

# 線形變斷面管의 자유진동

## Free Vibration of Tapered Tube

李庸友\* · 閔庚周\*\*

Lee, Yong Woo · Min, Kyung Ju

### Abstract

The closed forms of mass matrix with rotational inertia matrix are developed for free vibration analysis in space structures containing linear tapered members with cross section of thin-walled tube. The exact displacement functions are used for formulating mass matrix. The very small slopes of the tapered member are used in usual practice, such that the series expansion forms of these are also developed to avoid numerical failure in vibration analysis.

Significant improvements of accuracy and efficiency of free vibration analysis are achieved by using the mass matrices developed in this study. Frequencies of free vibration of tapered members are compared with solutions based upon stepped representation of beam element.

### 요 지

線形變斷面管型 斷面 部材의 3次元 空間에서의 固有振動解析을 위하여 回轉慣性도 포함하는 質量 行列을 유도하였다. 유도과정에서 精確한 變位函數를 사용했다. 일반적으로 많이 사용되는 變斷面 部材의 傾斜는 매우 작으므로 '整形積分型'으로 표현된 行列을 사용하여 變斷面 部材를 포함하는 構造물을 해석할 때에 信憑性없는 結果를 얻게 된다. 이러한 數值的 誤謬를 피하기 위하여 '級數型'의 展開式을 유도했다.

變斷面 部材의 構造物을 해석하기 위하여 本 研究에서 誘導된 質量 行列을 사용하여 구한 固有振動數와 分할 部材를 均一斷面 塔形態로 표현하여 구한 固有振動數를 比較하여 本 研究결과 效率性과 正確性이 增進된 것을 확인하였다.

### 1. 서 론

管型斷面이 비틀에 대하여 剛性이 가장 높은 것으로 알려져 있으므로 管型斷面이 자주 사용되어 왔다. 部材의 經濟的이며 效率的인 이용, 構造物의

美的인 요인 및 最適化를 위하여 線形變斷面管(Tapered Tube)으로 구성된 部材들이 사용되고 있다. 전선주, 交通안내관, 비행기, 시추선, 깃봉 등에 線形變斷面管이 사용되며, 최근에는 트러스 구조로 된 送電塔보다 施工과 組立이 용이함으로 線形變斷面管은 高壓送電線 支持構造物로 이용되고 있다.

1930년에 Hardy Cross에 의해 제안된 모멘트분

\* 正會員 · 檀國大 工大 教授

\*\* 正會員 · 檀國大 大學院 博士課程

배법<sup>(2)</sup>으로 線形變斷面 部材의 靜力學的인 精確한 해석 方法들이 시도되었다.<sup>(2,12)</sup>

Kirchhoff, Morrow, Ward, Wang 등은 각종 線形變斷面 部材의 動적해석을 여러 近似 函數를 이용하여 연구하였다.<sup>(6,11)</sup> 集中質量 行列을 사용한 線形變斷面 部材의 動적 해석법이 Myklestad에 의해 제안되었으며,<sup>(8)</sup> 위의 方法을 Housner 등이 개선시켰다.<sup>(5)</sup>

Gallagher 등은 線形變斷面 部材의 幾何學的 特性들을 對數函數로 개략화하여 安定解析과 自由振動解析에 적용하였다.<sup>(1)</sup> 최근에는 Gupta가 축방향에 따라 변화하는 斷面특성을 Gere<sup>(2)</sup>와 유사한 方法으로 규정한 斷面계수를 포함하는 變位函數들을 이용하여 2차원 斷面항상에 대하여 強度 및 質量行列을 유도하고 橫方向의 自由진동해석을 하였다.<sup>(3,4)</sup>

Lee는 다양한 斷面의 線形變斷面 部材에 대하여 3차원의 強度行列과 精確한 變位函數를 구하였고 幾何學的 強度行列을 유도하여 座屈解析을 하였으며,<sup>(7)</sup> 선변형부재 強度行列의 數值的 不安定을 발생시키는 相對傾斜의 範圍를 연구하였다.<sup>(14)</sup> 또한 이 變位函數를 이용하여 線形變斷面管의 2次元 動的解析이 Hur에 의하여 연구되었다.<sup>(15)</sup>

일반적으로 線形變斷面 部材의 動적 해석은 有限要素法 또는 部材를 塔 형태의 연속한 均一斷面 部材로 변환시켜 해석하여 왔다. 이러한 方法들로서 變斷面 部材의 信憑性있는 해석 結果를 얻기 위하여 部材의 분할된 요소수와 계산의 精確도는 항상 공학도들에게 의문시되고 있다. 이러한 問題는 正確한 強度行列과 質量行列을 사용함으로써 해결할 수 있을 것이다.

線形變斷面管의 面積과 斷面 2次 모멘트의 特性을 적용하여 Lee<sup>(7)</sup>가 基礎理論에 의하여 유도한 보다 精確한 變位函數로부터 consistent 質量 行列과 回轉慣性 質量 行列(consistent-mass matrix for rotational inertia)를 유도하여 線形變斷面管을 포함하는 構造物의 自由振動解析을 考察했으며, 또한 回轉慣性의 영향도 分析하였다.

強度 및 質量行列에 사용되는 函數에서 變斷面 部材의 傾斜가 ‘零’에 근접함에 따른 電算機의 數值的 發散 또는 不能을 피하기 위하여, ‘級數型(series form)’도 구하였다. ‘級數型’으로 이뤄진 行列도

傾斜가 ‘零’인 즉 均一斷面 部材에도 그대로 적용시킬 수 있다.

線形變斷面管의 質量行列을 사용하여 구한 固有振動數와 ANSYS의 變斷面 要素에 의하여 계산된 結果를 比較하였으며 그 結果로부터, 본 方法의 結果는 적은 수의 要素로 精確한 自由振動解析을 할 수 있었다.

## 2. 線形變斷面管의 質量 行列

### 2.1 線形變斷面 部材

彼積分式을 적분하여 나타낸 식을 ‘整形積分型(closed form)’이라 표현하기로 하며, ‘整形積分式’의 不定 또는 發散 등의 수치적 오류를 방지하기 위하여 ‘整形積分型’을 전개한 식을 ‘級數型(series form)’이라고 편의상 規定한다.

部材의 局部座屈은 본 論文의 目的과 限界를 넘음으로 발생하지 않는 것으로 보았으며, 變斷面 部材의 製作時 발생하는 殘留應力은 部材斷面에 따라 일정치 않으므로 모든 殘留應力을 해석에 포함할 수 없으므로 이를 무시했다. 또한 自由진동에서의 減衰도 무시했다.

變斷面 部材는 斷面의 성질이 均一 斷面 部材에 비하여 복잡함으로 극히 간단한 구조물에 대하여 精確한 解法이 알려져 있을 뿐이며 복잡한 구조물에 대하여서는 有限要素法 등의 近似解法으로 해석해 왔다. 구조물의 動力학적 해석을 근사적인 方法으로 하고자 할 때에는 部材를 많은 수의 要素로 나누어야 正解에 收斂하게 된다. 또한, 強度行列과 質量行列의 精確도가 높아지면 正解에의 收斂은 적은 수의 요소로도 가능하게 될 것이므로 consistent mass法에 의하여 회전관성을 포함한 質量行列을 구하였다.

일반적으로 部材의 傾斜는 다음과 같이 規定하고 있으며,

$$a = \frac{d_1 - d_i}{L}$$

이 곳에서는 경사를 初端의 平均直徑에 대한 相對傾斜  $\alpha$ 로 規定했다.

$$\alpha = \frac{d_1 - d_i}{d_i} \quad (1)$$

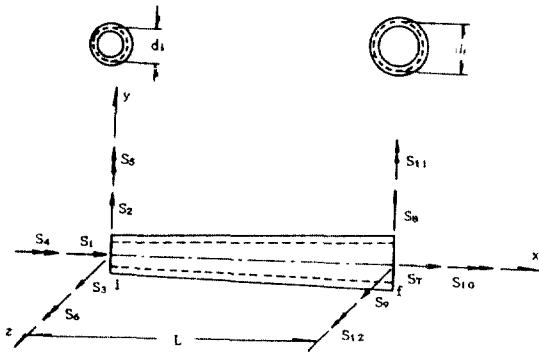


그림 1. 線形變斷面管과 節點力

여기서,  $d_1$ 와  $d_2$ 는 각각 初端과 末端에서의 平均直徑으로 그림 1에서 쉽게 알 수 있다. 일반적인 傾斜  $a$ 를 쓰지 않고 相對傾斜  $\alpha$ 를 쓴 것은 상대경사  $\alpha$ 의 絶對값이 크게 나타남으로 電算機를 이용한 계산에서 效率를 높이기 위한 것으로 3장에서 찾아 볼 수 있다.

$x$ 축은 部材의 長軸 방향과 일치하고 도심을 지난다.  $u, v, w$ 는 각각  $x, y, z$ 축 방향의 변위이다. 部材에 작용하는 절점 하중은 그림 1과 같이  $S_1, S_2, \dots, S_{12}$ 이며 이에 對應하는 節點 變位는 각각  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{12}$ 로 規定하고 힘의 방향과 일치할 때 변위는 陽의 값을 가진다.

자유진동해석에 사용되는 行列 요소표현을 간단히 하기 위하여 積分記號를 사용했으며, 또한 적분기호의 보편 妥當性 있는 사용을 위해서 無次元化했다.

임의 점의 斷面의 성질은 初端에서의 斷面의 성질인 scale factor와 無次元化 변수 부분으로 나누어 생각하면, 部材의 축방향으로 임의 점의 平均直徑  $d_x$ , 면적  $A_x$ 와 斷面 2차모멘트  $I_x$ 는 다음과 같다.

$$d_x = d_1 + ax = d_1(1 + \alpha\xi) \quad (2)$$

$$A_x = A_1(1 + \alpha\xi) \quad (3)$$

$$I_x = I_1(1 + \alpha\xi)^3 \quad (4)$$

여기서  $\xi = x/L$ 이고,  $d_1, A_1$ 와  $I_1$ 는 각각 初端에서의 平均直徑, 斷面積과 斷面 2차모멘트이다.  $1 + \alpha\xi$ 는 斷面積 部材의 斷面 특성이며  $\alpha=0$ 는 均一斷面에 해당된다.

## 2.2 質量行列

Lumped mass법을 사용하여 均一部材를 해석할 때에는 質量을 일정간격으로 보요소의 절점에 分配시켜 해석할 수 있으나, 回轉慣性을 포함하여 해석할 수 없으며 특히 變斷面 部材에서는 한 要素의 質量 重心을 찾는 데 어려움이 있다. 이에 비하여, consistent mass법은 強度行列과 같은 變位函數를 이용하여 유사하 과정으로부터 유도됨으로 lumped 質量 行列보다 정확도를 높일 수 있는 有用한 방법이라 할 수 있으므로 이 곳에서는 consistent 質量 行列을 유도하였다. 回轉慣性 consistent 質量 行列은 동적 해석에 큰 영향을 미치지 않는 것으로 알려져 있으나 현재까지 變斷面 部材에 대한 정확한 變位函數로부터 回轉慣性 consistent 質量 行列을 유도하여 해석한 예가 없으므로 본 연구에서는 이를 유도하고 동적 해석에 포함시켰다. 回轉慣性 consistent 質量 行列은 본 斷面의 회전에 의하여 발생하는 것으로 斷面의 質量慣性 2차모멘트에 角加速度를 곱하여 계산할 수 있다.

部材의 길이에 따라 변화하는 變斷面의 특성을 반영하여 consistent mass법에 의하여 變斷面 部材의 質量行列  $M$ 은 다음식으로 얻을 수 있다.<sup>(13)</sup>

$$m_{ij} = \int_0^L \rho U^T(x) U(x) A_x dx + \int_0^L \rho I_x \left[ \frac{\partial U(x)}{\partial x} \right]^T \left[ \frac{\partial U(x)}{\partial x} \right] dx \quad (5)$$

면단면 부재에서의 단면성질을  $A_x = A_0(1 + \alpha\xi)$ ,  $d_x = Ld\xi$ 을 式에 대입하고 적분을 무차원화시키면 式은 다음과 같이 된다.

$$m_{ij} = \rho A_0 L \int_0^1 U(\xi)^T U(\xi) (1 + \alpha\xi) d\xi + \rho I_0 L \int_0^1 \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)^T \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) (1 + \alpha\xi)^3 d\xi \quad (6)$$

式 (6)에서  $U(\xi)$ 는 變位函數로서 다음 式과 같다.

$$U(\xi) = u(\xi) + v(\xi) + w(\xi) + \phi(\xi) \quad (7)$$

이때,  $u(\xi), v(\xi), w(\xi)$ 와  $\phi(\xi)$ 는 각각 軸方向, 橫方向 및 비틀에 관한 變位函數로서, 이들 相互間에

표 1. 變斷面管의 質量 行列

$$m_{1,1} = \rho A_0 L (1 - 0.5\alpha - 2F_0 + F_{00})$$

$$m_{1,7} = \rho A_0 L (F_0 - F_{00})$$

$$m_{2,2} = \rho A_0 L \left[ \frac{1}{D^2} \{T^2 F_{11} + 2TUF_{12} + U^2 F_{22} + 2D(TF_1 U F_2)\} + 1 + 0.5\alpha \right] + \frac{\rho I_0}{LD^2} (T^2 R_{11} + 2TUR_{12} + U^2 R_{22})$$

$$m_{2,6} = \rho A_0 L \left[ \frac{L}{D^2} \{TUF_{11} + (TV + U^2)F_{12} + UVF_{22} + D(TF_{14} + UF_{24}UF_1 + VF_2)\} + LF_4 \right] + \frac{\rho I_0}{LD^2} (TUR_{11} + (U^2 + TV)R_{12} + DTR_1 + UVR_{22} + DUR_2)$$

$$m_{2,8} = -\rho A_0 L \left[ \frac{1}{D^2} \{T^2 F_{11} + 2TUF_{12} + U^2 F_{22} + D(TF_1 + UF_2)\} \right] - \frac{\rho I_0}{LD^2} (T^2 R_{11} + 2TUR_{12} + U^2 R_{22})$$

$$m_{2,12} = \rho A_0 L \left[ \frac{1}{D^2} \{T(T-U)F_{11} + (2TU - TV - U^2)F_{12} + U(U-V)F_{22}\} + DL(T-U)F_1 + (U-V)F_2 \right] + \frac{\rho I_0}{LD^2} \{(T^2 - TU)R_{11} + (2TU - U^2 - TV)R_{12} + (U^2 - UV)R_{22}\}$$

$$m_{4,4} = 1 + 0.5\alpha - 2WF_3 + W^2 F_{33}$$

$$m_{4,10} = WF_3 + W^2 F_{33}$$

$$m_{6,6} = \rho A_0 L \left[ \frac{L^2}{D^2} \{U^2 F_{11} + 2UVF_{12} + V^2 F_{22} + 2D(UF_{14} + VF_{24})\} + L^2 F_{44} \right] + \frac{\rho I_0}{LD^2} (D^2 RM_1 + 2UVR_{12} + 2DUR_1 + V^2 R_{22} + 2DVR_2)$$

$$m_{6,8} = -\rho A_0 L \left[ \frac{1}{D^2} \{UTF_{11} + (U^2 + TV)F_{12} + UVF_{22} + DL(TF_{14} + UF_{24})\} \right] - \frac{\rho I_0}{LD^2} (TUR_{11} + (U^2 + TV)R_{12} + DTR_1 + UVR_{22} + DUR_2)$$

$$m_{6,12} = \rho A_0 L \left[ \frac{L^2}{D^2} \{U(T-U)F_{11} + (U^2 - 2UV + TV)F_{12} + V(U-V)F_{22}\} + D\{(T-U)F_{14} + (U-V)F_{24}\} \right] + \frac{\rho I_0}{LD^2} \{(TU - U^2)R_{11} + (U^2 + TV - 2UV)R_{12} + D(T-U)R_1 + (UV - V^2)R_{22} + D(U-V)R_2\}$$

$$m_{7,7} = \rho A_0 L F_{00}$$

$$m_{8,8} = \rho A_0 L \left[ \frac{1}{D^2} (T^2 F_{11} + 2TUF_{12} + U^2 F_{22}) \right] + \frac{\rho I_0}{LD^2} (T^2 R_{11} + 2TUR_{12} + U^2 R_{22})$$

$$m_{8,12} = -\rho A_0 L \left[ \frac{L}{D^2} \{T(T-U)F_{11} + (2TU - TV - U^2)F_{12} + U(U-V)F_{22}\} \right] - \frac{\rho I_0}{LD^2} (T^2 - TU)R_{11} + (2TU - U^2 - TV)R_{12} + (U^2 - UV)R_{22}$$

$$m_{10,10} = W^2 F_{33}$$

$$m_{12,12} = \rho A_0 L \left[ \frac{L^2}{D^2} \{T(U-V)F_{11} + 2(TU - TV - U^2 + UV)F_{12} + (U-V)^2 F_{22}\} \right] + \frac{\rho I_0}{LD^2} (T^2 - 2TU + U^2)R_{11} + 2(TU - U^2 - TV + UV)R_{12} + (U^2 - 2UV + V^2)R_{22}$$

$$m_{3,3} = m_{2,2}$$

$$m_{9,9} = m_{8,8}$$

$$-m_{3,11} = m_{2,12}$$

$$-m_{5,9} = m_{6,8}$$

$$m_{5,5} = m_{6,6}$$

$$m_{11,11} = m_{12,12}$$

$$m_{3,9} = m_{2,8}$$

$$-m_{9,11} = m_{8,12}$$

$$m_{5,11} = m_{6,12}$$

여기서  $D=TV-U^2$ 이고, T, U, V, W는 附錄에 수록했다.  $F_0, F_{00}, F_1, F_{11}, F_{12}, F_{14}, F_2, F_{24}, F_3, F_4, F_{44}$ 는 consistent 質量 行列에 사용되는 적분기호이며,  $R_1, R_{11}, R_{12}, R_2, R_{22}$ 는 回轉慣性 行列에 사용되는 積分記號들로서 附錄에 수록했다. 표 1에서 規定한 行列은 對稱行列이며 나머지 要素는 零이다.

獨立的인 것으로 가정하여 獨立函數로 보았으며 식의 유도과정은 문헌[7]에 상술되어 있으므로 여기서는 결과식만 표현하고자 한다.

$$u(\xi) = \left[ 1 - \frac{\text{Ln}(1+\alpha\xi)}{\text{Ln}(1+\alpha)} \right] \frac{\Delta_1}{L} + \frac{\text{Ln}(1+\alpha\xi)}{\text{Ln}(1+\alpha)} \frac{\Delta_7}{L} \quad (8)$$

$$\phi(\xi) = \left[ 1 - \frac{(1+\alpha)^2 \text{Ln}(1+\alpha\xi)}{(2+\alpha)\text{Ln}(1+\alpha)} \right] \frac{\Delta_4}{L} + \frac{(1+\alpha)^2 \text{Ln}(1+\alpha\xi)}{(2+\alpha)\text{Ln}(1+\alpha)} \frac{\Delta_{10}}{L} \quad (9)$$

$$v(\xi) = \frac{1}{\text{DL}} \left( [(Tf_1Uf_2)+1]\Delta_2 + L[-(Tf_1+Uf_2)+\xi]\Delta_6 - (Tf_1+Uf_2)\Delta_8 + [(T-U)f_1+(U-V)f_2]\Delta_{12} \right) \quad (10)$$

$$w(\xi) = \frac{1}{\text{DL}} \left( [(Tf_1Uf_2)+1]\Delta_3 + L[-(Tf_1+Uf_2)+\xi]\Delta_5 - (Tf_1+Uf_2)\Delta_9 + [(T-U)f_1+(U-V)f_2]\Delta_{11} \right) \quad (11)$$

여기서,

$$f_1 = \frac{(2+\alpha\xi)\xi}{2\alpha^2(1+\alpha\xi)^2} - \frac{1}{\alpha^3} \text{Ln}(1+\alpha\xi) \quad (12)$$

$$f_2 = -\frac{\xi^2}{2(1+\alpha\xi)} \quad (13)$$

여기서,  $D=TV-U^2$ 이고, T, U, V는 附錄에 수록했다. 윗식에서  $f_1, f_2$ 는 각각 剪斷力과 純粹힘에 의한 特性 彎曲線을 나타낸다.

質量行列  $m_{1,1}$ 은 식 (8)을 식 (6)에 대입하면 다음과 같이 식을 얻는다.

$$m_{1,1} = \rho A_0 L \int_0^1 \left[ 1 - \frac{\text{Ln}(1+\alpha\xi)}{\text{Ln}(1+\alpha)} \right]^2 (1+\alpha\xi) d\xi$$

윗식을 적분하여 얻은 결과는 다음과 같다.

$$m_{1,1} = \rho A_0 L (1 - 0.5\alpha - 2F_0 + F_\infty)$$

같은 방법으로 식 (7)에서 식 (11)을 식 (6)에 대입하여 구한 3차원 質量 行列요소를 표 1에 기재하였다.

回轉慣性에 관련되는 부분은 식 (6)의 둘째항으

로부터 계산할 수 있다. 표 1에서  $A_0$ 가 포함된 項이 consistent 質量 行列에 관한 것이다.  $I_0$ 가 포함된 項은 回轉慣性에 관한 부분이다.

### 3. 適用例

외팔기둥의 예에서 정해로의 수렴 속도와 아울러 mode shape에 대하여도 분석하였으며, 뼈대구조물의 예에서 均一斷面部材와 變斷面部材의 조합으로 이뤄진 구조물의 해석에서 유도된 質量行列의 일반성을 확인하고자 한다.

자유진동 해석을 위해서는 質量 行列외에 線形強度 行列이 요구된다. 이 곳에서의 적용에서는 문헌 [7]에 있는 強度行列을 사용하였다. 行列 요소들에 포함되어 있는 '整形積分型'을 사용하여 電算機로 해석할 경우 相對 傾斜  $\alpha$ 에 따라 계산에서 數值的 誤謬가 나타남으로 '整形積分型'의 使用 限界를 規定하고 해석 프로그램에 적용했다.

자유진동해석에 본 연구에서 유도한 質量行列을 사용한 결과와 ANSYS에서 얻은 결과를 檢討하여 效率性和 經濟性을 확인하고자 한다.

#### 3.1 相對傾斜 $\alpha$ 와 級數解

電算機로 '整形積分型'을 사용하여 變斷面部材를 포함하는 구조물에 해석할 경우 附錄에 나타난 식들에서 部材의 상대경사  $\alpha$ 의 絕對값이 '0'에 接近함에 따라 이들 식의 값이 發散하거나 不能이 되어 信賴할 수 없게 된다. 이러한 數學的 不能 및 電算機 계산상의 切斷誤差(truncation error)와 半올림誤差(local round-off error)를 피하기 위하여 이 경우 다음과 같이 분모에 나타나는  $\alpha$ 를 消去했다.

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{(1+\alpha\xi)} = \frac{\text{Ln}(1+\alpha)}{\alpha} \quad (a)$$

윗식에서

$$\text{Ln}(1+\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left[ \frac{\alpha}{2+\alpha} \right]^{2n-1} = \frac{2\alpha}{2+\alpha} + \frac{2\alpha}{2+\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{\alpha}{2+\alpha} \right]^{2n} \quad (b)$$

식 (b)를 식 (a)에 대입하면  $\alpha$ 가 消去되어 다음과

표 2. 본 방법과 ANSYS의 비교(외팔기등)

요소수	모드	고유진동수(rad/sec)			
		본방법	오차율	ANSYS	오차율
2	1	28.4254	-0.2157	25.1914	11.1844
	2	124.5474	-0.7796	107.3096	13.1657
4	1	28.3648	-0.0019	27.4921	3.0729
	2	123.8018	-0.1762	118.8733	3.8084
	3	311.0951	-0.6721	296.8855	3.9223
8	1	28.3621	0.0075	28.1420	0.7816
	2	123.5841	-0.0001	122.7256	0.6911
	3	309.2203	-0.00654	311.0355	-0.6569
16	1	28.3631	0.0042	28.3020	0.2175
	2	123.5754	0.0070	123.1498	0.3479
	3	309.0059	0.0040	307.6189	0.4488
32	1	28.3637	0.0019	28.3437	0.0705
	2	123.5797	0.0035	123.3469	0.1883
	3	309.0057	0.0040	307.9271	0.3490

$$\text{오차율}(\%) = (1 - \text{고유진동수} / \text{본방법고유진동수} \times 128) \times 100$$

같은 '級數型'이 된다.

$$\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = \frac{2}{2+\alpha} + \frac{2}{2+\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{\alpha}{2+\alpha} \right]^{2n} \quad (c)$$

식 (c)에서 左邊은  $\alpha$ 의 값이 크면 정확한 값을 얻을 수 있으나  $\alpha$ 가 零에 근접함에 따라 發散함을 알 수 있으며,  $\alpha=0$ 이면 즉 均一部材일때 계산이 不可能하게 된다. 그러나, 右邊의 '級數型'은  $\alpha > -1$ 이면 어느 값이든 사용가능하며  $\alpha=0$ 일때 '1'이 된다. 다만 '級數型'은  $\alpha$ 값이 '0'에서 벗어날 수록 반복 계산횟수가 많아지는 短點이 있다. 위와같은 방법으로, 附錄에 나타난 積分式들을 展開하여 전산프로그램에 적용시켰다. 여기서는 그 식이 복잡하므로 記載를 생략한다.

'整形積分型'에 상대경사  $\alpha$ 의 값을 변화시키며 계산한 결과  $F_{11}$ ,  $F_{12}$ 의 定積分값은 相對傾斜  $\alpha$ 가 0.01과 0.001사이에서 發散하였으며  $F_{14}$ ,  $F_{22}$ 의 定積分값은 相對傾斜  $\alpha$ 가 0.001과 0.0001사이에서부터 發散하였다. 이는 문헌[14]에서 밝힌 바와 같이 '整形積分型'의 표현에 自然對數의 계산이 포함되어

표 3. 본 방법과 ANSYS의 비교(뾰대 구조물)

요소수	모드	고유진동수(rad/sec)			
		본방법	오차율	ANSYS	오차율
2	1	37.3172	-0.1323	35.4619	4.8458
	2	122.9365	-1.7583	114.5522	5.1816
	3	164.0872	-1.2413	149.8049	7.5705
4	1	37.2711	-0.0088	36.9741	0.7882
	2	120.9386	-0.1046	118.0926	2.2511
	3	162.2667	-0.1180	160.0991	1.2194
8	1	37.2680	-0.0004	37.2115	0.1512
	2	120.8210	-0.0073	120.1357	0.5600
	3	162.0886	-0.0081	161.8041	0.1674
16	1	37.2678	0.0000	37.2551	0.0343
	2	120.8122	0.0000	120.6465	0.1372
	3	162.0754	0.0000	162.0233	0.0321

$$\text{오차율}(\%) = (1 - \text{고유진동수} / \text{본방법고유진동수} \times 16) \times 100$$

있을 경우 컴퓨터 기종 및 유효숫자 所持능력에 따라 수치계산상의 문제점이 있음을 알 수 있다. 특히 線形變斷面 部材의 幾何學的 限界狀態인 -1에 근접할수록 많은 오차가 보였다. 따라서, 해석에서는  $\alpha$ 의 절대값이 0.01보다 클때에는 '整形積分型'을 0.01 이하 또는 -0.9이하값 일때는 '級數型'을 사용하였다.

### 3.2 解析例

變斷面 部材의 強度行列과 consistent 質量 行列을 이용하여 變斷面 部材를 포함하는 구조물에 대한 자유진동해석 결과와 범용프로그램의 결과와 比較 分析함으로써 본 방법의 正確性和 效率性을 보이고자 한다.

#### (1) 외팔기등에의 適用例

變斷面 部材로서의 외팔기등은 많이 사용되며 가장 간단한 구조물로서 진동해석에서 變位에 대한 모드 形狀을 쉽게 파악할 수 있다.

해석에 사용된 예로, 초단 직경 40 cm, 말단의 직경 15 cm, 두께 1.5 cm, 높이 10 m인 외팔기등을 모델로 回轉慣性을 포함시킨 경우와 무시한 경우를 각각 해석하여, 變斷面 部材를 等間隔의 塔形式 部材로 線形近似化시켜 해석한 ANSYS의 결과와 比

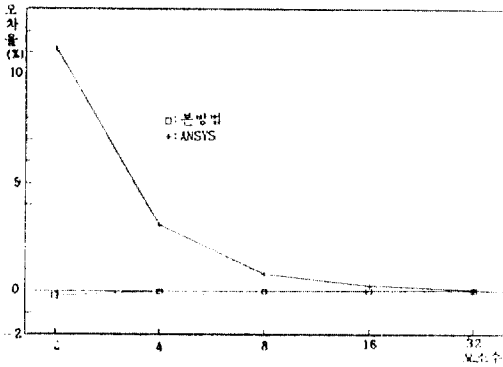


그림 2. 본 방법과 ANSYS의 收斂性 比較(1st mode)

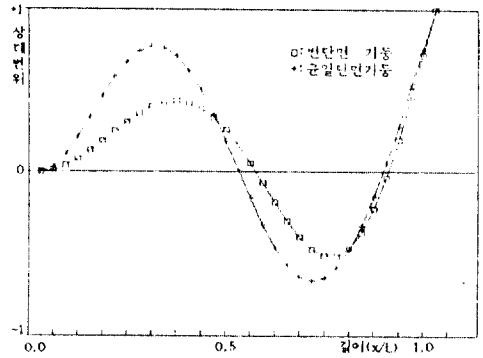


그림 3. 외팔기둥의 mode shape

較檢討했다. 여기서, 비틀의 영향을 고려하기 위하여 3次元 解析을 하였으며, x축과 y축에 관한 固有振動數가 같기 때문에 여기서는 한개의 값만 표에 나타냈다. 部材를 1개 요소로 해석한 결과는 均一斷面 部材에서와 마찬가지로 實用的이지 못하고 誤差 또한 크므로 여기서는 해석결과를 수록하지 않았다.

본 방법으로 4개 이상의 要素로 分割한 이후로는 세제 mode까지 固有振動數의 변화가 거의 없음을 표 3으로부터 알 수 있으며 외팔보를 2개 요소로 해석했을 때 첫째 mode에서  $-0.2\%$ 의 誤差를 보이나, ANSYS에서는  $11.2\%$  誤差를 나타냈으며, 部材를 4개로 분할하여 해석할 때부터는  $-0.002\%$  이내의 오차를 보이고 있음을 알 수 있다. 같은 斷面을 가지는 기둥에 境界條件을 바꿔 해석한 결과도 類似한 결과를 나타냈으며, 部材傾斜  $\alpha$  값이 클수록 본 방법이 정확한 값에 收斂하는 속도가 빨랐다. 이를 圖示한 것이 그림 2이다.

특히 요소 分割數와 振動數의 誤差率을 비교해 보면, 본 방법에서의 8요소가 ANSYS에서 32요소보다 정확한 값을 얻을 수 있음을 알 수 있고, 回轉慣性を 포함하지 않은 진동수는 결과값을 기재하지 않았으나 그 영향은 固有振動에 약  $0.1\%$  정도의 誤差를 보였다. 이는 變斷面 部材도 均一斷面 部材와 마찬가지로 回轉慣性の 영향이 微小함을 확인할 수 있었다.

그림 3은 線形變斷面管으로 된 외팔기둥과 같은 부피와 두께를 가지는 均一斷面管으로 된 외팔기둥의 세제 mode에 대한 相對的인 變位 曲線을 圖示한

것이다. 變斷管은 初端이 크기 때문에 均一斷面管에 비하여 變曲點이 上部로 이동될 것이라는 것은 쉽게 알 수 있다. 自由端의 실제 變位값에 따라 다르겠지만 모멘트 하중을 가장 많이 받는 기둥의 初端에서 變斷面管의 變位曲線의 曲率이 均一斷面管에 비하여 작게 나타남은 變斷面이 유리한 단면임을 고유진동 해석에서도 立證할 수 있음을 보인 것이다.

#### (2) 뼈대 構造物에의 適用例

變斷面 部材와 相對傾斜가 零인 상태의 均一보를 포함하고 있는 構造物을 해석함으로써 유도된 質量行列이 均一보에도 적용할 수 있음을 보이기 위하여 높이 10 m, 초단의 직경은 60 cm, 말단의 직경 20 cm, 두께는 1.5 cm인 두개의 變斷面 部材로 된 기둥과 길이 5 m, 직경 20 cm, 두께 1.5 cm인 均一보로 구성된 뼈대 構造物을 해석하였다.

결과를 비교를 위해 본 논문에서 유도된 質量行列을 이용한 16개 分割要素의 프로그램 결과를 기준으로 하여 誤差率을 구하였다. 표 3에서 보는 바와 같이 본 방법을 ANSYS의 결과와 비교하면 2개의 요소로 잘랐을 때 1st mode에서 본 방법은  $-0.1\%$ 의 오차를 보이나 ANSYS는  $4.8\%$ 의 오차를 보이며, 4개 요소로 잘랐을 때가 ANSYS에서 16개 요소로 해석한 결과보다 정확한 값에 접근함을 알 수 있다. 뼈대 構造物에서도 앞에서 기둥의 해석예와 같이 回轉慣性の 영향은 약  $0.1\%$  미만의 영향을 미침을 알 수 있었다.

앞에서 考察한 바와 같이 變斷面 部材를 포함하는 외팔기둥과 뼈대 構造物을 해석한 결과 본 연구에서 유도된 質量 行列은 정확한 것임을 확인할 수 있

있으며, 이를 이용하여 變斷面 部材를 포함하는 構造物의 자유진동해석이 보다 正確하고 效率의임을 알 수 있었다.

均一斷面 部材를 진동해석할 때 한 部材를 4~8개 요소로 分割하면 소기의 진동수를 얻을 수 있는 것과 마찬가지로, 變斷面 部材에서도 본 연구에서 유도된 식들을 이용하면 한 部材를 4~8개 요소로 분할하여 해석했을 때 正解에 근사한 진동수를 얻을 수 있었다.

이는 앞에서 밝힌 바와 같이 變斷面 部材에 대한 精確한 變位函數로부터 誘導된 것으로서 당연한 결과라 할 수 있을 것이다. 또한 回轉慣性이 構造物의 자유진동에 미치는 영향은 일반 구조물에서 잘 알려진 바와 같이 微小함으로 그 영향을 무시해도 될 것으로 생각된다.

#### 4. 結 論

線形變斷面管의 質量行列을 유도하기 위해 보다 精確한 變位函數를 이용하여 一連의 積分이 행해졌다. 質量行列을 산정할 때 사용되는 相對傾斜에 따른 電算機의 數值的 誤謬를 확인하고 이들에 대한 '級數型'을 유도했으며, '整形積分型'을 사용할 수 있는 상대경사의 범위를 고찰하였다.

유도된 線形變斷面管의 consistent 質量 行列과 문헌[7]의 強度行列을 이용하여 線形變斷面管을 포함하는 構造物의 自由振動解析을 하여 세째 mode 까지 비교한 결과, 본 방법은 부재를 4개의 요소로 분할했을 때 정해와 약 0.3% 미만의 오차를 보였으며, 이는 범용프로그램에서 부재를 16요소로 나눈 결과보다 精確하였으므로 연구에서 유도된 質量行列의 正確성과 效率성을 檢證하였다. 또한, 回轉慣性이 진동에 미치는 영향은 均一斷面 部材에서와 같이 微小함을 알았다.

유도된 質量行列은 精確한 變位函數로부터 유도된 것으로서 이를 이용하여 線形變斷面管를 포함하는 構造物의 自由振動解析을 행하면 效率의이고도 經濟的으로 信賴할 수 있는 결과를 얻을 수 있었으며, 均一部材에도 적용할 수 있는 일반적인 質量行列임을 확인할 수 있었다.

#### 참 고 문 헌

1. Gallagher, Richard H. and Lee, Chen-Hsiung,

"Matrix Dynamic and Instability Analysis with Non-Uniform Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, 1970, pp. 265-275.

2. Gere, James M., *Moment Distribution*, D. Van Nostrand, New York.

3. Gupta, Arvind K., "Vibration of Tapered Beams", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 111, No. 1, Jan., 1985, ASCE.

4. Gupta, Arvind K., "Frequency-Dependent Matrices for Tapered Beams", *Jouranal of Sturctural Engineering*, Vol. 112, No. 1, Jan., 1986, ASCE.

5. Housner, G.W. and Keightley, W.O., "Vibrations of Linearly Cantilever Beams", Vol. 128, 1963.

6. Krynicki, E., Mazurkiewicz, Z., "Free Vibration of a Simple Supported Bar with a Linearly Variable Height of Cross Section", *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, Sep., 1962, Vol 29, pp. 497-501.

7. Lee, Y.W., *New Element for Analysis of Space Frame with Tapered Members*, Ph.D. Dissertation, University of Nebraska Jan., 1983.

8. Myklestad, N.O., "A New Method of Calculating National Modes of Uncoupled Bending Vibration of Airplane Wings and Other Types of Beams", *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 11, April, 1944.

9. Paz, Mario., *Structures Dynamics Theory & Computation*, 2nd. ed., Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1985.

10. Przemieniecki, "Theory of Matrix Structures Analysis, McGraw-Hill.

11. Wang, H.C., "Generalized Hypergeometric Function Solutions on the Transverse vibration of a Class of Nouniform Beams", *Transactions of the ASME*, Sep., 1967.

12. Wang, T.M. and Lee, C.H., "Tapered Cantilevers with Varying Distributed Loads", *Proceeding ASCE*, Vol. 99, No. EM4, Aug., 1973.

13. Weaver, William Jr., Gere James M. and Paul R. Johnston, *Structural Dynamics by Finite Elements*, Prentice-Hall, 1987.

14. 이용우, "선형변단면 부재의 강도매트릭스들의 계산상오차", 한국토목학회논문집, 대한토목학회집, 1985년 6월.

15. 허정희, "선형변단면 부재의 자유진동", 석사학위논문, 단국대학교, 1991

(接受 : 1991. 8. 31)



부 록

$$T = \int_0^1 \frac{d\xi}{(1+\alpha\xi)^3} = \frac{2+\alpha}{2(1+\alpha)^2}$$

$$U = \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{(1+\alpha\xi)^3} = \frac{1}{2(1+\alpha)^2}$$

$$V = \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(1+\alpha\xi)^3} = \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha^3} - \frac{2+3\alpha}{2\alpha^2(1+\alpha)^2}$$

$$W = \frac{(1+\alpha)^2}{(2+\alpha)}$$

$$F_0 = \int_0^1 f_0(1+\alpha\xi) d\xi = \frac{-2\alpha - \alpha^2 + 2(1+\alpha)^2 \ln(1+\alpha)}{4\alpha \ln(1+\alpha)}$$

$$F_{00} = \int_0^1 f_0 f_0(1+\alpha\xi) d\xi = \frac{2(1+\alpha)^2 \ln(1+\alpha) \{ \ln(1+\alpha) - 1 \} + 2\alpha + \alpha^2}{4\alpha \ln(1+\alpha)^2}$$

$$F_1 = \int_0^1 f_1(1+\alpha\xi) d\xi = \frac{6\alpha + 9\alpha^2 + 2\alpha^3 - (6 + 12\alpha + 6\alpha^2) \ln(1+\alpha)}{12\alpha^4}$$

$$F_{11} = \int_0^1 f_1 f_1(1+\alpha\xi) d\xi = \frac{1}{144\alpha^7} [ -60\alpha + 102\alpha^2 + 52\alpha^3 + 9\alpha^4 + (60 - 144\alpha - 216\alpha^2 - 48\alpha^3) \ln(1+\alpha) + (72 + 144\alpha + 72\alpha^2) \ln(1+\alpha)^2 ]$$

$$F_{12} = \int_0^1 f_1 f_2(1+\alpha\xi) d\xi = -\frac{1}{144\alpha^6} [ 60\alpha - 30\alpha^2 + 20\alpha^3 + 9\alpha^4 - (60 + 24\alpha^3) \ln(1+\alpha) ]$$

$$F_{14} = \int_0^1 f_1 f_4(1+\alpha\xi) d\xi = \frac{1}{72\alpha^5} [ -12\alpha + 6\alpha^2 + 32\alpha^3 + 9\alpha^4 + (12 - 36\alpha^2 - 24\alpha^3) \ln(1+\alpha) ]$$

$$F_2 = \int_0^1 f_2(1+\alpha\xi) d\xi = -\frac{1}{6}$$

$$F_{22} = \int_0^1 f_2 f_2(1+\alpha\xi) d\xi = \frac{1}{48\alpha^5} [ -12\alpha + 6\alpha^2 - 4\alpha^3 + 3\alpha^4 + 12 \ln(1+\alpha) ]$$

$$F_{24} = \int_0^1 f_2 f_4(1+\alpha\xi) d\xi = -\frac{1}{8}$$

$$F_3 = \int_0^1 f_3(1+\alpha\xi) d\xi = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{4}$$

$$F_{33} = \int_0^1 f_3 f_3(1+\alpha\xi) d\xi = \frac{-4\alpha + 2\alpha^2 + 4\alpha^3 + \alpha^4 + 4 \ln(1+\alpha)}{4\alpha^3}$$

$$F_4 = \int_0^1 f_4(1+\alpha\xi) d\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\alpha$$

$$F_{44} = \int_0^1 f_2 f_4(1+\alpha\xi) d\xi = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\alpha$$

$$R_{M1} = \int_0^1 (1+\alpha\xi)^3 d\xi = \frac{1}{4} [ 4 + 6\alpha + 4\alpha^2 + \alpha^3 ]$$

$$R_1 = \int_0^1 f_1'(1+\alpha\xi)^3 d\xi = \frac{1}{24} [ 4 + 3\alpha ]$$

$$R_{11} = \int_0^1 f_1' f_1' (1 + \alpha \xi)^3 d\xi = -\frac{1}{48\alpha^5} [-12\alpha + 6\alpha^2 - 4\alpha^3 + 3\alpha^4 + 12 \ln(1 + \alpha)]$$

$$R_{12} = \int_0^1 f_1' f_1' (1 + \alpha \xi)^3 d\xi = -\frac{1}{48\alpha^4} [12\alpha - 6\alpha^2 + 4\alpha^3 + 3\alpha^4 - 12 \ln(1 + \alpha)]$$

$$R_2 = \int_0^1 f_2' (1 + \alpha \xi)^3 d\xi = -\frac{1}{8} [4 + 4\alpha + \alpha^2]$$

$$R_{22} = \int_0^1 f_2' f_2' (1 + \alpha \xi)^3 d\xi = -\frac{1}{16\alpha^3} [-4\alpha + 2\alpha^2 + 4\alpha^3 + \alpha^4 + 4 \ln(1 + \alpha)]$$

여기서,  $f_0, f_1, f_3, f_4$ 는 積分記號를 간단히 하기 위한 것으로 다음과 같다.

$$f_0 = \frac{\ln(1 + \alpha \xi)}{\ln(1 + \alpha)} \quad f_1 = \frac{(2 + \alpha \xi)\xi}{2\alpha^2(1 + \alpha \xi)} - \frac{\ln(1 + \alpha \xi)}{\alpha^3}$$

$$f_2 = -\frac{\xi^2}{2(1 + \alpha \xi)} \quad , \quad f_3 = \frac{(2 + \alpha \xi)\xi}{(1 + \alpha \xi)^2} \quad , \quad f_4 = \xi$$