 합격시키는 경우보다 다시 검사를 수행하도록 할 위험은 더욱 커지게 된다. 따라서 최적합격, 불합격역을 사용하면 평균검사수를 줄일수 있다.
- (4) 자동차 배출가스 분제에서 규제조건을 일정하게 사용하여 정책적으로 또는 실제적으로 제시되고 있는 것은 최적기준 평면을 구하기 위한 수단이다.

## 6. 배출가스 보증시험에 적용

다변수 측차검사에 대한 배출가스 보증시험을 응용하기 위해 앞절의 이론을 근거로 하고 배출가스의 특성은 우리나라 환경청의 규제기준을 참조한다. 또한 적용된 데이터는 환경청의 내구성시험 데이터와 배출보증시험 데이터이다. 데이터의 내용에 따라 우리나라의 3개 자동차회사(A,B,C)의 승용차들은 엔진의 종류별로 반드시 환경청의 배출보증시험에 합격하기 위해 각각 3가지 공해요인에 대해 평균 배출비의 참값이 표준치(S)를 통과해야만 한다.

따라서 이에 적용된 자동차에 대한 배출비의 자연대수 벡터  $i(i=1, \dots, n)$ 가  $\underline{W}_i$ 로 표시할 수 있다.

$$\underline{W}_i = \begin{pmatrix} W_{i1} \\ W_{i2} \\ W_{i3} \end{pmatrix},$$

여기서 두번째 첨자 1은 탄화수소(HC)의 배출비이고, 2는 일산화탄소(CO)이며, 3은 산화질소(NOx)를 뜻한다. 벡터 $\underline{W}_i$ 는 서로 독립이고

다변수 정규분포의 확률벡터이며 평균벡터 $\underline{M}$ 의 확률변수이다.

따라서

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix},$$

공분산은 개략적으로 같다고 가정하면  $\underline{W}_i$ 에 대한 정밀도 매트릭스의 불편추정치는 다음과 같다.

$$\underline{\eta} = \begin{pmatrix} 23.6 & -7.51 & -8.67 \\ -7.52 & 9.85 & 6.53 \\ -8.67 & 6.53 & 30.2 \end{pmatrix}.$$

여기서  $f(\underline{w}; \underline{m})$ 을 다변수 정규확률밀도함수로 놓으면  $\underline{W}_i$ 가  $\underline{Y}_i$ 라는 시험결과치로 계산되었다면

$$\underline{Y}_i = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ y_{i3} \end{pmatrix},$$

그리고  $Y_{ij}$ 는  $i$ 자동차에 대한  $j$ 공해요인의 배출비를 자연대수 값으로 측정한 결과치라 하자.

그러면  $\underline{Y}_i$ 는 평균벡터  $\underline{W}_i$ 를 갖는 다변수 정규분포로 그 정밀도 매트릭스는 다음과 같다.

$$\underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} 111.0 & -41.1 & 0 \\ -41.1 & 38.6 & 0 \\ 0 & 0 & 227.3 \end{pmatrix}$$

여기서  $h(\underline{y}; \underline{w})$ 도 다변수 정규확률밀도함수가 되며 이는 엔진의 종류에 따라 자연대수의 평균치  $\underline{M}$ 가 사전분포로 정규분포를 한다. 또한 엔진에 대한 내구성시험은 이 사전분포의 모수값을 합리적으로 설정하는데 이용되기 때문에 내구성시험 데이터는 엔진의 종류에 따라 선택된다. 따라서 내구성 시험데이터는 다음과 같이 사전분포의 모수값을 알아내는데 사용된다[15].

$W_j(x)$ 는 공해요인  $j$ 에 대한 선형관계의 변화

요인(DF)이 발생하는 X-km지점이라 하자. 이때  $\Delta_j$ 는 DF에 대한 우리나라 환경청의 추정치로 다음과 같이 나타낸다.

$$\Delta_j = \max \left[ \frac{W_j(80,000)}{W_j(5,000)}, 1.0 \right]$$

$$\underline{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix}$$

그러면  $\underline{M}$ 는 다음과 같은 평균벡터 값을 갖는 다변수 정규분포를 한다[2].

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} -0.386 + 0.704 \ln W_1(5,000) - 0.677 \ln(1/\Delta_1) \\ 1.169 + 0.307 \ln W_2(5,000) + 0.0692 \ln(1/\Delta_2) \\ 0.313 + 0.344 \ln W_3(5,000) + 1.857 \ln(1/\Delta_3) \end{pmatrix}$$

그리고 매트릭스 정밀도는

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} 5.88 & 0 & 0 \\ 0 & 3.23 & 0 \\ 0 & 0 & 22.2 \end{pmatrix}$$

따라서 이러한 다변수 정규확률밀도함수는  $g(\underline{m})$ 으로 나타낸다.

한편 환경청의 표준치  $\underline{S}$ 는  $\underline{W}_j$ 와 비교하며 합격, 불합격의 기준치  $\underline{T}$ 는  $\underline{Y}_j$ 와 비교하게 된다. 본 논문에 적용된 자동차 모델에 대한 이들의 모수값은 다음과 같다.

$$\underline{S} = \underline{T} = \begin{pmatrix} 0.438 \\ 2.74 \\ 0.718 \end{pmatrix}$$

실제로 환경청은  $\underline{S}$ 와  $\underline{T}$ 의 명백한 구분을 하지 않고 있기 때문에  $\underline{S} = \underline{T}$ 로 생각한다.

또한  $t(\underline{y}; \underline{m})$ 은  $\underline{M} = \underline{m}$ 일때 시험결과치  $\underline{Y}$ 에 대한 다변수 정규확률밀도함수로 평균벡터  $\underline{m}$ 와 매트릭스 정밀도  $\underline{r} = \underline{\epsilon}'(\underline{\epsilon} + \underline{\eta})^{-1}\underline{\eta}$ 를 갖는다. 따라서  $\underline{M}$ 의 사후 밀도함수를 구하려면 사전분포의 평균은 변하지 않고 첫번째 시험된 자동차와 두번째 시험된 자동차의 실측된 배출가스의 값이 문제가 되기 때문에  $g(\underline{m}/\underline{y})$ 은 사후 밀도함수로 평균벡터는  $(\underline{\tau} + \underline{r})^{-1}(\underline{\tau}\underline{\mu} + \underline{r}\underline{y})$ 이고 매트릭스 정밀도는  $\underline{\tau} + \underline{r}$ 이다.

다변수 측차점사의 각 벡터값과 모수값이 결정되면  $C_1, C_2, C_3$ 의 비용비율에 따라  $r_0$ 와  $r$ 을 구할 수 있다.

먼저  $r_0$ 는 (4)식을  $r_1$ 은 (6)식을 다변수 정규확률을 계산하기 위한 Steck[13]의 S함수법과 2변수 정규확률을 계산하기 위한 Owen[11]의 T-함수법을 적용하고 또한 실제계산은 T함수에 대한 Daley[5]의 개략계산과 Abramowitz [1]의 단일변수의 정규확률 적분계산 방법으로 구한 결과 Fig.3과 같은 결과를 얻었다.

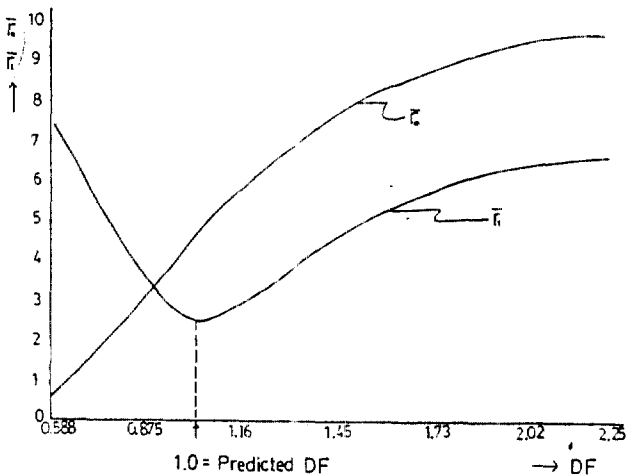


Fig. 3 Risks  $\bar{r}$  and  $\bar{r}$  of the Deterioration Factor (Single Pollutant)

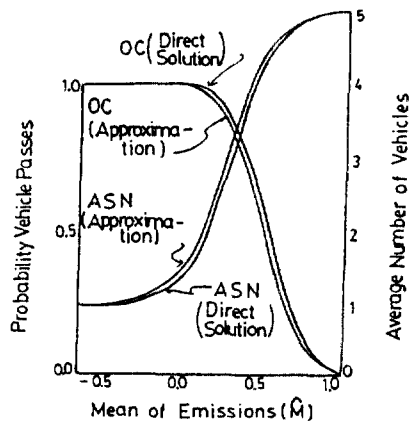


Fig. 4 Comparison of Vehicle OC and ASN for Direct Solution vs. Approximation (HC)

여기서  $\bar{r}_0$ 가 DF값에 따라 대체로 선형적으로 변화하는 반면에  $\bar{r}_1$ 은 그렇지 못하다. 더욱이 DF의 기대치와 예측값이 동일한 점에서 최소가 된다. 이는  $\bar{r}_1$ 의 예측값은 기대치보다 항상 크게 됨을 알 수 있다. 이러한 현상을 보완하기 위해서는  $C_1$ 의 값을 증가시켜야 한다.

따라서  $C_1$ 의 증가에 따라  $\bar{r}_0$ 는 영향을 받지 않으며  $\bar{r}_1$ 만 영향을 받게 된다. 고로  $C_1$ 을 증가시키면 불합격 자동차가 증가되기 때문에 다변수 측차점사에서 채택된 OC곡선과 ASN곡선을 만족할 수 있는  $C_1$ ( $C_2$ 와  $C_3$ )을 채택해야만 검사비의 경제성을 기할 수 있다[4].

다변수 측차점사에서 기능방정식의 효과적인 해는 식(1)에서와 같이 3개의 항을 계산하도록 요구하고 있다. 우선  $\bar{r}_0$ 와  $\bar{r}_1$ 을 계산하고 검사속행으로 기대되는 나머지 위험함수  $E_V(\bar{\rho}_{K-1})$ 을 구한다.

이는 검사받기 위해 남아 있는 차량의  $K-1$  단계에 대한 위험  $\bar{\rho}_{K-1}$ 을 기대위험 값으로 계산하게 되는데 이 기대치 값의 계산은 Poteus [12]의 방법을 이용하였다. Poteus는 동적계획법의 개략치 계산에서 나머지 기대위험을 계산하는 방법을 예시하고 있다. 이 개략치 계산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_V[\bar{\rho}_{K-1}(\underline{r}+\underline{r})^{-1}(\underline{r}\underline{\mu}+\underline{r}\underline{y}), \underline{r}+\underline{r}] \\ = \bar{\rho}_{K-1}[\underline{r}(\underline{r}+\underline{r})^{-1}(\underline{r}\underline{\mu}+\underline{r}\cdot E(\underline{y})), \underline{r}+\underline{r}] \\ = \bar{\rho}_{K-1}(\underline{\mu}\underline{r}+\underline{r}) \end{aligned}$$

고로  $E(\underline{y})=\underline{\mu}$ 가 된다. 따라서 Poteus는 최적 순환함수가 적절한 범위내에서 선형일때는 직접계산이 가능하며 다만  $\bar{\rho}_{K-1}(\underline{\mu}\underline{r}+\underline{r})$ 가  $\underline{\mu}$ 가 선형함수이기만 하면 된다고 주장한다. 이 개략치 계산을 확인하기 위해서는 DF가 가변성이 없고  $C_1$ 이 증가하고 있는 경우의 OC곡선과 ASN곡선을 Fig.4에 나타내었다. 탄화수소(HC)의 경우 개략치 계산값은 직접계산한 값

과 거의 일치하고 있다. CO나 NOx의 경우도 마찬가지이다.

따라서 시료의 크기  $n$ 이고 DF가  $\Delta$ 인 예전의 자동차를 검사하기 위한 다변수 측차점사의 검사속행역은 사전평균  $\underline{\mu}$ 의 함수이기 때문에  $n \leq 8$ 인 경우는 다음 값을 적용할 수 있다[9].

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{w}} = \underline{w} - \underline{\mu}, \underline{\tilde{y}} = \underline{y} - \underline{w} = \underline{y} - \underline{\tilde{w}} - \underline{\mu}, \underline{\sigma} = \underline{s} - \ell n \Delta - \underline{\mu} \\ \text{또한 상수 } \underline{K} \text{가 존재한다고 가정하면, } \underline{T} = \underline{S} + \underline{K} \text{가 된다. 여기서 } \underline{K} \text{는 } \underline{T} - \ell n \Delta - \underline{\mu} \text{에 대해 } \underline{\sigma} + \underline{K} \text{로 대체할 수 있다. 따라서 환경청은 } \underline{K} = 0 \text{에서 일치된 기준값을 택하게 된다.} \end{aligned}$$

이 관계식을 식(4)와 (6)에 대체하면  $\bar{r}_0$ 와  $\bar{r}_1$ 을 용이하게 구할 수 있다. 주의할 것은  $\underline{S}$ 와  $\Delta$ 와  $\underline{\mu}$ 는  $\underline{\sigma}$ 로 표기가 가능하며 이렇게 표기된 값이 (2)식의  $\bar{\rho}_K(\underline{\mu}\underline{r})$ 의 함수값을 구할 수 있기 때문에 만일  $\underline{\mu}^*$ 가 어떤 단계에서 연속적으로 정의된 기준평면상의 한점이라 하면  $\underline{\sigma}^* = \underline{S} - \ell n \Delta - \underline{\mu}^*$ 로 일정하게 남아 있게 되므로 최적기준평면은  $\underline{S}$ ,  $\underline{T}$ ,  $\Delta$ 에 따라 결정하게 된다.

2대의 자동차의 경우 다변수 측차점사계획을 검토해 보자. 이때 우선 한쌍의 비용비  $\underline{C}=(C_1, C_2, C_3)$ 를  $\underline{C}=(60,10,1)$ 인 경우로 Fig.5는 이에 대한 제1단계의 연속역을 표시하고 있다. 이 그림에서 각 곡선은  $\underline{\mu}$ 의 원소인 CO와 NOx에 대한 기준치와 일치하는 HC의 값을 나타내고 있다. 이 그림에서 A점은 (HC,CO,NOx)의 값이 (0.14, 2.35, 0.35)로 되고 B점은 (0.04, 2.3, 0.48)이 되며 따라서 이들은 각각 기준평면이 된다. 이처럼 사전평균  $\underline{\mu}$ 가 초기에 주어짐을 알 수 있다. 만일 2대의 자동차중 1대가 검사되어 그 결과치  $\underline{y}$ 가 관측되었다면  $\underline{\mu}$ 의 값은  $(\underline{r}+\underline{r})^{-1}(\underline{r}\underline{\mu}+\underline{r}\underline{y})$ 의 새로운 데이터가 되고  $\underline{r}$ 와  $\underline{r}$ 의 사후밀도함수  $g(\underline{m}/\underline{y})$ 에서 정의되며 매트릭스 정밀도가  $\underline{r}+\underline{r}$ 로 되는 다변수 정규확률밀도함수이다. 그러면 검사를 받기 위해 남아 있

는 자동차는  $\mu$ 의 새로운 값과 같은 검사속행역의 범위안에 들게 된다.

따라서  $\mu + \ell n\Delta$ 의 값이 나머지 차량을 검사 없이 통과하도록 하게 된다. 고로 Fig.5에서 C 점(0.14, 2.30, 0.35)과 D점 (0.04, 2.4, 0.35)은  $\mu + \ell n\Delta$ 의 검사될 차량의 평균값이 된다. 이

와같은 연속역은 Fig.6에서 다변수의 3차원 공간으로 그릴수 있다[10].

여기서  $C_1$ ;3공해요인이 표준치와 일치하는 자동차를 불합격시키는 비용, $C_2$ ;1가지 이상의 공해요인이 표준치와 일치하지 않는 자동차를 합격시키는 비용,  $C_3$ ;1대상 검사비용이 된다.

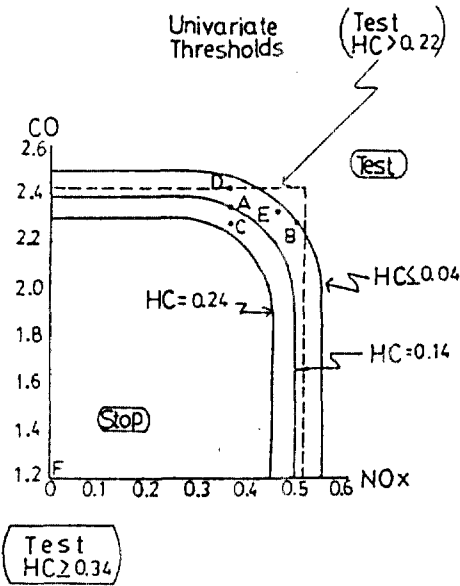


Fig. 5 Continuation Region for One-Vehicle Remaining in a Two-Vehicle (Costs = 60, 10, 1)

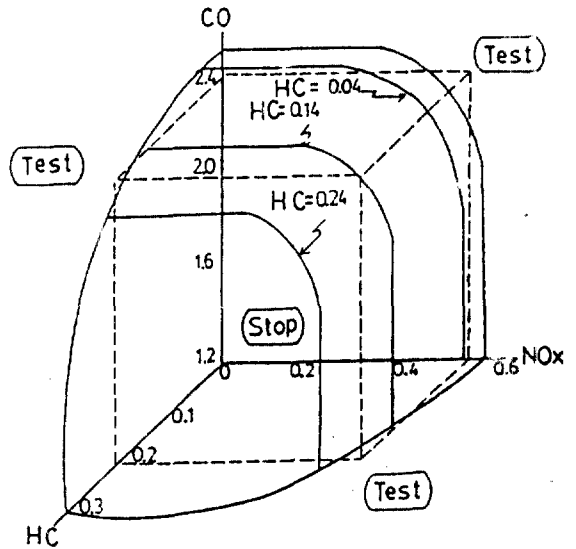


Fig. 6 Three-Dimensional of Continuation Region (One Vehicle Remaining in a Two-Vehicle: Costs= 60, 10, 1)

## 7. 결 론

본 논문에서 개발한 다변수의 벡터품질을 평가하는 다변수 축차검사의 설계는 대기오염 문제가 대두되고 있는 현시점에서 효과적으로 응용될 수 있다. 그러나 이들을 응용하기 위한 일반적인 특성은 (i)  $\bar{r}_0$ 와  $\bar{r}_1$ 을 최소로 감소시켜 좋은 로트의 품질을 불합격시키는 위험과, 나

쁜 로트의 품질을 합격시킬 위험을 줄이도록 해야 한다. (ii)경제적인 측면에서 다변수 축차 검사 계획에 따른 ASN값은 최소로 하고 OC곡선의 합격할 확률은 높게 해야 하며  $C'(C_1, C_2, C_3)$ 의 정확한 추정값이 요구된다.

(iii) 검사계획의 응용면에서는 사전분포의 변화, 비용비의 변화, 검사로트내의 품질의 변화, 다변수의 품질특성 사이에 존재하는 상관관계를

명확하게 예측할 수 있어야 한다.

이러한 일반적인 특성을 만족시키는 다변수 측차검사 계획을 유해한 자동차 배출가스를 정화시켜 대기오염 방지의 사회적인 과제의 해결에 응용한다면 그 실효를 거둘 수 있다.

## 참 고 문 헌

1. Abramowitz, M. and Stegun, A.I.(1964), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, National Bureau of Standards, John Wiley & Sons, Inc..
2. Aitchison, J. and Brown, J.A.C.(1957), The Lognormal Distribution, Cambridge at the University Press.
3. Anscomb, F.J.(1964), "Linear Sequential Rectifying Inspection for Controlling Fraction Defective", Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 8, pp. 216 - 222.
4. Arojan, L.A.(1976), "Application of the Direct Method in Sequential Analysis," Technometrics, Vol. 18, No.3, pp.301 - 306.
5. Daley, D.J.(1974), "Computation of Bi- and Tri-variate Normal Integrals," Applied Statistics, Vol. 23, No.3, pp. 438 - 453.
6. DeGroot, M.H.(1970), Optimal Statistical Decisions, McGraw - Hill.
7. Hald, A. and Keiding, N.(1972), "Asymptotic Properties of Bayesian Decision Rules for Two Terminal Decisions and Multiple Sampling," Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 34, pp.55 - 74.
8. IBM(1986), "System/360 Scientific Subroutine Package(360A - CM - 03X) Version III Programmer's Manual," Report No. H20-025 - 3, International Business Machines Corporation.
9. Lorenzen, T.J.(1980), "Determining Statistical Characteristics of a Vehicle Emission Audit Procedure," Technometrics, Vol. 22, No. 4, pp. 483 - 493.
10. Moore, M.L.(1973), "Assurance and Control of Vehicle Emission Testing," SAE paper. No. 730534, Society of Automotive Engineers.
11. Owen, D.B.(1965), "Tables for Computing Bivariate Normal Probabilities," Annals of Mathematical Statistics, Vol. 27, pp.1075 - 1091.
12. Poteus, E.L.(1979), "An Adjustment to the Norman-White Approach to Approximation Programs," Operations Research, Vol. 27, pp.1203 - 1208.
13. Steck, G.P.(1958), "A Table for Computing Trivariate Normal Probabilities," Annals of Mathematical Statistics, Vol. 29, pp.780 - 800.
14. US Environmental Protection Agency(1975), Automobile Exhaust Emission Surveillance Analysis of the FY 1974 Program, Report No. EP A - 460/3 - 76 - 019.
15. US Government(1975), Rules and Regulations, Part 86 - Control of Air Pollution from New Motor Vehicles and New Motor Vehicle Engineers: Certification and Test Procedures, Federal Register, Vol. 40, No., 126.
16. 한국자동차 공학회(1986), 자동차 성능시험기준 및 시험방법.
17. 환경청 대기보전국(1988), 운행중인 자동차의 배출가스 발산상황 및 그 원인등에 관

한 연구.

18. 환경청 대기보전국(1988), 자동차의 배축  
계수 및 배출량 선정.
19. 환경청 대기보전국(1988), 자동차 배출가

스 기준 및 배출가스 현황.

20. 박경석, 정석진(1986), “자동차 배기정화용  
3원 촉매에 관한 연구,” 대한기계학회지,  
Vol.26, No.3, pp.204-213.