

## Laguerre Polynomial을 이용한 저수지군의 최적제어

## Optimal Control of Multireservoirs Using Discrete Laguerre Polynomials

이재형\* · 김민환\*\*

Lee, Jae Hyoung · Kim, Min Hwan

## Abstract

Traditionally, a dynamic programming(DP) technique has been used to the multireservoir control system. The algorithm has inherent problem to increase computational requirements exponentially due to discretization of variables and expanding the dimension of the system. To solve this problem, this paper describes transforming the optimal control system into a quadratic programming(QP), using Laguerre polynomials(LP) and its properties. The objective function of the proposed QP is independent of time variable. The solution of the QP is obtained by nonlinear programming(NLP) using augmented Lagrangian multiplier method. The numerical experiment shows that the water level of reservoirs is higher than Lee's<sup>(12)</sup> and the evaluated benefit value is about the same as other researcher's.

## 요 지

저수지군을 최적으로 운영하려고 할때 일반적으로 동적계획법을 이용하는데 저수지 수의 증가와 변수의 이산화에 따라 계산 용량이 지수적으로 팽창하는 결점을 내포하고 있다. 이 문제를 해결하기 위해서 본 논문에서는 저수지 시스템 변수가 LP(Laguerre Polynomial)로 표현된 새로운 모형 개발을 시도하였다. 새로운 계획모형은 QP(Quadratic Programming) 형태이다. 이 모형의 해는 확장 라그랑지안 곱수 방법(Augmented Lagrangian Multiplier Method)의 비선형계획법에 의해서 QP해를 구하였다. 그 결과 저수 수준은 기존의 결과보다 높게 유지하려는 경향을 보였으며, 평가된 편익 값은 다른 방법들과 비슷한 값이었다.

## 1. 序 論

현대 산업사회의 발전과 더불어 수자원의 필요성은 더욱 증대되고 있으며, 또한 개발비도 이에 못지 않게 상승하고 있다. 수자원의 부족과 개발비의 상

승이 저수지의 운영과 관리상의 문제를 제기하고 있다. 이런 관리상의 문제점을 개선하고 통일된 알고리즘을 제시하려는 노력이 끊임없이 계속되어 왔으며, 저수지군의 최적 운영 계획을 설정하는 방법은 지대한 관심의 대상이며 중요하다.

저수지군의 관리를 위한 수학적인 모형의 복잡성과 복잡한 제약조건의 반영 때문에 통일된 알고리

\* 정희원 · 전북대학교 토목공학과 교수

\*\* 정희원 · 호남대학 토목공학과 조교수

즘을 구성하는 것은 쉬운 일이 아니다. 이런 문제 해결을 위해 동적계획법이 많이 사용되어 왔다. 동적계획법(Dynamic Programming)은 Bellman<sup>(1)</sup>에 의해 제안된 이래 수자원 시스템의 최적화에 폭넓게 사용되어 오고 있다. 많은 의사 결정문제(Decision Problem)에서 알 수 있듯이 저수지군의 제어에 DP의 적용성은 컴퓨터 용량과 시간의 제약을 받는다. Heidari 등<sup>(2)</sup>에 의하면 DP는 차원이 4개 혹은 5개 보다 큰 경우에 당시의 컴퓨터의 능력으로는 처리할 수 없을 만큼 대규모의 기억용량을 필요로 하였다. 또 Becker 등<sup>(3)</sup>은 다음과 같이 언급하였다.

“비록 4개의 저수지 시스템에 증분동적계획(Incremental Dynamic Programming)기법의 적용이 성공적이라 할지라도, 새로운 저수지를 시스템에 추가하면 IDP 알고리즘의 계산량은 지수적으로 증가한다. 2개의 저수지가 추가되는 경우 컴퓨터의 기억용량을 초과 해버린다.”

즉, 동적계획법에 바탕을 둔 기법은 이산화에 따른 계산 용량이 지수적으로 팽창한다는 단점을 가지고 있다. 이 문제를 해결하기 위해 Jacobson과 Mayne<sup>(4)</sup>은 미분동적계획법(Differential DP)을 제안하였다. 그 알고리즘이 직관적이고 수렴이 증명되어 있지 않았음에도 제약조건이 제어문제에 대해 적용이 가능하고 또 실제로 적용해서 성공하고 있는 예가 많다. Mayne과 Polak<sup>(5)</sup>은 미분동적계획법에 있어서 단계적인 폭의 조절법을 응용해서 제약조건이 있는 제어함수를 축차 수정하는 알고리즘을 제시하고 그 수렴성을 논의 하였다. 또 Ohno<sup>(6)</sup>는 이산시간시스템에 동적계획법을 적용하고 Kuhn-Tucker 필요조건을 도입해서 최적제어 알고리즘을 제안하였다. 그러나 이들은 응용예를 남기지 못하였고 임의의 명목값에 대한 수렴 보장을 제시하지도 못하였다.

이와 같이 동적계획법을 개선하기 위해 제안된 DDP 기법<sup>(7)</sup>이 허용구간(Envelop)을 계산해 나감으로서 계산의 부담감을 줄여 가려고 노력하였다. 그러나 이산화를 탈피하지 못하여 이 문제는 여전히 미해결로 남게 되었다. 이러한 난제를 극복하기 위해 다항식(Polynomial)을 이용하는 새로운 모형 연구<sup>(8,9)</sup>가 진행되고 있다.

다항식(Polynomial)을 이용한 최적제어는 컴퓨터의 계산 용량을 절감할 수 있는 효율적인 알고리

즘으로 알려져 있다.<sup>(13)</sup> King과 Paraskevopoulos<sup>(7)</sup>는 디지털 필터를 설계하기 위해서 LP(Laguerre Polynomial)를 이용하였다. 또 Ing-Rong Horng 등<sup>(8)</sup>에 의해 디지털 시불변 최적제어 문제를 해결하기 위해 LP를 이용하였는데, 이 문제는 제약조건이 없는 간단한 선형 대수 방정식이기 때문에 쉽게 다항식의 계수를 구하여 해를 얻을 수 있다. 또 Vlassenbroek<sup>(9)</sup>는 Chebyshev 다항식을 이용하여 제약조건이 있는 최적제어 문제를 해결하려고 시도하였다. 이 논문은 비선형 제약조건이 있는 최적제어 문제를 해결하기 위한 수치기법을 제시한 것으로 실제 문제에는 적용하지 못하였다.

본 논문에서는 LP기법을 제약조건이 있는 저수지 시스템에 확장시키는 문제를 다루었다. 저수지 시스템을 효율적으로 운영하기 위한 선결과제는 數理計劃 모형(Mathematical Model)을 구성하는 일이다. 제 2장에서 논의될 내용은 저수지 시스템의 특성을 기술하고, 이를 정식화 한다. 제 3장은 제 2장에서 수립한 저수지 시스템의 새로운 최적 운영 모형을 제시한다. 제 4장은 기존의 연구에서 다룬 예제를 대상으로 3장에서 구성한 모형의 실현 가능성에 대해 수치실험을 수행하고, 그 결과를 비교 검토한다. 끝으로 수리계획 모형의 운영 성과를 논의한다.

## 2. 저수지군의 제어문제

모형을 구성하고 있는 변수에 경제적, 사회적, 정치적 가치를 계량화된 지표를 사용하여 부여하는 것은 중요하다. 그러나 본 논문에서는 이런 문제에 초점을 둔 것이 아니고, 공학적인 문제에 충실하기 위하여 물리적인 관계에 중점을 두어 기술하고자 한다.

각 댐의 저수용량의 상한과 하한은 해를 얻기 위해 필요하다.  $V$ 가 댐( $V_1, \dots, V_n$ )의 저수용량이라고 하면  $V$ 의 상한과 하한값 사이를 이산화할 필요가 있고, 각 구간의 저수용량은 같게한다. 저수량 또는 저수 수준은 몇 단위의 등가 저수용량을 의미한다. 다시 말하면 이 논문에서 사용하는 저수량, 방류량 등은 위와 같이 정한(定規化한) 값이다.  $i$ 번째 저수지의 저수량은  $x_i$ ( $i=1, 2, 3, \dots$ )로 나타내며,  $x_i$ 로 나타내는 경우는  $i$ 가 포함된 벡터로 간주한다. 위락

목적에 위한 可用貯水量에 대해서는 각 저수지의 최저 수위를 규정함으로써 목적을 달성하도록 한다. 각 저수지의 저수량은 이 값을 밑돌지 않도록 제약조건을 부가한다.

홍수 조절의 고려에 대해서는 각 저수지의 최대 저수수준을 규정한다. 수위를 최소에서 최대로 끌어 올리는데 소요되는 물의 양은 定規化된 양으로 표현되고, 각  $x_i$ 가 이 수위를 넘을 수 없도록 제약을 가한다. 저수지들 사이에 유통되는 물의 양은 저수수준과 같은 형태로 定規化된 양으로 표시된다. 방류량(제어변수)  $u_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ )는  $i$ 번째 저수지에서  $t$ -기간에 방류되는 물의 양을 나타낸다. 각 저수지에서 최저 방류량은 發電機의 용량, 丹運, 河川保存, 汚染防止 등의 목적으로 하류부에서 필요로 하는 물의 양 등에 의해서 결정할 수 있다. 저수지의 수위의 제약을 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$V_{\min} \leq x_i \leq V_{\max} \quad (1)$$

여기서  $V_{\max}$ 는 최대 저수수준이고,  $V_{\min}$ 은 최소 저수수준이다.

연속성의 제약은 어떤 系에서 저류량의 연속조건을 의미한다. 일반적인 상태방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x_{t+1} = T(x_t, u_t, \gamma_t) \quad (2)$$

위의 같은 관계를 저수지 시스템에 적용하면,

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \alpha x_t + \beta u_t + \gamma_t \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, 상태변수  $x_t$ 와 제어변수  $u_t$ 는 각각  $n$ -상태 벡터,  $r$ -제어 벡터이고,  $\gamma_t$ 는 유입량이다. 또  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 적절한 차원을 갖는 상수 매트릭스이고,  $x_0$ 는 초기 저수지의 저수수준이다.

저수수준을 제약하는 경우 상태방정식은 방류량을 간접적으로 제약하게 된다. 즉 저수량이 상한을 윗돌 때는 많은 양의 물을 방류하게 되고, 저수량이 하한을 밑돌 때는 방류를 억제하게 된다.

방류량은 상태의 제약, 종기상태의 제약, 유입량 등에 의하여 구속을 받게 된다. 또 하류부의 하천 오염방지, 용수공급의 적절한 유지 등의 목적을 달성하기 위하여 방류량의 제약이 필요하다. 그러나

만일 이들의 제약조건을 그대로 열거할 경우에 제어는 상호종속의 가능성이 높고, 만일 서로 종속될 경우에 제어는 제약조건이 수동적으로 다루어질 수밖에 없다. 그렇지 않기 위해서는 종속형태를 피하여야 한다. 즉 이들의 관계에 단일의 관계로 묶는 것이 바람직하다. 일반적인 제약조건으로 변형시키기 위해서 종기조건과 연속방정식에 의해 상태의 제약으로 바꾸면  $\eta_t \leq x_t \leq \xi_t$ 인데,  $\eta_t$ 와  $\xi_t$ 은 상한 및 하한을 나타내는 벡터량이다. 위와 같은 절차에 의하여 구성된 상태 제약조건은 종기로부터 초기로 영향이 전파되는 양상을 보인다. Murray와 Yakowitz<sup>(10)</sup>에 의하면  $\eta_t \leq x_t \leq \xi_t$ 의 관계가 종기조건을 무시하더라도 목표수준에 이르도록 유도한다고 하였으나, 종기 앞단계에서 방류량의 상한과 하한을 고려한 점이 아니고 幅으로 주어지기 때문에 종기조건은 고려하여야 한다. 위의 상태 제약조건식에 연속방정식을 적용시킴으로서 방류량 제약조건식으로 전환 가능하다. 즉, 방류량의 제약은  $a(x_t, \gamma_t) \leq u_t \leq b(x_t, \gamma_t)$ 인데,<sup>(10,12)</sup> 이 관계를 상한값과 하한값으로 구분하여 나타내면,

$$k x_t + a_t - u_t \leq 0 \quad (4a)$$

$$u_t - k x_t - b_t \leq 0 \quad (4b)$$

여기서  $k$ 는  $\beta$ 의 역매트릭스이다. 위의 두 식을 묶어서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K x_t + J u_t + \gamma_t \leq 0 \quad (4c)$$

여기서,

$$K = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_t = \begin{bmatrix} a_t \\ -b_t \end{bmatrix}$$

이고,  $I$ 는 단위 매트릭스이다.

이상과 같은 절차에 의하여 얻어진 방류량의 제약조건식은 상태방정식에 종속된 형태로 변환된다. 이때 유의할 점은 방류량의 구속 범위가 약간 확장되어 있다는 점이다. 이는 상태와 방류 제약조건에서 하한 및 상한들이 반영되어 있기 때문이다. 이러한 영향은 하류부 댐일수록 누가적인 영향이 크다. 즉 하류부 댐은 상류부 댐의 영향을 직접적으로 받기 때문이다.

목적함수는 방류량의 편익을 어떻게 평가하느냐에 따라 규정되는 함수인데, 방류량과 편익 사이 관계를 일반적으로 나타내면 다음과 같다.<sup>(10)</sup>

$$q_{1T}^T x_T + (1/2) x_T^T Q_1 x_T + \sum_{t=0}^{T-1} [q_{1t}^T x_t + q_{2t}^T u_t + (1/2) \{x_t^T Q_1 x_t + 2 x_t^T Q_{12} u_t + u_t^T Q_2 u_t\}] \quad (5)$$

여기서  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_{12}$ 는 적절한 차원을 갖는 매트릭스이고,  $q_1$ 과  $q_2$ 는 벡터이다. 또 윗첨자 T는 전치(Transpose)를 나타내고, 아래첨자 T는 최종단계를 의미한다.

### 3. 數理 計劃 모형

LP를 이용하여 앞장에서 구성된 상태방정식과 부등호 제약조건식이 있는 원래의 모형을 새로운 모형으로 변환할 수 있다. 이때 변환된 목적함수는 간단한 QP 형태가 된다. 이렇게 변환된 QP의 해는 LP의 계수인데, 이 값을 이용하여 최적 추적로, 제어량, 목적함수 값이 평가된다.

LP를 이용한 수학적 모형을 구성하기 위해서 상태변수, 제어변수와 경계조건을  $m$ 차 이산형 LP(Laguerre Polynomial)항으로 나타내면 다음과 같다.<sup>(6)</sup>

$$\begin{aligned} x(t) &= G^T L(t), & x(t-1) &= W^T L(t), & x(t+1) &= F^T L(t) \\ u(t) &= H^T L(t), & u(t-1) &= E^T L(t) \\ x(0) &= G^T L(0), & x(T) &= G^T L(T) \end{aligned} \quad (6)$$

윗 식에서 사용된 이산형  $L(t)$ 는 다음과 같은 순환 방정식(Recursive Equation)으로 나타낼 수 있다. 여기서  $L(t)$ 는 LP의 무한차수를 나타내는 연산자이고, 차수가  $m$ 인 유한의 연산자를 나타낼 때는  $L_i(t)$ 로 나타내기로 한다.

$$\begin{aligned} L_{i+1}(t) &= -a_i(t)s^{-1/2} L_i(t) + s^{-1}b_i L_{i-1}(t); & (7) \\ i &= 0, 1, 2, \dots, m \\ L_{-1}(t) &= 0, & L_0(t) &= [(1-s)s^t]^{1/2} \\ a_i(t) &= \frac{1}{i+1} [i + (i+1)s + (s-1)t] \\ b_i &= -\frac{is}{i+1} \end{aligned}$$

여기서  $s$ 는 절감계수(Discount Factor)인데,  $0 < s < 1$

의 값을 갖는다. 식 (6)의 계수매트릭스는 다음과 같은 요소로 구성되어 있다.

$$\begin{aligned} G &= [g_1, g_2, \dots, g_n], & W &= [w_1, w_2, \dots, w_n] \\ F &= [f_1, f_2, \dots, f_n], & H &= [h_1, h_2, \dots, h_r] \\ E &= [e_1, e_2, \dots, e_r], \end{aligned} \quad (8)$$

또한 식 (6)의 계수매트릭스  $G$ ,  $W$ ,  $F$ 와  $H$ ,  $E$ 는 다음과 같은 관계를 가지고 있다.

$$\begin{aligned} F^T &= G^T M \\ W^T &= G^T M^{-1} \\ E^T &= H^T M^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $M$ 은 位置變換(Shift Transformation) 매트릭스인데, 다음과 같다.

$$M = \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \eta & d & \dots & 0 & 0 & 0 \\ (-d)\eta & \eta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (-d)^{m-2}\eta \quad (-d)^{m-3}\eta \dots (-d)\eta \quad \eta \quad d \quad m \times m$$

여기서  $d = s^{1/2}$ ,  $\eta = 1 - s$ 이다.

식 (6)에서 알 수 있는 바와 같이 시간변수는 LP의 연산자에 흡수되고, LP의 계수는 시간에 무관한 값이다. 이 성질을 이용하면 동적계획법을 비선형계획법으로 변환할 수 있고 시간에 대한 배려가 불필요하게 된다. 이상의 원리를 2장에서 논의한 저수지군의 운영문제에 적용한다.

식 (6)을 목적함수 식 (5)에 대입하고, 정리하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q_{1T}^T G^T L(T) &+ \sum_{t=0}^{T-1} \{q_{1t}^T (G^T L(t)) + q_{2t}^T H^T L(t)\} \\ &+ (1/2)[(G^T L(T))^T Q_1 G^T L(T)] + \sum_{t=0}^{T-1} [(1/2) \\ &\{(G^T L(t))^T Q_1 (G^T L(t)) + 2(G^T L(t))^T Q_{12} (H^T L(t)) \\ &+ (H^T L(t))^T Q_2 (H^T L(t))\}] \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)의 3번째와 4번째항은 매트릭스의 성질을 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(1/2) \text{Trace}\{(L(T)L(T)^T) GQ_1G^T\} + \sum_{t=0}^{T-1} \text{Trace}\{[L(t)L(t)^T] [(1/2)(GQ_1G^T + 2GQ_{12}H^T + HQ_2H^T)]\} \quad (11)$$

이산형 Laguerre 시리즈 직교성<sup>(8)</sup>의 성질을 이용하여 다시 나타내면,

$$(1/2) \text{Trace } G\bar{Q}_1G^T + \text{Trace}\{(1/2)(GQ_1G^T + 2GQ_{12}H^T + HQ_2H^T)\} = (1/2) \text{Trace } (G\bar{Q}_1G^T + (1/2)\{ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n Q_{ij}^1 g_i^T g_j + 2 \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^n Q_{ij}^{12} h_j^T g_i + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r Q_{ij}^2 h_i^T h_j \}) \quad (12)$$

여기서,  $\bar{Q}_1$ 은  $(L(T) L(T)^T Q_1)$ 이고, 위 식을 간단한 형태로 표현하면,

$$(1/2) z^T \bar{B}z \quad (13)$$

이다. 여기서  $z = [g_1^1, g_1^2, \dots, g_1^m, g_2^1, g_2^2, \dots, g_n^1, g_n^2, \dots, g_n^m, h_1^1, h_1^2, \dots, h_1^m, h_2^1, h_2^2, \dots, h_r^1, h_r^2, \dots, h_r^m]$ 인데, LP의 계수로 구성되어 있다. 그리고  $\bar{B}$ 의 구성 요소는 부록1에 실려있다.

식 (10)의 1번째와 2번째항은  $\bar{b}^T z$ 로 간단하게 나타낼 수 있다.

여기서  $\bar{b}^T$ 는

$$\bar{b}^T = [ \sum_{t=0}^T q_1^1 L_1(t), \sum_{t=0}^T q_1^2 L_2(t), \dots, \sum_{t=0}^T q_1^m L_m(t), \sum_{t=0}^T q_2^1 L_1(t), \sum_{t=0}^T q_2^2 L_2(t), \dots, \sum_{t=0}^T q_2^m L_m(t), \sum_{t=0}^T q_n^1 L_1(t), \sum_{t=0}^T q_n^2 L_2(t), \dots, \sum_{t=0}^T q_n^m L_m(t), \sum_{t=0}^{T-1} q_1^2 L_1(t), \sum_{t=0}^{T-1} q_1^2 L_2(t), \dots, \sum_{t=0}^{T-1} q_1^2 L_m(t), \sum_{t=0}^{T-1} q_2^2 L_1(t), \sum_{t=0}^{T-1} q_2^2 L_2(t), \dots, \sum_{t=0}^{T-1} q_2^2 L_m(t), \sum_{t=0}^{T-1} q_r^2 L_1(t), \sum_{t=0}^{T-1} q_r^2 L_2(t), \dots, \sum_{t=0}^{T-1} q_r^2 L_m(t) ]$$

즉, 식 (5)는 식 (13)과 위 식에 의해서 다음과 같이 간단한 형태로 변형되었다.

$$(1/2) z^T \bar{B}z + \bar{b}^T z \quad (14)$$

그리고, 상태방정식 (3)에 식 (6)과 (9)를 대입하면

$$-G^T M L(t) + \alpha G^T L(t) + \beta H^T L(t) + \gamma(t) = 0 \quad (15)$$

이 식은 다음과 같이 간단한 형식으로 쓸 수 있다.

$$\bar{G} z + \bar{g} = 0 \quad (16)$$

여기서  $\bar{g} = [\gamma(T-1), \gamma(T-2), \dots, \gamma(0), x_0^1, x_0^2, x_0^3, \dots, x_0^n]$ 이고,  $\bar{G}$ 의 매트릭스요소는 부록 2에 실려 있다. 이 때 식 (16)에 초기조건이 반영된다.

또한 제약조건식 (4)에 식 (6)을 대입하면,

$$y(t) + K G^T L(t) + J H^T L(t) \leq 0 \quad t=1, \dots, T \quad (17)$$

이고, 식 (17)을 간단한 형태로 표현하면,

$$\bar{H} z + \bar{h} \leq 0 \quad (18)$$

이다. 여기서  $\bar{h} = [y(T), y(T-1), \dots, y(1)]^T$ 이고,  $\bar{H}$ 의 매트릭스요소는 부록 3에 게재하였다.

상태방정식, 제약조건식, 목적함수가 식 (16), (18), (14)로 변환된 모형은 전형적인 QP이다. 다음 장에서 수치실험을 실시하여 이 모형의 실행 가능성을 검토한다.

#### 4. 수치실험 및 고찰

앞 장에서 새로운 QP모형을 구성하였다. 이 모형이 저수지군의 최적 운영에 적절한가를 판단하기 위해 Larson이 구성한 저수지 시스템의 문제를 예<sup>(14)</sup>로 들었다. 동적계획의 새로운 기법이 제안되면 저수지의 최적 운영 모형을 개선하는데 곧 바로 응용되었고, 이때 모형 검증의 대상 예제로 Larson 문제가 주로 채택되어 왔다. 상대적으로긴 하지만 연구성과가 축적되어 있는 이 문제가 본 연구성과를 가능하는데 적절하다.

##### 4.1 Larson 문제의 역사적 배경

1962년에 Bellman<sup>(15)</sup>에 의해서 증분동적계획법(IDP)이 제안되면서 Larson은 이 기법을 4개의 복합 저수지 시스템에 적용하였다. 그 후 Jacobson과 Mayne<sup>(4)</sup>이 미분동적계획법(DDP)을 제안하자 이 기법이 저수지 시스템에 적용할 수 있는지를 가늠하기 위해서 Heidari 등<sup>(2)</sup> 역시 이 문제를 채택하였다. 또, Murray와 Yakowitz<sup>(10)</sup>는 목적함수를 2차로, 제

약함수를 1차로 취하는 새로운 형태의 DDP를 발표하였고, Larson 문제를 예로 들어 검증하였다. 이와 비슷한 시기에 Ohno<sup>(6)</sup>는 일반적인 제약조건을 포함한 라그랑지 확장 DDP(LADDP)를 제안하였는데, 보다 발전된 이 기법의 적용성은 이 문제에 대해서 이 재형<sup>(12)</sup>에 의해 검토된 바 있다. 이와 같이 Larson의 문제는 새로운 모형이 제안될 때 마다 그 기법이 저수지 시스템에 적합한지의 여부를 판단하는 기준 예로 등장하였다.

#### 4.2 적용예의 특성

Larson 문제의 저수지 배열은 그림 1에 도시한 바와 같다. 저수지 2번과 3번은 직렬로, 1번과 2, 3번 저수지는 병렬로 연결되어 있다. 1번과 3번에서 방류한 물은 합류하여 마지막인 4번 저수지로 들어간다. 이러한 저수지 배열일 때, 1번과 2번 저수지에서만 유입량이 있는 것으로 한다. 상태방정식 (3)에서  $\alpha$ 는 저수지 시스템인 경우 단위 매트릭스(Identity Matrix)이다. 또, 저수지 1, 2, 3, 4번에서 물을 방류하는데, 이 경우는 대각선으로  $-1$ 이고, 저수지 3번은 2번에서, 저수지 4번은 1번과 3번에서 방류하는 물을 유입하는데, 이 경우는  $+1$ 로 유입을 표

시하며, 다른 곳은 0이다. 이상과 같이 저수지와 저수지 사이의 연결관계를 나타내는 매트릭스는 식 (3)의  $\beta$ 인데 다음과 같이 구성된다.

$$\beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

그리고, 그림 1에서 보는 바와 같이 각 저수지에 수력발전기가 있고, 4번째의 저수지에서만 관개용수를 공급하는 4개의 다목적 저수지로 구성된다. 각 저수지의 최저 수위는  $[0, 0, 0, 0]$ 이고, 최고 수위는  $[10, 10, 10, 15]$ 이다. 따라서 상태변수  $x$ 는 이 두 값 사이에 있도록 제약을 받는다. 여기서 수위 벡터의 각 요소와 저수지의 배열순서는 같다. 각 저수지의 방류량 범위는 최소  $[0, 0, 0, 0]$  - 최대  $[3, 4, 4, 7]$ 이고, 제어변수  $u$ 는 이 사이에서 변한다. 유입량  $\gamma_i$ 는 결정론적인 값(예측된 값)인데 시간에 관계없이  $[2, 3, 0, 0]$ 의 양으로 유입한다. 각 저수지의 초기저수수준  $x_0$ 는  $[5, 5, 5, 5]$ 이다.

방류를 수행하는 기준은 관개 및 발전용수의 효율적인 이용에 관한 배려이다. 식 (5)의  $q_{2t}^1, q_{2t}^2, q_{2t}^3, q_{2t}^4$ 는 각 저수지에서 방류량  $u_t$ 를 방류하였을 때 수력발전기에 의해 얻어지는 편익을 환산한 가중치이다. 또,  $q_{2t}^5$ 는 관개용수에 의해 얻어지는 편익 가중치이다. 그러므로 4번째의 저수지의 편익 가중치는 수력발전기와 관개용수에 의한 편익 가중치의 합( $q_{2t}^4 + q_{2t}^5$ )으로 한다. 여기에서 사용된 편익 가중치는 표 1에 게재되어 있다. 본 논문에서는 목적함수를 방류량과 편익 가중치의 선형관계로 규정하여 평가한다. 또 식 (5)의  $Q_2$  매트릭스는 대각선 요소에만 아주 작은 값을 사용하였는데, 비선형계획법을 (목적함수는 2차화하고, 천이함수와 제약함수는 선형화하여) QP 형태로 전환한 문제를 취급할 수 있는 유연성을 갖게 한 것이다.<sup>(10,12)</sup>

식 (4)는 Murray와 Yakowitz<sup>(10)</sup>에 의해서 상태와 제어 제약조건을 반영하여 변환된 식인데,  $t$ -기간의 유입량  $\gamma_t$ 가 일정할 때 이 식에서  $a_t$  및  $b_t$ 의 값은 표 2에 게재한 바와 같다.

이상으로 QP에 필요한 제반계수들을 정의하였다.

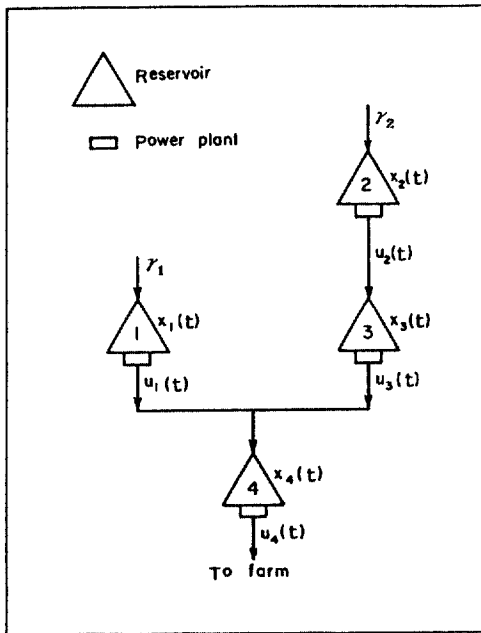


그림 1. 저수지 시스템

표 1. 편익 가중치

t	q <sub>2t</sub> <sup>1</sup>	q <sub>2t</sub> <sup>2</sup>	q <sub>2t</sub> <sup>3</sup>	q <sub>2t</sub> <sup>4</sup>	q <sub>2t</sub> <sup>5</sup>
0	1.1	1.4	1.0	1.0	1.6
1	1.0	1.1	1.0	1.2	1.7
2	1.0	1.0	1.2	1.8	1.8
3	1.2	1.0	1.8	2.5	1.9
4	1.8	1.2	2.5	2.2	2.0
5	2.5	1.8	2.2	2.0	2.0
6	2.2	2.5	2.0	1.8	2.0
7	2.0	2.2	1.8	2.2	1.9
8	1.8	2.0	2.2	1.8	1.8
9	2.2	1.8	1.8	1.4	1.7
10	1.8	2.2	1.4	1.1	1.6
11	1.4	1.8	1.1	1.0	1.5

표 2.  $\gamma_i$ 가 일정할 때 a<sub>i</sub>와 b<sub>i</sub>의 값

t	a <sub>i</sub>				b <sub>i</sub>			
1	-8.0	-7.0	-17.0	-45.0	2.0	3.0	3.0	8.0
2	-8.0	-7.0	-17.0	-45.0	2.0	3.0	3.0	8.0
3	-8.0	-7.0	-17.0	-45.0	2.0	3.0	3.0	8.0
4	-8.0	-7.0	-17.0	-45.0	2.0	3.0	3.0	8.0
5	-8.0	-7.0	-17.0	-45.0	2.0	3.0	3.0	8.0
6	-8.0	-7.0	-17.0	-45.0	2.0	3.0	3.0	8.0
7	-8.0	-7.0	-17.0	-45.0	2.0	3.0	3.0	8.0
8	-7.0	-7.0	-17.0	-44.0	2.0	3.0	3.0	8.0
9	-6.0	-6.0	-16.0	-42.0	2.0	3.0	3.0	8.0
10	-6.0	-5.0	-15.0	-41.0	2.0	3.0	3.0	8.0
11	-5.0	-4.0	-14.0	-38.0	1.0	3.0	3.0	7.0
12	-4.0	-3.0	-7.0	-28.0	-1.0	1.0	0.0	-1.0

표 3. LP 계수(차수=7)

n	G						
1	-3.234	3.079	-2.181	2.182	-0.317	-1.066	5.411
2	-1.245	3.290	-3.420	-3.307	-1.631	-4.775	-7.499
3	5.837	3.290	-3.420	-3.307	-1.631	-4.775	-7.499
4	6.381	6.512	6.736	6.069	6.479	6.663	5.930
r	H						
1	2.518	2.304	3.190	1.440	2.605	4.461	5.155
2	1.960	4.467	3.299	4.315	3.183	5.096	5.253
3	4.277	3.864	3.748	3.534	3.729	3.461	2.866
4	5.517	5.231	4.678	5.718	5.292	5.351	6.472

4.3 수치실험

3장에서 제안된 QP모형의 식 (14), (16), (18)에서 결정하여야 할 변수는 LP계수 z인데, 이 값은 양(+) 혹은, 음(-)의 실수값을 갖는다. 그런데 일반적인 QP 최적화 기법에서 결정하여야 할 변수 z는 양(+)의 실수로 제약을 받는다. 보편화된 QP기법은 본 논문에서 제시한 모형에 적절하지 않다. 따라서 이러한 제약을 극복할 수 있는 Pierre와 Lowe<sup>(11)</sup>의 확장 라그랑지안 곱수 비선형계획법(ALNLP)을 본 모형에 적용한다. 이 기법은 일반적인 제약조건을 갖는 비선형계획법이다. Pierre 등이 개발한 ALNLP의 프로그램은 결정해야할 변수의 수가 등제약 조건의 수보다 커야한다는 제약이 있다. 모형에서 상태변수의 차원 n과 제어변수의 차원 r은 각각 4이고, LP의 차수 m은 7로 취하였다. 결과적으로 결정하여야할 변수 z의 갯수는 56개이다. 또, 연간 방류계획은 월단위로 구분하여 실시한다. 즉, t=1, 2, 3,..., 12이며, T는 12이다. 결국 56개의 변수를 통제하는 등호제약식이 52개, 부등호제약식이 96개이다. 이상에서 열거한 차원, 차수 및 4-2절의 저수지 특성값으로 ALNLP를 수행하였다. 그 결과로 얻어진 LP계수 z값을 표 3에 게재하였다. 이 계수 값을 식 (6)에 대입하여 제어 u(t)를 구하였고, 상태방정식 (3)에 의해서 상태 x(t)를 결정하였다. 그 결과, 최적 추적로가 그림 2에 도시한 바와 같이 얻어졌다. 최적해로 얻어진 각 저수지의 저수 수준은 허용범위를 벗어나지 않는다.

그림 2에서 알 수 있는 바와 같이 이 문제에 대한 가장 최근 연구결과인 이 재형<sup>(13)</sup>의 최적 추적로와

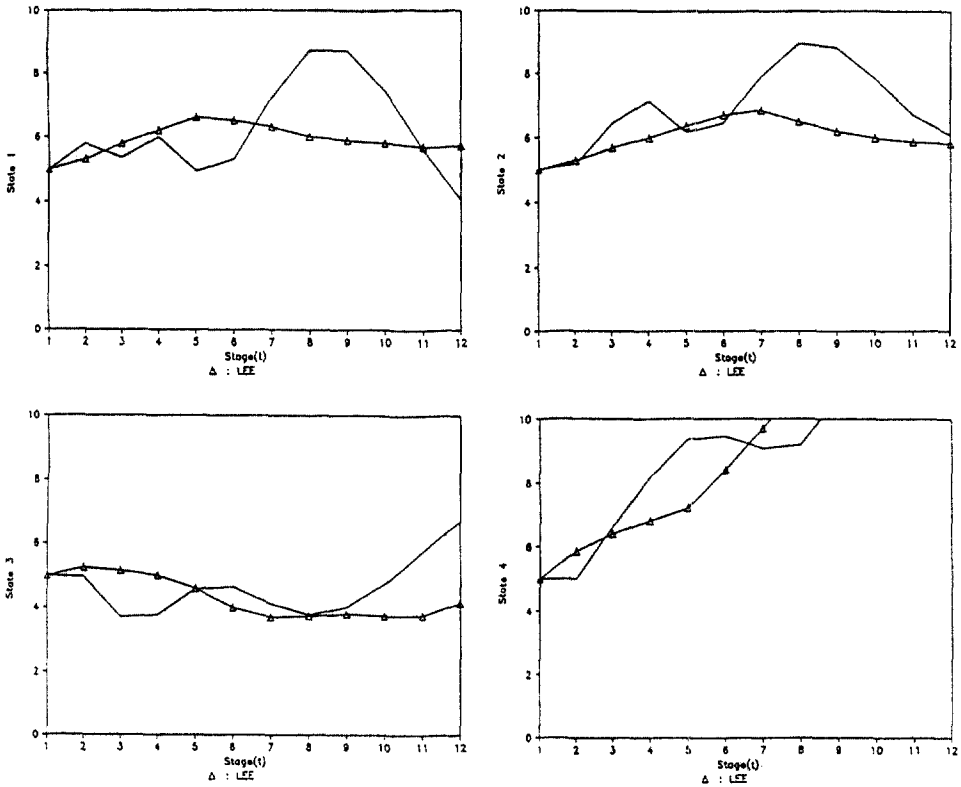


그림 2. 최적 추적로

비교할 때 상태의 변화양상이 비슷하지만, 저수 수 준을 다소 높게 유지하려는 경향을 나타내고 있다. 본 알고리즘에 의한 편익값은 반복법에 의한 것이 아니기 때문에 반복횟수에 따라서는 가능하지 않으나 기존<sup>(2,10,12)</sup>의 최종결과와 비교하는 것은 가능하다. Heidari,<sup>(2)</sup> Murray와 Yakowitz,<sup>(10)</sup> 이 재형<sup>(12)</sup>의 총 편익값은 각각 401.3, 401.15, 404.1인데, 본 연구의 편익값은 403.50이다.

## 5. 결 론

기존의 동적계획법에서 이산화에 따른 컴퓨터 계산용량과 기억용량이 증가하는 문제점을 극복하기 위하여, 기존의 저수지 제어모형을 QP형태의 모형으로 변환하였다. 이 모형의 적용성과 경제성을 검토하기 위해 Larson 문제를 예로 들어 수치실험을 한 결과, 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 기존의 식 (3), (4), (5)를 LP와 이 성질을 이용하여 등호제약과 부등호제약조건식이 있는 QP모형을 구성하였다. 구성된 QP모형의 목적함수는 기간에 무관한 함수로서 수치실험을 수행할 때, 단계별 해의 저장과 전진 및 후진계산이 필요없이 단번에 해가 구해진다.
2. 구성된 QP모형을 비선형 프로그램을 이용하여 LP의 계수를 구하였는데, 이 계수값은 원래의 모형을 만족하였으며, 평가된 편익값은 다른 방법에 의해서 얻은 값과 비슷한 값이었다.
3. 그림 2에서 살펴본 바와 같이 1번, 2번, 3번 저수지의 저수수준이 기존의 결과<sup>(12)</sup>보다 높게 유지하려는 경향을 보였다.
4. 기간이 12인 경우, 기존기법(IDP, DDP, LA-DDP)에서 결정해야 할 상태와 제어변수는 96개이고, 본 연구모형에서 차수가 7인 경우, 결정해야 할 상태와 제어변수에 대한 LP계수는 56개이다. 또,



제약조건의 수는 기간에 따라서 전자와 후자 모두 96개이고, 상태방정식의 총 수(12단계)는 전자는 48개이며, 후자는 52개(초기조건이 반영됨)이다. 이와 같이 본 예제에 대해 결정해야 할 변수와 제약조건의 수를 비교하면, 본 모형이 경제적임을 알 수 있다.

끝으로 차수에 따라서 결정해야 할 LP계수의 갯수가 증가하므로, 비선형계획모형의 수행능력과 요구되는 LP계수의 정확도에 따라서 최적의 차수를 선정해야 하는 문제가 있다. 또, 제약조건과 상태방정식이 전 기간에 걸쳐 나열되기 때문에 제약조건이 많아지는 단점이 있다. 따라서 상태방정식과 제약조건을 목적함수와 같이 기간에 무관한 함수로 처리하는 문제가 연구과제로 남아 있다.

### 참 고 문 헌

1. Bellman R., *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, 1957.
2. Heidari, M., Chow, V.T., Kokotovic, P.V. and Meredith, D., "Discrete Differential Dynamic Programming Approach to Water Resources Systems Optimization", *Water Resources Research*, 7, 1971.
3. Becker, L., Yeh, W., Fults, D. and Sparks, D., "Operations Models for Central Valley Project", *J. Water Resour. Plann. Manage. Div. Amer. Soc. Civil Eng.*, 102(WR1), 1976.
4. Jacobson, D.H. and Mayne, D.Q., *Differential Dynamic Programming*, Elsevier, 1970.
5. Mayne, D.Q. and Polak, E., "First-order Strong Variation Algorithms for Optimal Control", *J. Opt. Theory and Appl.* Vol.16, 1975.
6. Ohno, K., "A New Approach to Differential Dynamic Programming for Discrete Time Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.AC-23, No.1, 1978.
7. King, R.E. and Paraskevopoulos, P.N., "Parametric Identification of Discrete-time SISO Systems", *Int. J. Circuit Theory Applic.*, 5, 81, 1979.
8. Horng Ing-Rong and Shinn-Jang Ho, "Optimal Control using Discrete Laguerre Polynomials", *Int. J. Control*, Vol.41, No.6, 1613-1619, 1985.
9. Vlassenbroeck Jacques, "A Chebyshev Polynomial Method for Optimal Control with State Constraints", *Automatica*, Vol.24, No.4, 1988.
10. Murray D.M. and Yakowitz, S.J., "Constrained Differential Dynamic Programming and its Application to Multireservoir Control", *Water Resources Research*, Vol.15, No.3, 1979.
11. Pierre Donald A. and Michael J. Lowe, *Mathematical Programming via Augmented Lagrangians*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1975.
12. 李在炯, 貯水池群의 最適運營計劃에 관한 方法論, 서울대학교 대학원 박사학위논문, 1983.
13. Chou, J.H. and Horng, I.R., "Application of Chebyshev Polynomials to the Optimal Control of Time-varying Linear Systems", *Int. J. Control*, 41, 1985.
14. Larson R.E. and Keckler W.G., "Applications of Dynamic Programming to the Control of Water Resource Systems", *Automatica*, Vol.5, pp.15-26, 1969.
15. Bellman R. and Dreyfus S., *Applied Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.

(집수 : 1991. 8. 13)

부록 1

LP의 차수  $m=3$ , 상태변수의 수  $n=2$ , 제어변수의 수  $r=2$ 인 경우

$$\begin{bmatrix} Q_{11}^1 + L_1 L_1 \bar{Q}_{11}^1, & L_1 L_2 \bar{Q}_{11}^1, & L_1 L_3 \bar{Q}_{11}^1, & Q_{12}^1 + L_1 L_1 \bar{Q}_{12}^1, & L_1 L_2 \bar{Q}_{12}^1, & L_1 L_3 \bar{Q}_{12}^1, & Q_{11}^{12}, & 0, & Q_{12}^{12}, & 0, & 0 \\ L_2 L_1 \bar{Q}_{11}^1, & Q_{11}^1 + L_2 L_2 \bar{Q}_{11}^1, & L_2 L_3 \bar{Q}_{11}^1, & L_2 L_1 \bar{Q}_{12}^1, & Q_{12}^1 + L_2 L_2 \bar{Q}_{12}^1, & L_2 L_3 \bar{Q}_{12}^1, & 0, & Q_{11}^{12}, & 0, & Q_{12}^{12}, & 0 \\ L_3 L_1 \bar{Q}_{11}^1, & L_3 L_2 \bar{Q}_{11}^1, & Q_{11}^1 + L_3 L_3 \bar{Q}_{11}^1, & L_3 L_1 \bar{Q}_{12}^1, & L_3 L_2 \bar{Q}_{12}^1, & Q_{12}^1 + L_3 L_3 \bar{Q}_{12}^1, & 0, & 0, & Q_{11}^{12}, & 0, & Q_{12}^{12} \\ Q_{21}^1 + L_1 L_1 \bar{Q}_{21}^1, & L_1 L_2 \bar{Q}_{21}^1, & L_1 L_3 \bar{Q}_{21}^1, & Q_{22}^1 + L_1 L_1 \bar{Q}_{22}^1, & L_1 L_2 \bar{Q}_{22}^1, & L_1 L_3 \bar{Q}_{22}^1, & Q_{2112}, & 0, & 0, & Q_{22}^{12}, & 0, & 0 \\ L_2 L_1 \bar{Q}_{21}^1, & Q_{21}^1 + L_2 L_2 \bar{Q}_{21}^1, & L_2 L_3 \bar{Q}_{21}^1, & L_2 L_1 \bar{Q}_{22}^1, & Q_{22}^1 + L_2 L_2 \bar{Q}_{22}^1, & L_2 L_3 \bar{Q}_{22}^1, & 0, & Q_{21}^{12}, & 0, & 0, & Q_{22}^{12}, & 0 \\ L_3 L_1 \bar{Q}_{21}^1, & L_3 L_2 \bar{Q}_{21}^1, & Q_{21}^1 + L_3 L_3 \bar{Q}_{21}^1, & L_3 L_1 \bar{Q}_{22}^1, & L_3 L_2 \bar{Q}_{22}^1, & Q_{22}^1 + L_3 L_3 \bar{Q}_{22}^1, & 0, & 0, & Q_{21}^{12}, & 0, & 0, & Q_{22}^{12} \\ Q_{11}^{12}, & 0, & 0, & Q_{21}^{12}, & 0, & 0, & Q_{11}^2, & 0, & 0, & Q_{21}^2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & Q_{11}^{12}, & 0, & 0, & Q_{21}^{12}, & 0, & 0, & Q_{11}^2, & 0, & 0, & Q_{21}^2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & Q_{11}^{12}, & 0, & 0, & Q_{11}^2, & 0, & 0, & Q_{11}^2, & 0, & 0, & Q_{21}^2 \\ Q_{12}^{12}, & 0, & 0, & Q_{22}^{12}, & 0, & 0, & Q_{12}^2, & 0, & 0, & Q_{22}^2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & Q_{12}^{12}, & 0, & 0, & Q_{22}^{12}, & 0, & 0, & Q_{12}^2, & 0, & 0, & Q_{22}^2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & Q_{12}^{12}, & 0, & 0, & Q_{22}^{12}, & 0, & 0, & Q_{12}^2, & 0, & 0, & Q_{22}^2 \end{bmatrix}$$

\*윗 첨자는 변수를 나타냄.

\*\*아래 첨자는 매트릭스 요소를 나타냄.



부록 3

LP의 차수  $m=3$ , 상태변수의 수  $n=2$ , 제어변수의 수  $r=2$ 인 경우

$K_{11}L_1(N)$	$K_{11}L_2(N)$	$K_{11}L_3(N)$	$K_{12}L_1(N)$	$K_{12}L_2(N)$	$K_{12}L_3(N)$	$J_{11}L_1(N)$	$J_{11}L_2(N)$	$J_{11}L_3(N)$	$J_{12}L_1(N)$	$J_{12}L_2(N)$	$J_{12}L_3(N)$
$K_{21}L_1(N)$	$K_{21}L_2(N)$	$K_{21}L_3(N)$	$K_{22}L_1(N)$	$K_{22}L_2(N)$	$K_{22}L_3(N)$	$J_{21}L_1(N)$	$J_{21}L_2(N)$	$J_{21}L_3(N)$	$J_{22}L_1(N)$	$J_{22}L_2(N)$	$J_{22}L_3(N)$
$K_{11}L_1(N-1)$	$K_{11}L_2(N-1)$	$K_{11}L_3(N-1)$	$K_{12}L_1(N-1)$	$K_{12}L_2(N-1)$	$K_{12}L_3(N-1)$	$J_{11}L_1(N-1)$	$J_{11}L_2(N-1)$	$J_{11}L_3(N-1)$	$J_{12}L_1(N-1)$	$J_{12}L_2(N-1)$	$J_{12}L_3(N-1)$
$K_{21}L_1(N-1)$	$K_{21}L_2(N-1)$	$K_{21}L_3(N-1)$	$K_{22}L_1(N-1)$	$K_{22}L_2(N-1)$	$K_{22}L_3(N-1)$	$J_{21}L_1(N-1)$	$J_{21}L_2(N-1)$	$J_{21}L_3(N-1)$	$J_{22}L_1(N-1)$	$J_{22}L_2(N-1)$	$J_{22}L_3(N-1)$
$K_{11}L_1(1)$	$K_{11}L_2(1)$	$K_{11}L_3(1)$	$K_{12}L_1(1)$	$K_{12}L_2(1)$	$K_{12}L_3(1)$	$J_{11}L_1(1)$	$J_{11}L_2(1)$	$J_{11}L_3(1)$	$J_{12}L_1(1)$	$J_{12}L_2(1)$	$J_{12}L_3(1)$
$K_{21}L_1(1)$	$K_{21}L_2(1)$	$K_{21}L_3(1)$	$K_{22}L_1(1)$	$K_{22}L_2(1)$	$K_{22}L_3(1)$	$J_{21}L_1(1)$	$J_{21}L_2(1)$	$J_{21}L_3(1)$	$J_{22}L_1(1)$	$J_{22}L_2(1)$	$J_{22}L_3(1)$

\*아래 첨자는 매트릭스 요소를 나타냄.