

# 逆対称 Cross-ply 多層板의 自由振動 및 변형 에너지 解釋

## Free Vibrations and Strain Energy Analysis of Antisymmetric Cross-ply Laminated Plates

朴文浩\* · 芳村 仁\* · 三上 隆\*\*\* · 朴勝振\*\*\*\*

Park, Moon Ho · Jin Yoshimura · Takashi Mikami · Park, Sung Jin

### Abstract

A powerful analytical procedure and strain energy analysis to investigate the free vibration of antisymmetric cross-ply laminated plates, having one pair of opposite edges simply supported, are developed on the basis of the Yang, Norris and Stavsky (YSN) theory. The equation of motion of the plate are solved by the use of collation method. A range of results are presented for plates to show the effects of modulus ratio and number of layers on natural frequency. In addition, an analysis of the strain energy distributions is used as an aid for the better understanding of the vibration characteristics of the plates.

### 요 지

두 변이 단순지지된 역대칭 cross-ply 다층판의 자유진동에 대하여 Yang, Norris, Stavsky의 YNS 이론을 이용하여, 다층판의 자유진동해석과 변형에너지 해석을 하였다. 다층판의 운동방정식은 선점법을 이용하여 해석하였고, 탄성계수비와 적층수가 고유진동수에 미치는 영향을 검토하였다. 또한 변형에너지 분포해석을 이용하여 다층판의 진동특성을 명확히 규명하였다.

### 1. 序 論

다층판을 형성하고 있는 복합재료는 그것을 구성하고 있는 재료들 사이의 큰 강성의 차로 인하여 단일재료로서는 얻을 수 없는 큰 비강성과 비강도 등의 여러가지 우수한 역학적 성질을 갖고 있기 때문에, 구조물의 경량화를 요구하는 많은 분야에

널리 사용되고 있다. 여기서 말하는 강성, 강도라는 것은 보통, 정적인 거동상태에서 얻어지는 역학적 특성으로 이를 토대로 하여 복합층 구조의 설계가 대체로 행하여 지고 있다. 또한 최근 복합재료의 이용분야가 보다 폭 넓게 요구됨에 따라 동적인 거동을 받는 구조물의 응용이 절실하게 되었다. 그러나 정적인 거동상태에서의 역학적 성질이 우수한 복합재료가 반드시 동적인 거동에서도 우수하다고는 할 수 없으므로 동적인 거동상태에 적합한 역학적 특성을 찾아 이를 바탕으로 구조 설계를 하기 위

\* 정회원 · 慶北大學校 工科大學 土木工學科 教授

\*\* 정회원 · 日本 北海道大學 工学部 土木工學科 教授

\*\*\* 정회원 · 日本 北海道大學 工学部 土木工學科 助教授

\*\*\*\* 정회원 · 日本 北海道大學 工学部 土木工學專攻 博士課程

하여서는 적층구조 요소의 동역학적 성질의 규명이 필요 불가결하게 되었다. 고로 본 연구에서는 층과층 사이를 강화제인 수지로 굳혀 형성한 역대칭 cross-ply 다층판의 동적 거동을 규명하기 위하여 자유진동문제 해석을 행하였다. 최근 이 분야의 연구 동향은 Leissa, A.W.<sup>(1)</sup>와 Bert, C.W.<sup>(2)</sup>의 문헌에 자세히 기술되어 있다. 다층판은 강한 이방성을 보이며 薄板의 경우 면내 강성과 휨 강성에 대한 면의 전단 강도가 극히 작다는 것이 특징이다. 그 때문에 등방성에 대한 Mindlin이론을 확장한 Yang, Norris, Stavsky의 1차 전단 변형이론(YSN 이론)<sup>(3)</sup>이나 전단 보정계수를 도입치 않고 해석할 수 있는, 보다 고차적인 이론의 연구도 수행되고 있지만, 이방성 다층판의 자유진동특성의 규명은 등방성 판에 비하여 아직 미흡한 편이다.

더우기 해석방법은 엄밀해도 얻을 수 있는 4변단순지지된 이방성 다층판의 경우를 제외하면 지금까지는 유한요소법<sup>(4)</sup>이나 전달메트릭스법<sup>(5)</sup> 등의 근사해법이 주를 이루고 있으므로 보다 정확한 해를 구할 수 있는 해석방법이 요구되고 있다. 이에 본 연구는 두 변이 단순지지되고 다른 두 변이 임의로 지지되는 역대칭 cross-ply 다층판을 대상으로 하여 선점법의 자유진동 문제의 적용성 검토와 진동수 특성을 변형에너지와 연관시켜 휨-신장 강성이 자유진동 특성에 미치는 영향을 명확히 규명하고자 한다.

## 2. 기초방정식

그림 1과 같이 일정한 두께  $h$ 를 갖는 균일한 직교 이방성 재료로 구성된 다층판의 중앙면에 직교 좌표  $(x, y, z)$ 를 형성하였다. 재료의 직교이방성 주축을 (1, 2, 3)으로 표시하였고 주축 3은  $z$ 축을 평행하도록 배치하였으므로 주축 1과 2는  $x$ 축과  $y$ 축에 대하여 각각 경사각  $\theta$ (ply 배향각)을 갖도록 하였다.

또 역대칭 cross-ply 다층판은  $\theta=0^\circ$ 와  $90^\circ$ 의 조합으로 구성하였으며, 좌표축과 재료주축의 관계 및 적층순서(4층인 경우)등은 그림 1과 같으며, 적층판의 선형탄성 변형-변위 방정식과 대칭성을 고려한 구성관계식으로부터 단위 길이당 합응력 및 합모멘트 식을 구하면 식 (1)과 같다.

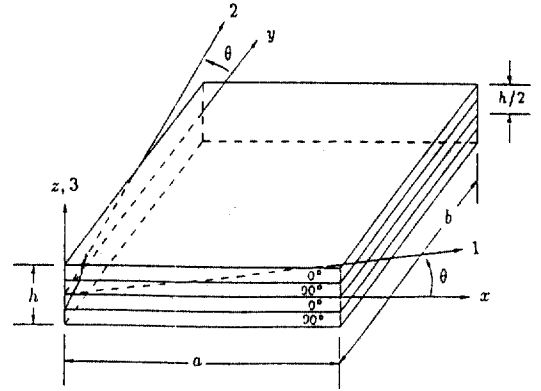


그림 1. 좌표축, 재료주축 및 적층순서 (4층인 경우)

$$\begin{aligned}
 N_x &= A_{11}u_x + A_{12}v_y + B_{11}\psi_{x,x} \\
 N_{xy} &= A_{66}(u_y + v_x) \\
 M_y &= B_{22}v_y + D_{12}\psi_{x,x} + D_{22}\psi_{y,y} \\
 Q_x &= A_{55}(w_x + \psi_x) \\
 N_y &= A_{12}u_x + A_{22}u_y + B_{22}\psi_{y,y} \\
 M_x &= B_{11}u_{y,x} + D_{11}\psi_{x,x} + D_{12}\psi_{y,y} \\
 M_{xy} &= D_{66}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\
 Q_y &= A_{44}(w_y + \psi_y)
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 쉼표(,)로 계속되는 첨자는 편미분을 나타내며,  $(u, v, w) = (x, y, z$ 방향의 변위성분),  $(\psi_x, \psi_y) = (x-z, y-z$  평판의 회전각 성분),  $N_x, H_y : x, y$ 축 방향의 법선력,  $N_{xy}$  : 수평 전단력,  $Q_x, Q_y$  : 연직 전단력,  $M_x, M_y$  : 휨 모멘트,  $M_{xy}$  : 비틀림 모멘트이다. 또한  $A_{ij}$  : 신장강성,  $B_{ij}$  : 휨-신장 연성강성,  $D_{ij}$  : 휨강성으로서 식 (2)와 같다.

$$A_{ij} = K_{ij}^2 \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz \quad (i, j = 4, 5) \tag{2}$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) Q_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \tag{3}$$

여기서  $K_{ij}^2$ 은 전단 보정계수이고  $Q_{ij}$ 는 ply 배향각, 포이슨비 전단 탄성계수에 따른 탄성정수로서 식 (3)과 같다.

$$[Q] = \begin{bmatrix} \lambda E_1 & \lambda \nu_{12} E_2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda \nu_{12} E_2 & \lambda E_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K^2 G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K^2 G_{23} \end{bmatrix} \tag{3}$$

여기서  $E_1, E_2$ 는 재료주축(1, 2) 방향의 탄성계수,  $\nu_{12}, \nu_{21}$ 는 포아손비,  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$ 는 전단 탄성계수  $\lambda = (1 - \nu_{12}\nu_{21})^{-1}, K_2 = 5/6$ 이다.

물체력이 없는 경우에 YSN 이론<sup>(3)</sup>을 적용하여 역대칭 cross-ply 다층판의 기초 운동방정식을 구하면 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} - P_{u,tt} - R\psi_{x,tt} &= 0 \\ N_{y,y} + N_{xy,y} - P_{v,tt} - Rv_{x,tt} &= 0 \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} - Pw_{tt} &= 0 \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x - I\psi_{x,tt} - Ru_{tt} &= 0 \\ M_{y,y} + M_{xy,x} - Q_y - I\psi_{y,tt} - Rv_{tt} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $t$ 는 시간을 나타내고  $P, R$  및  $I$ 는 밀도  $\rho$ 의 함수로 다음과 같이 정의한다.

$$(P, R, I) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2)\rho dz \quad (5)$$

식 (1)을 식 (4)에 대입하여 cross-ply 다층판의 기초 미분방정식을 변위성분만의 항으로 표시하면 식 (6)과 같다.

$$\begin{aligned} A_{11}u_{,xx} + A_{66}u_{,yy} + (A_{12} + A_{66})v_{,xy} + B_{11}\psi_{x,xx} - P_{u,tt} - R\psi_{x,tt} &= 0 \\ (A_{12} + A_{66})u_{,xy} + A_{66}v_{,xx} + A_{22}v_{,yy} + B_{22}\psi_{y,yy} - P_{v,tt} - R\psi_{y,tt} &= 0 \\ A_{55}(w_{,xx} + \psi_{x,x}) + A_{44}(w_{,yy} + \psi_{y,y}) - Pw_{tt} &= 0 \\ B_{11}u_{,xx} + D_{11}\psi_{x,xx} + D_{66}\psi_{x,yy} + (D_{12}D_{66})\psi_{y,yy} \\ - A_{55}(w_{,x} + \psi_x) - I\psi_{x,tt} - Ru_{tt} &= 0 \\ B_{22}v_{,yy} + (D_{12} + D_{66})\psi_{x,xy} + D_{22}\psi_{y,yy} \\ - A_{44}(w_{,y} + \psi_y) - I\psi_{y,tt} - Rv_{tt} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$x=0$ 와  $x=a$ 에서 단순지지, 다른 2변( $y=0, b$ )는 임의 지지조건이라 하면, 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x=0, a \text{ 單純支持:} \\ v=w=\psi_y=M_x=N_x=0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} y=0, b \text{ 條件:} \\ \text{單純支持(S): } u=w=\psi_x=M_y=N_y=0 \\ \text{固 定(G): } u=v=w=\psi_x=\psi_y=0 \\ \text{自 由(F): } M_y=M_{xy}=N_y=N_{xy}=Q_y=0 \end{aligned} \quad (8)$$

합용력과 변형률-변위의 관계식으로부터 변형에너지  $U$ 를 구하면 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ & A_{11}u_{,x}^2 + A_{66}u_{,y}^2 + 2A_{12}u_{,x}v_{,y} + 2A_{26}v_{,x}u_{,y} + \\ & A_{22}v_{,y}^2 + A_{66}v_{,x}^2 + A_{44}v_{,y}^2 + A_{55}w_{,x}^2 + 2A_{44}w_{,y}\psi_y \\ & + 2A_{55}w_{,x}\psi_x + A_{55}\psi_x^2 + A_{44}\psi_y^2 + 2B_{11}u_{,x}\psi_{x,x} + \\ & 2B_{22}v_{,y}\psi_{y,y} + D_{11}\psi_{x,x}^2 + D_{66}\psi_{x,y}^2 + 2D_{12}\psi_{y,y}\psi_{x,x} \\ & + 2D_{66}\psi_{x,y}\psi_{y,x} + D_{22}\psi_{y,y}^2 + D_{66}\psi_{y,x}^2 \} dA \quad (9) \end{aligned}$$

### 3. 해석 방법

$x=0, a$ 에서 식 (7)의 경계조건을 만족하는 변위 함수로 위치( $x, y$ )와 시간의 함수의 적으로 나타낸 Levy형의 다음식을 사용한다.

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= hU(\eta) \cdot \cos m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \\ v(x, y, t) &= hV(\eta) \cdot \sin m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \\ w(x, y, t) &= hW(\eta) \cdot \sin m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \\ \psi_x(x, y, t) &= X(\eta) \cdot \cos m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \\ \psi_y(x, y, t) &= Y(\eta) \cdot \sin m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $w$ =고유 원진동수,  $m=x$  방향의 반파수,  $\xi=x/a, \eta=y/b$

#### 3.1 고유진동수 방정식

변위 함수식 (10)을 식 (6)에 대입하면, 다음의 ( $\eta=[0, 1]$ )에 관한 Matrix 상미분방정식이 얻어진다.

$$[C_1]\{Z''\} + [C_2]\{Z'\} + [C_3]\{Z\} - \Omega^2[C_4]\{Z\} = \{0\} \quad (11)$$

여기서 ( )' =  $d( )/d\eta$ ,  $[C_1] \sim [C_2]$ 는  $5 \times 5$ 의 계수 Matrix, 변위 vector  $\{Z\}$ 와 무차원화된 고유원진동수  $\Omega^2$ 는 다음으로 정식화 된다.

$$\begin{aligned} \{Z\}^T &= \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\} = \{U, V, W, X, Y\} \\ \Omega^2 &= \rho w^2 a^4 / (E_2 h^2) \end{aligned} \quad (12)$$

마찬가지로,  $y=0(\eta=0)$ 와  $y=b(\eta=1)$ 로 규정된 경계조건은 다음과 같은 Matrix로 표시된다.

$$[C_5]\{Z'\} + [C_6]\{Z\} = \{0\} \quad (14)$$

여기서  $[C_5]$ 와  $[C_6]$ 은  $10 \times 5$ 의 계수 Matrix이다. 식 (11)의 이산화에는 선점법을 이용한다. 선점법이란 변위 함수를 미분 방정식에 대입하여, 그 때

발생하는 편차를 선점에서 영이 되도록, 미정계수를 결정하는 방법으로, 그 과정은 문헌<sup>(7)</sup>과 같으므로 여기서는 후전개에서 필요한 것만을 기술한다.

[1] 변위관계의 가정 : 식 (12)의 변위함수는 다음과 같이 가정하였다.

$$Z_i = \sum_{s=1}^{M+2} N_s(\eta) Z_{i,s} \quad (i=1\sim 5) \quad (15)$$

여기서  $N_s(\eta)$ 는 보간함수,  $Z_{i,s}(s=1\sim M+2)$ 는 후술의 내부선점과 단점으로 구성되는 이산점에서의 변위 함수치이다.

[2] 내부선점과 단점 :  $\eta$ 축에 따라서  $0=\eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_M < \eta_{M+1}$ 의  $M+2$ 의 점을 배치한다. 내부선점  $\eta_j(j=1\sim M, M=\text{내부 선점수})$ 에는 구간  $[0, 1]$ 에서 정의되는  $M$ 차의 Shifted Legendre 다항식  $P_M(\eta)$ 의 원점을 이용하였다.  $\eta_0=0$ 와  $\eta_{M+1}=1$ 은 경계조건이 지정되는 점에서 배치되기 때문에 단점이라 부른다.

여기서 해석에 이용되는 선점수  $M=13$ 에 대한 선점의 배치상태를 그림 2에 나타내었다. 그림 2에서는 자유진동 문제의 해석에 적합하도록 단점 근처에서는 간격을 좁게, 중앙부에서는 비교적 간격을 넓게 선점을 배치하였다.

[3] Matrix [A]와 [B] :  $\eta$ 에 관한 1, 2계 미분을 내부 선점과 단점에 있어서 변위 함수와 관계되는  $(M+2) \times (M+2)$  차의 Matrix이다.

$$\{Z_i\} = [A]\{Z_i\}, \quad \{Z_i'\} = [B]\{Z_i\} \quad (i=1\sim 5) \quad (16)$$

여기서  $\{Z_i\}$ 는 다음과 같다.

$$\{Z_i\}^T = \{Z_i(\eta_0), Z_i(\eta_1), \dots, Z_i(\eta_{M+1})\} \quad (i=1\sim 5) \quad (17)$$

[4]  $\{Z_{ic}\}$ 와  $\{Z_{ie}\}$  : 식 (17)은 내부선점과 단점에 관한 성분으로 구성되어 있으므로, 이들을 분리하여, 내부선점에 관한 것에는 첨자  $c$ 를, 단점에 관해서는 첨자  $e$ 로서 표기하여 식 (17)과 같은 행 Matrix를

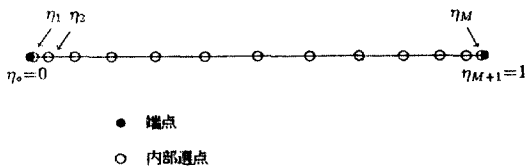


그림 2. 선점의 배치 ( $M=13$ 의 경우)

다음과 같이 정식화할 수 있다.

$$\begin{aligned} \{Z_{ic}\}^T &= \{Z_i(\eta_1), Z_i(\eta_2), \dots, Z_i(\eta_M)\} \\ \{Z_{ie}\}^T &= \{Z_i(\eta_0), Z_i(\eta_{M+1})\} \quad (i=1\sim 5) \end{aligned} \quad (18)$$

이상과 같은 과정으로부터  $5(M+2)$ 개의 미지량에 대한 조건은 다음과 같이 얻을 수 있다.  $5M$ 개의 조건은 상미분정식 (11)의 내부선점에 의한 잔차조건에 의해 얻어진다. 식 (11), (16) 및 (18)로부터 다음식을 얻을 수 있다.

$$[\alpha_c]\{\delta_c\} + [\alpha_e]\{\delta_e\} - \Omega^2[\beta_e]\{\delta_e\} = \{0\} \quad (19)$$

여기서 첨자  $c$ 와  $e$ 는 각각 내부선점과 단점에 관한 Matrix, Vector를 나타낸다.

$[\alpha_c]$ 와  $[\alpha_e]$ 는 식 (10)의 Matrix  $[C_1] \sim [C_3]$ 과 식 (16)의 Matrix [A], [B]의 성분으로 구성되는  $5M \times 5M$ ,  $5M \times 10M$ 차의 Matrix이고  $[\beta_e]$ 는 식 (10)의 Matrix  $[C_4]$ 의 성분으로 표현되는  $5M \times 5M$ 차의 Matrix이다. 또한  $\{\delta_c\}$ 와  $\{\delta_e\}$ 는 식 (18)을 이용하면 다음과 같이 정식화 된다.

$$\begin{aligned} \{\delta_c\}^T &= \{\{U_c\}^T, \{V_c\}^T, \{W_c\}^T, \{X_c\}^T, \{Y_c\}^T\} \\ \{\delta_e\}^T &= \{\{U_e\}^T, \{V_e\}^T, \{W_e\}^T, \{X_e\}^T, \{Y_e\}^T\} \end{aligned} \quad (20)$$

나머지 10개의 조건은 경계조건식 (14)에 의해 얻어지고, 식 (19)와 유사한 다음식으로 유도된다.

$$[\gamma_c]\{\delta_c\} + [\gamma_e]\{\delta_e\} = \{0\} \quad (21)$$

여기서  $[\gamma_c]$ 와  $[\gamma_e]$ 는 각각  $10 \times 5M$ 차와  $10 \times 10M$ 차의 Matrix이다.

식 (19), (21)로부터  $\{\delta_c\}$ 를 소거하면 다음의 고유진동수 방정식이 얻어진다.

$$\left[ [\alpha_c] - [\alpha_e][\gamma_e]^{-1}[\gamma_c] \right] \{\delta_c\} - \Omega^2[\beta_e]\{\delta_e\} = \{0\} \quad (22)$$

위식을 풀면  $5M$ 개의 고유치와 그것에 대응하는 내부선점에 있어서 고유 Mode  $\{\delta_c\}$ 가 구해진다. 단점에 있어서 고유 Mode는 식 (21)로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\{\delta_e\} = -[\gamma_e]^{-1}[\gamma_c]\{\delta_c\} \quad (23)$$

### 3.2 변형 energy선정

식 (10)을 식 (9)에 대입하면 변형에너지는 다음과 같이 변환된다.

$$U = U^* e^{2i\omega t} \quad (24)$$

여기서

$$U^* = \frac{ab}{4} \int_0^1 \{A_{11}(mnh)^2 U^2 + A_{66}h^2 U'^2 + \dots\} d\eta \quad (25)$$

직교 다항식의 원점을 선점으로 택하고, 선점과 단점을 표준점(분점)으로 하는 식 (26)과 같은 보간형 수치적분<sup>(7)</sup>을 이용하면 식 (25)의  $U^*$ 는 식 (27)과 같이 변환될 수 있다.

$$\int_0^1 f(\eta) d\eta = \sum_{i=0}^{M+1} W_e(i) \cdot f(\eta_i) \quad (26)$$

$$U^* = \frac{abr}{4} \left[ (mnh)^2 A_{11} \sum_{i=0}^{M+1} W_e(i) U^2(\eta_i) + A_{66}h^2 \sum_{i=0}^{M+1} W_e(i) U'^2(\eta_i) + \dots \right] \quad (27)$$

여기서  $W_e$ 는 가중치이다.

여기서  $U(\eta_i)$  ( $i=0 \sim M+1$ )은 식 (21), (23)에 의해 구해지는 선점과 단점에 있어서 고유 Mode 값이고  $U'(\eta_i)$  ( $i=0 \sim M+1$ )은 식 (15)의 앞식에서 구해지는 고유 Mode형의 1차 미계수이다. 식 (27)의 정도에 대해서는 해석예의 결과를 이용하여 기술한다.

#### 4. 해석예

수치계산에 이용된 다층판의 재료특성은 다음과 같다.

$$\frac{E_1}{E_2} = 40, \quad \frac{G_{12}}{E_2} = \frac{G_{13}}{E_2} = 0.6, \quad \frac{G_{23}}{E_1} = 0.5, \quad \nu_{12} = 0.25$$

전단보정계수는  $K_{44}^2 = K_{55}^2 = 5/6$ , 선점수는  $M=13$ 을 이용했다<sup>(7)</sup>.

그림 3~6에 표기한 SS, SC, FS 등은 단순지지-단순지지, 단순지지-고정, 자유-단순지지 등을 나타낸다.

##### 4.1 해석방법의 정도

표 1은 기본고유 진동수  $\omega b^2(\rho/D_{22})^{1/2}\pi^2$ 에 대해서 1차 전단 변형이론에 의한 본 결과치와 전단 변형을 무시한 고전 이론에 의한 해를  $a/h=100$ ,  $a/h=500$ ,

적층수  $N=2, 4, 6, 8, \infty$ 의 4변 단순지지된 다층판에서 비교한 것이다. 표에서 보면  $a/h$ 가 크면 클수록 본 해석방법은 Khdir, A.A.의 고전이론<sup>(6)</sup>을 사용한 해와 잘 일치하고 있다.

이는 다층판은 얇은 판에서도 전단변형의 영향이 나타남을 보여 준 것이다.

표 2는 적층수  $N=2$ 의 4변 단순지지인 적층판  $a/h=100$ 의 고차 고유 진동수  $\Omega$ 의 정도를 검토하기 위해 행한 것이다.

이것에 의하면 본 해석법은 괄호속에 기입된 엄밀해와 잘 일치하고 있다. 여기서 엄밀해란 Navier형으로 해를 가정하고 그것을 미분방정식에 대입하여  $5 \times 5$ 의 진동수 방정식에서 구한 것이다.

표 3은 선점수  $M=13$ 이고,  $N=2, 6$ 의 4변 단순지지의 변형 energy  $U^*$ 의 해를 이용하여 저자가 구한 엄밀해와 비교한 것이다.

본 산정법에 의한 계산치는 선점과 단점을 표본점이라고 하고 그것에 대응하는 함수치의 유효화의 형태로 구해진 것이지만 엄밀해와 잘 일치하고 있다.

표 1. 고전이론의 결과와의 비교

N	수정이론		A.A. Khdir의 고전이론
	a/h=100	a/h=500	
2	0.8640	0.8647	0.8647
4	1.3310	1.3334	1.3335
6	1.4003	1.4031	1.4033
$\infty$	1.4534	1.4565	1.4566

표 2. 고유진동수  $\Omega$ 의 비교(4변 단순지지), ( ): 엄밀해

m	n(y 방향의 반파수)				
	1	2	3	4	5
1	0.864	2.419	5.191	9.075	14.025
	( 0.864 )	( 2.419 )	( 5.191 )	( 9.075 )	( 14.025 )
2	2.419	3.447	5.873	9.591	14.154
	( 2.419 )	( 3.447 )	( 5.873 )	( 9.591 )	( 14.154 )
3	5.191	5.873	7.721	10.094	15.547
	( 5.191 )	( 5.873 )	( 7.721 )	( 10.094 )	( 15.547 )
4	9.075	9.591	10.978	13.643	17.696
	( 9.075 )	( 9.591 )	( 10.978 )	( 13.643 )	( 17.696 )
5	14.025	14.454	15.547	17.696	21.153
	( 14.025 )	( 14.454 )	( 15.547 )	( 17.696 )	( 21.153 )

표 3. 변형 energy  $U^*/E_2h^3$ 의 비교 (4변 단순지지)

	N=2		N=6	
	본 연구해	엄밀해	본 연구해	엄밀해
0.5	0.1390	0.1390	0.3195	0.3195
1.0	0.1401	0.1401	0.3032	0.3032
1.5	0.2452	0.2452	0.4821	0.4821
2.0	0.4245	0.4245	0.7431	0.7431
2.5	0.6592	0.6592	1.0387	1.0387
3.0	1.2270	1.2270	1.6576	1.6576
4.0	1.5357	1.5357	1.9676	1.9676

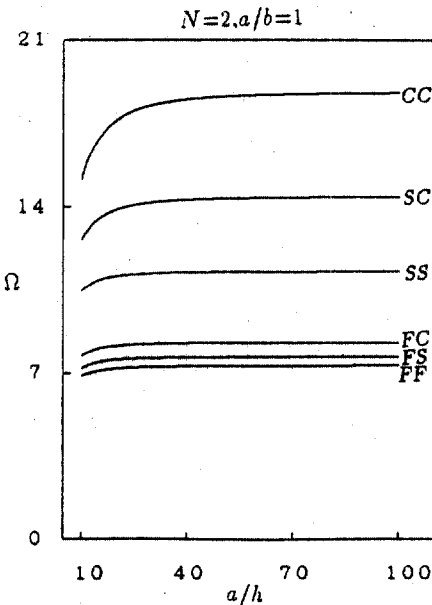


그림 3. 판두께  $a/h$ 가 고유진동수  $\Omega$ 에 미치는 영향

이와 같은 것은 선점법에 의해 얻어진 고유 Mode형태의 정도도 양호한 것을 보여 준 것이다.

#### 4.2 탄성계수비 $E_1/E_2$ 와 판두께비 $a/h$ 의 기본 고유진동수에 미치는 영향

그림 3은 적층수  $N=2$  판두께비  $a/h$ 의 기본 고유진동수  $\Omega$ 에 미치는 영향을 살펴본 것이다.

그림 4는 적층수  $N=2$  탄성계수비  $E_1/E_2$ 의 기본 고유진동수에 주어지는 영향을 판두께비  $a/h=10$ 의 경우에 대해서 본 것이다.

그림 3에서 보는 바와 같이 parameter  $E_1/E_2$ 와  $a/h$ 에 대한 고유진동수의 변화율은 각 parameter의

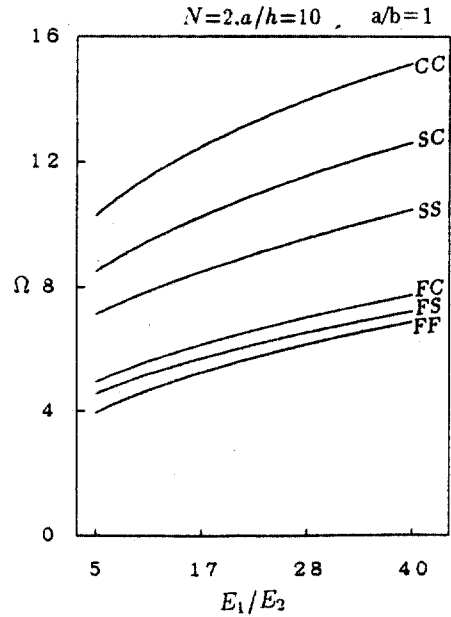


그림 4. 탄성계수비  $E_1/E_2$ 이 고유진동수  $\Omega$ 에 미치는 영향

값이 작은 영역에서 급변하는 것을 알 수가 있다. 예를 들어 parameter  $a/h$ 에 따른 고유진동수 변화를 살펴보면 고정-고정조건(CC)에서는  $a/h=10\sim30$ 에 대해서 변화율은 2.4,  $a/h=90\sim100$ 에서는 거의 0이 된다.

그림 4에 나타난 바와 같이 경계조건이 고유진동수에 주어지는 영향은 Timoshenko Beam이나 Mindlin판의 고유진동수 특성에서 예상되는 것과 같이 고정변을 포함하는 경계조건에서 보다 크게 나타나고 있다. 이는 parameter  $E_1/E_2=5\sim10$ 에 대한 변화율은 고정-고정(CC)에서는 0.22, 단순지지-단순지지에서는 0.14로서 고정지지변의 경우가 단순지지변에 비해서 고유진동수에 주어지는 영향이 큼을 알 수 있다.

이것은 주로 전단변형의 영향에 의한 것이다.

#### 4.3 변형 energy

그림 5는 적층수  $N=2$  및  $N=6$ 에 의한 전변형 energy  $U^*$ 를 보인 것이다.

그림 6는 전변형 energy  $U^*$ 을 강성  $A_{ij}$ 와  $D_{ij}$ 에 관계하는 energy  $U_{AD}$ 와 연성 강성  $B_{ij}$ 에 관계하는 변형 energy  $U_B$ 로 나누어 그 비  $U_B/U_{AD}$ 를 도시한 것이다.

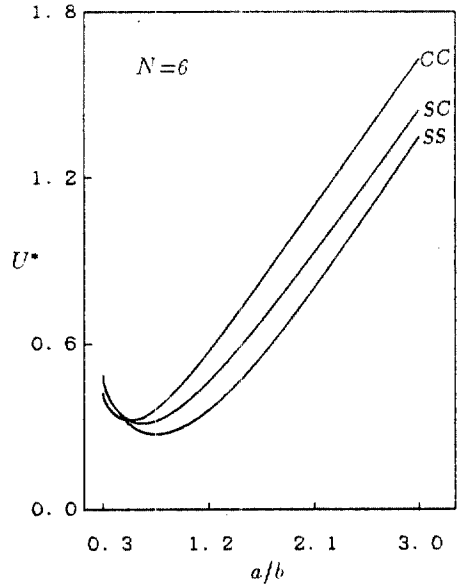
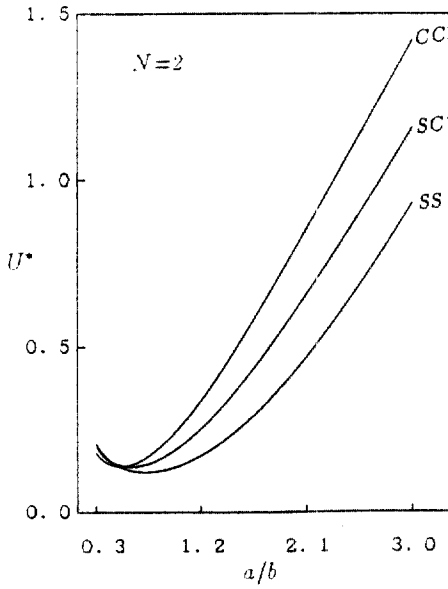


그림 5. 쏘변형 에너지의 변화

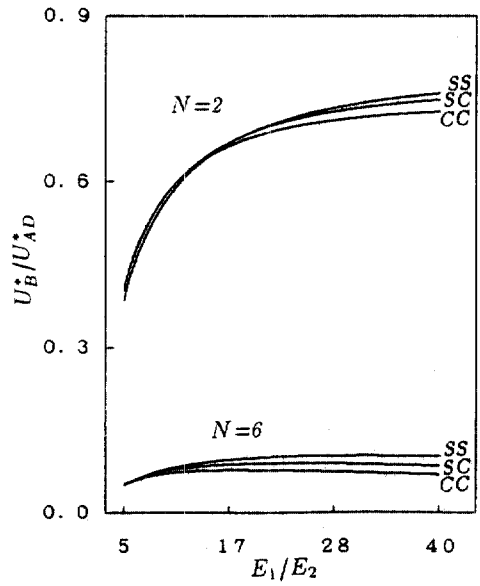
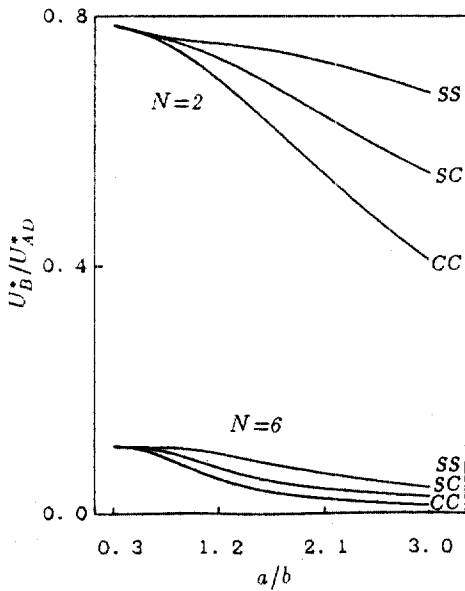


그림 6. 변형에너지에 미치는 연성강성의 영향

$a/b$ 에 대한  $U_B/U_{AD}$ 는 적층수에 관계없이 감소하고 있다.  $E_1/E_2$ 에 대한  $U_B/U_{AD}$ 는 2층의 경우  $E_1/E_2$ 의 값이 15정도까지에서 증가하지만 그 후는 그다지 변화가 없다는 것을 알 수가 있다. 그리고 6층의 경우에는 거의 변화가 없다는 것을 알 수가 있다.

이와 같이 적층수  $N$ 가 크면 클수록 연성 강성에 관계하는 energy항의 기여가 적어진다는 것을 알 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구는 해당하는 2변이 단순지지된 역대칭 cross-ply 다층판의 자유진동의 수치 해석을 행한 것으로 결과를 요약하면 다음과 같다.

1) 자유진동 해석은 선점법을 이용하였고 그 유용성을 나타내었다. 선점에 의한 Mode값을 함수값으로 하는 보간적분을 이용하면 고유진동성상에 영향을 주는 변형 energy의 정도가 양호하게 평가됨을 알 수 있었다.

2) 연성강성이 고유진동수에 주어지는 영향은 적층수의 증가와 함께 감소하게 된다. 이와 같은 전변형 energy에 있어서 연성강성의 기여하는 energy항의 수치적 변화에서도 확인할 수 있다.

3) 경계조건 차이로 인한 고유 진동수에 주어지는 영향은 Timoshenko Beam이나 Mindlin판과 마찬가지로 양단 고정 조건일 경우에 변화가 크다는 것을 알 수 있다.

4) 다층판은 얇은 판에서도 전단 변형의 영향이 나타나므로 진동해석시 가급적 전단변형의 영향을 고려하여야 할 것으로 사료된다.

## 참 고 문 헌

1. Leissa, A.W., R., Recent Studies in Plate Vibrations: 1981-85, Partll. *Complicating Effects*, *Shock Vih. Dig.*, Vol. 18, p. 23, 1986.
2. Bert, C.W., Research on Dynamics of Composite and Sandwich plates, 1979-81, *Shock Vih. Dig.*, Vol. 14, p. 17, 1982.
3. Yang, P.C., Norris, C.H. and Stavsky, T.: Elastic wave propagation in heterogeneous plates, *Int., Solids Struct.*, Vol. 2, p. 665, 1965.
4. Reddy, I.N.: Free vibration of antisymmetric, angle-ply laminted plates including transverse shear deformation by the finite element method, *J. Sound Vibr.*, Vol. 66, p. 565, 1979.
5. Khdeir, A.A.: Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including various boundary conditions, *J. Sound Vibr.*, Vol. 122, p. 377, 1988.
6. Robert, M. Jones: Buckling and Vibration of Unsymmetrically Laminated Cross-ply Rectangular Plates, *AIAA*, Vol. 11. p. 1626, 1973.
7. Mikami, T. and Yoshimura, J.: Application of the Collocation method to vibration analysis of rectangular mindline plates, *Comput. Struct.*, Vol. 18, p. 425, 1984.

(接受 : 1991, 8. 19)