

變斷面 보의 自由振動 解析

Free Vibration of Tapered Beams

李炳求* · 吳相晉** · 최규도***

Lee, Byoung Koo · Oh, Sang Jin · Choi, Gyu Do

Abstract

A method is developed for solving the natural frequencies and mode shapes of linearly variable tapered beams. The governing differential equation for the tapered beam is derived. Three kinds of cross sectional shape are considered in differential equation. The Runge-Kutta method and the determinant search method are used to perform the integration of the differential equation and to determine the natural frequencies, respectively. The hinged-hinged, hinged-clamped, clamped-clamped and free-clamped end constraints are investigated in numerical examples. The lowest four nondimensional natural frequencies are obtained as functions of d_b/d_a ratio. The effects of end constraints and cross sectional shapes on frequencies are analyzed and typical mode shapes are also presented.

要 旨

이 논문은 變斷面 보의 自由振動을 해석한 研究이다. 보의 幾何學的 形狀은 보의 斷面이 직선적으로 變하는 變斷面 보(tapered beam)를 택하였으며 均一높이 변화높이의 矩形斷面, 均一높이 變化幅의 矩形斷面, 正方形斷面 또는 圓形斷面の 3가지 斷面形狀을 고려하였다. 보의 動的 平衡方程式을 이용하여 變斷面 보의 自由振動을 지배하는 微分方程式을 유도하고, 이를 수치해석 기법인 Runge-Kutta method와 行列값 探查法을 이용하여 固有振動數와 振動形을 산출할 수 있는 수치해석 기법을 개발하였다. 또한 他 文獻의 결과와 본 연구의 결과를 비교하여 본 연구방법의 타당성을 입증하였다. 실제의 수치해석에는 힌지-힌지, 힌지-고정, 고정-고정, 자유-고정의 4가지 端部條件에 대하여 수치해석하였다. 수치해석의 결과로 $C_1 - d_b/d_a$ 의 관계를 圖示하였고, 端部條件과 斷面形狀이 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 분석하였다.

*正會員 · 圓光大學校 土木工學科 教授

**正會員 · 圓光大學校 工業技術開發研究所 研究員

***正會員 · 釜山대학교 지니어링, 지하철 7-2공구 감리단

1. 序 論

보는 土木, 建築, 機械, 船舶, 航空 等 各種 構造 工學 關聯分野에서 가장 기본이 되는 構造單位중의 하나이다. 構造物에서 斷面을 變斷面으로 하는 경우에 材料가 절약되는 경제적 이점이 있을 뿐만 아니라 미적 감각 등 여러가지 이유로 變斷面을 더욱 많이 사용하는 추세이다.

構造物에서 動荷重에 대한 抵抗性을 높이기 위해서는 構造物의 動的 特性을 파악하여야 할 필요가 있다. 특히 構造物의 固有한 特性中에 하나인 自由振動 特性을 규명하는 일은 무엇보다도 먼저 선행되어야 할 중요한 연구과제이다. 보의 自由振動을 解析한 研究들은 많은 文獻들⁽¹⁻⁵⁾에서 찾아볼 수 있으며, 本 研究와 직접 관련이 있는 연구는 다음의 논문들을 들 수 있다. Heidebrecht⁽⁶⁾는 1967년에 변단면 보의 고유진동수의 正確形態解(exact solution)에 대하여 연구하였다. 변단면으로 채택한 단면형상은 균일폭 변화높이의 구형단면이며, 보의 단부조건은 힌지-힌지에 대하여 국한하였다. Gupta⁽⁷⁾는 1985년에 8가지 단면형상에 대하여 보의 자유진동을 연구하였다. 이 연구에서는 변단면 보의 質量行列(mass matrix)과 剛度行列(stiffness matrix)을 구하고 이로부터 단순지지 및 自由-固定의 단부조건을 갖는 보의 고유진동수를 계산하였다. Gupta의 연구결과는 文獻[6]과 제1고유진동수는 비교적 잘 일치하나 높은 모드에 대해서는 비교적 큰 차이를 보이고 있다. Rao등⁽⁸⁾은 1986년에 균일폭 변화높이의 구형단면을 갖는 單純支持된 변단면 보의 고유진동수를 계산하였다. 이 논문은 횡방향 변위의 진동형을 級數解로 가정하여 고유진동수를 계산한 解析的 解法(analytical solution)이며, 계산된 고유진동수는 문헌[6]과 비교적 잘 일치하였다.

본 논문은 變斷面 보의 자유진동을 해석하여 固有振動數와 振動形을 산출할 수 있는 실제적인 방법을 개발을 하는 데 연구의 목적이 있다. 보의 단면은 보의 左端에서 右端까지 直線的으로 변화하는 變斷面 보(tapered beam)를 채택하고 특히 端部條件에 상관없이 자유진동을 해석할 수 있는 기법을 개발한다. 이를 위하여 변단면 보의 자유진동을 지배하는 微分方程式과 단부의 境界條件을 유도하고, Runge-Kutta method와 試行錯誤의 行列法 探查法

으로 數值解析하여 고유진동수와 진동형을 계산한다.

본 연구의 基本假定은 다음과 같다.

- 1) 미분방정식의 유도는 微小처짐理論에 의한다.
- 2) 자유진동의 변위는 橫方向 變位만 고려한다.
- 3) 보의 材料는 線形 彈性體이다.
- 4) 보의 자유진동은 非減衰 調和振動으로 가정한다.

2. 보의 變斷面

보의 變斷面에는 여러 형태의 단면이 있으나, 본 연구에서는 일반적으로 널리 사용되고 있는 그림 1과 같이 直線的으로 변화하는 變斷面을 채택한다. 이 그림에서 보의 길이를 l , 左端의 단면적과 단면 2차모멘트를 각각 A_a, I_a , 右端의 단면적과 단면 2차모멘트를 각각 A_b, I_b 라 한다. 이 때 임의점 x 에서의 단면적 A_x 및 단면 2차모멘트 I_x 는 각각 다음 식들과 같이 표시된다.

$$A_x = A_a [1 + (d_b/d_a - 1) x/l]^m \tag{1.1}$$

$$I_x = I_a [1 + (d_b/d_a - 1) x/l]^n \tag{1.2}$$

윗 식들에서 d_a, d_b 는 그림 2와 같이 각각 보의 좌단과 우단의 단면의 諸元들이며, 따라서 식(1.1)과 (1.2)에서 d_b/d_a 는 변단면의 기하학적 형상을 결정해주는 無次元 比이다. 또한 m, n 은 斷面形狀에 따라 정해지는 斷面形狀係數이다.

식(1.1)과 (1.2)의 變斷面 式은 어떤 단면형상에도 적용할 수 있으나, 본 연구에서는 그림 2(a), (b), (c)에서와 같이 3가지 단면형상에 대하여 斷面形狀係數

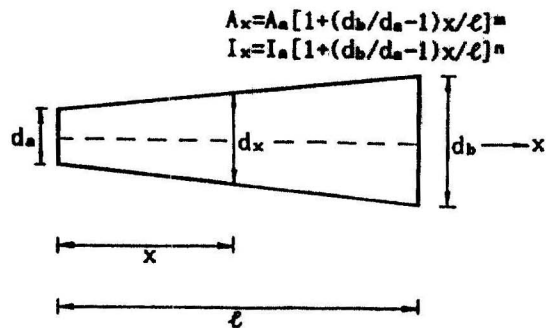
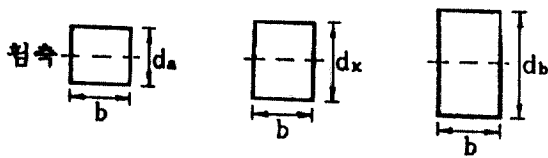
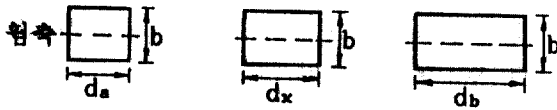


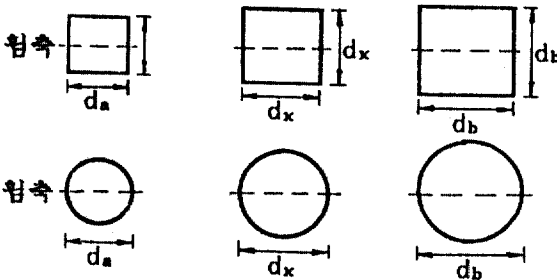
그림 1. 直線變化 變斷面 보



(a) 均一幅, 變化높이의 矩形斷面



(b) 均一높이, 變化幅의 矩形斷面



(c) 正方形 또는 圓形斷面

그림 2. 變斷面 보의 斷面形狀

m, n 을 결정한다.

그림 2와 같이 단면의 變換諸元을 d_x 라 하면 이 d_x 는 直線의으로 變化하므로 보의 任意點 x 에서 d_x 는 다음과 같이 표시된다.

$$d_x = d_a [1 + (d_b/d_a - 1) x/l] \quad (2)$$

1) 均一幅, 變化높이의 矩形斷面

그림 2(a)와 같이 均일폭 b , 變化높이 d_x 를 갖는 구형단면 보의 임의점 x 에서 A_x, I_x 는 식(2)를 이용하면 다음 식과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} A_x &= bd_x \\ &= bd_a [1 + (d_b/d_a - 1) x/l] \\ &= A_a [1 + (d_b/d_a - 1) x/l] \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$I_x = \frac{bd_x^3}{12}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{bd_a^3}{12} [1 + (d_b/d_a - 1) x/l]^3 \\ &= I_a [1 + (d_b/d_a - 1) x/l]^3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

식(1.1)과 식(3.1), 식(1.2)와 식(3.2)를 비교하면 다음과 같이 斷面形狀係數 m, n 을 구할 수 있다.

$$m = 1 \quad (4.1)$$

$$n = 3 \quad (4.2)$$

2) 均一높이, 變化幅의 矩形斷面

그림 2(b)와 같이 均일높이 b , 變化폭 d_x 를 갖는 구형단면 보의 임의점 x 에서 A_x, I_x 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} A_x &= bd_x \\ &= bd_a [1 + (d_b/d_a - 1) x/l] \\ &= A_a [1 + (d_b/d_a - 1) x/l] \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{b^3 d_x^3}{12} \\ &= \frac{b^3 d_a^3}{12} [1 + (d_b/d_a - 1) x/l]^3 \\ &= I_a [1 + (d_b/d_a - 1) x/l]^3 \end{aligned} \quad (5.2)$$

식(1.1)과 식(5.1), 식(1.2)와 식(5.2)를 비교하면 다음과 같이 단면형상계수 m, n 을 구할 수 있다.

$$m = 1 \quad (6.1)$$

$$n = 1 \quad (6.2)$$

3) 正方形斷面 또는 圓形斷面

그림 2(c)와 같은 正方形斷面 보의 임의점 x 에서 A_x, I_x 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} A_x &= d_x^2 \\ &= d_a^2 [1 + (d_b/d_a - 1) x/l]^2 \\ &= A_a [1 + (d_b/d_a - 1) x/l]^2 \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{d_x^4}{12} \\ &= \frac{d_a^4}{12} [1 + (d_b/d_a - 1) x/l]^4 \\ &= I_a [1 + (d_b/d_a - 1) x/l]^4 \end{aligned} \quad (7.2)$$

식(1.1)과 식(7.1), 식(1.2)와 식(7.2)를 비교하면 다음과 같이 斷面形狀係數 m, n 을 구할 수 있다.

$$m = 2 \quad (8.1)$$

$$n = 4 \quad (8.2)$$

그림 2(c)의 圓形斷面에 대해서도 m, n 을 구하면 식(8.1)과 (8.2)와 동일한 값을 얻는다. 식(1.2)에서 $x=l$ 일 때 $I_x=I_b$ 이므로, 식(1.2)에 $x=l, I_x=I_b$ 를 대입하고 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$d_b/d_a = (I_b/I_a)^{1/n} \quad (9)$$

위의 식(9)는 變斷面의 幾何學的 形狀을 I_b/I_a 비에 의하여 결정하는 경우에 이로부터 d_b/d_a 比를 산출할 수 있는 식이다.

3. 數學的 模型

그림 3은 自由振動하는 보의 橫方向 變位の 振動形의 한 예를 나타낸 것이다. 이 연구에서 보의 자유진동은 그림 3과 같이 調和振動을 한다고 假定한다.⁽⁹⁾ 이 때 보에 발생하는 橫方向 變位の 調和振動式은 다음 식과 같이 표시된다.

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega t) \quad (10)$$

윗 식에서 w_x 는 調和振動의 振幅으로 x 만이 函數이다. 또한 ω 는 固有角振動數이고 t 는 時間이다.

動的 平衡方程式을 이용하면 구조물의 자유진동을 지배하는 偏微分方程式을 유도할 수 있으며, 잘 알려진 바와 같이 이 편미분방정식은 다음 (11)식과 같다.⁽¹⁰⁾

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + \rho A_x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

윗 식에서 E 는 彈性係數, ρ 는 單位體積當 質量이다.

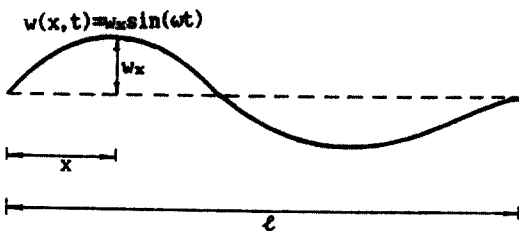


그림 3. 橫方向 變位の 振動形(한지단 = 고정단)

식(11)은 다음 식과 같이 展開된다.

$$E \frac{d^2 I_x}{dx^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2E \frac{dI_x}{dx} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + EI_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A_x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

식(1.2)로 부터 $dI_x/dx, d^2 I_x/dx^2$ 을 구하면 다음과 같다.

$$dI_x/dx = n(d_b/d_a - 1) I_a/l [1 + (d_b/d_a - 1) x/l]^n \quad (13.1)$$

$$d^2 I_x/dx^2 = n(n-1) (d_b/d_a - 1)^2 I_a/l^2 [\times 1 + (d_b/d_a - 1) x/l]^{n-2} \quad (13.2)$$

미분방정식을 無次元으로 유도하기 위하여 보의 軸方向 座標 x 및 橫方向 變位の 振幅 w_x 를 보의 길이 l 로 正規化하면 다음과 같다.

$$\xi = x/l \quad (14.1)$$

$$\eta = w_x/l \quad (14.2)$$

이제 식(12)에 식(1.1), (1.2), (13.1), (13.2) 및 식(10)으로 부터 $\partial^2 w/\partial x^2, \partial^3 w/\partial x^3, \partial^4 w/\partial x^4, \partial^2 w/\partial t^2$ 을 구하여 대입하고 양변을 $\sin(\omega t)$ 로 나누고 식(14.1)과 (14.2)의 無次元 變數들을 이용하면 다음과 같은 變斷面 보의 自由振動을 支配하는 無次元 微分方程式이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \eta}{d\xi^4} &= -2n(d_b/d_a - 1) [1 + (d_b/d_a - 1)\xi]^{-1} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} \\ &- n(n-1) (d_b/d_a - 1)^2 [1 + (d_b/d_a - 1)\xi]^{-2} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \\ &+ C_i^2 [1 + (d_b/d_a - 1)\xi]^{m-n} \eta \end{aligned} \quad (15)$$

윗 식에서 C_i 는 無次元 固有振動數로 다음 식과 같고 i 는 모드(mode)數이다.

$$(16)_i = \omega_i^2 \left(\frac{\rho A_b}{EI_a} \right)^{1/2}, \quad i=1, 2, 3, 4 \dots$$

等斷面($d_b/d_a=1$)인 경우에 식(16)의 미분방정식은 $d^4 \eta/d\xi^4 = C_i^2 \eta$ 로 간단해지고, 단면형상계수 m, n 은 당연히 자유진동에 영향을 미치지 못한다.

본 논문에서는 서론에서 언급한 바와 같이 端部條件에 상관없이 自由振動을 해석하기 위하여 한지단, 固定端 및 自由端의 境界條件을 유도한다.

먼저 한지단에서 횡방향 변위 및 휨 모멘트가 "0"

이므로 다음과 같은 힌지단 경계조건이 유도된다.

$$\eta=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{에서} \quad (17.1)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{에서} \quad (17.2)$$

固定端에서 횡방향 변위 및 回轉角이 "0"이므로 다음과 같은 고정단 경계조건이 유도된다.

$$\eta=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{에서} \quad (18.1)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi}=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{에서} \quad (18.2)$$

마지막으로 自由端에서 휨 모멘트와 전단력이 "0"이므로 다음과 같은 자유단 경계조건이 유도된다.

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{에서} \quad (19.1)$$

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3}=0, \xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{에서} \quad (19.2)$$

이상에서 식(15)가 變斷面 보의 自由振動을 지배하는 無次元 微分方程式이며, 힌지단의 경계조건은 식(17.1)과 (17.2), 固定端의 경계조건은 식(18.1)과 (18.2), 自由端의 경계조건은 식(19.1)과 (19.2)와 같다.

4. 數値解析 方法 및 數値解의 檢證

變斷面 보의 自由振動을 지배하는 식(15)의 미분방정식을 수치해석 기법에 의해 數値解析하여 無次元 固有振動數 C_i 및 그에 대응하는 振動形 $\eta=\eta_i(\xi)$ 를 구한다.

微分方程式의 수치적분은 1계 미분방정식에만 가능하기 때문에 식(15)의 미분방정식을 수치적분하기 위해서는 이를 4개의 1階 微分方程式으로 변환하여 初期值 問題(initial value problem)를 형성한다. 初期值 문제를 풀기 위해서는 左端($\xi=0$)에서 4개의 초기조건이 필요하지만 앞에서 언급한 2개의 경계조건만을 알고 있기 때문에 나머지 2개의 초기조건을 2쌍 가정하여 좌단으로부터 우단까지 각각의 초기조건별로 2회 수치적분한다.

수치적분 전에 먼저 미분방정식에 포함된 固有值 C_i 값을 가정한 후 수치 적분을 시행한다. 가정한 C_i 값이 자유진동의 고유치인지는 미분방정식을 수

치적분한 결과로 얻은 右端($\xi=1$)의 경계조건이 실제의 경계조건을 만족하는지의 여부로 판단한다. 계산된 우단의 경계조건은 앞에서 설명한 바와 같이 가정된 초기조건으로부터 얻어진 결과이므로 2회의 수치적분된 결과로부터 얻어진 2개의 경계조건을 1次結合(linear combination)을 이용하여 行列값으로 나타낸다. 가정한 C_i 값이 자유진동의 고유치이면 이 행렬값은 식(17.1)~(19.2)에서 보인 바와 같이 "0"이 되어야 한다. 따라서 본 연구의 수치해석 알고리즘은 행렬값이 "0"인 C_i 값을 찾는 문제로 形成된다. 이를 위하여 미분방정식의 數値積分은 초기치 문제(initial value problem)인 Runge-Kutta method⁽¹¹⁾를 이용하였고 우단($\xi=1$)의 경계조건을 만족하는 즉 행렬값이 "0"가 되는 固有值 C_i 값은 경계조건 문제(boundary value problem)와 조합한 試行錯誤의 行列값 探查法⁽¹²⁾을 이용하여 찾았다. 수치해석 과정에서 정확하게 행렬값이 "0"되는 C_i 값을 찾을 수 없으므로 계산된 행렬값의 절대값이 1×10^{-7} 보다 작으면 이에 대응하는 C_i 값을 자유진동의 고유치로 보았다.

이상의 수치해석법을 보의 端部條件, d_b/d_a 比, 斷面形狀係數 m, n 을 입력하면 無次元 固有振動數 C_i 및 횡방향 변위의 振動形 $\eta=\eta_i(\xi)$ 가 출력되도록 FORTRAN 77語로 프로그램하였다. 실제의 數値解析 例에서 보의 端部條件은 힌지-힌지, 힌지-固定, 固定-固定, 자유-고정의 4가지 단부조건에 대하여 제 4모드까지 계산하였다.

본 연구의 數値解析 結果를 檢證하기 위하여 먼저 等斷面($d_b/d_a=1$)에 대하여 제 5모드까지 계산하여 文獻[13]과 비교한 결과, 위의 4가지 端部條件 뿐만 아니라 自由-自由의 단부조건에 대해서도 無次元 固有振動數 C_i 값이 有效숫자 5자리까지 정확하게 일치하였다. 또한 η 의 振動形도 제 5모드까지 모두 정확하게 일치하는 것을 확인하였다.

表 1은 端部條件이 힌지-힌지이고 斷面形狀係數가 ($m=1, n=3$)인 變斷面 보에 대한 文獻[6], [7], 構造解析用 汎用 프로그램인 SAP 80 그리고 본 연구의 C_i 값들을 비교한 표이다. 이 表에서 볼 수 있듯이 文獻[6], SAP 80 그리고 본 연구의 C_i 값들은 아주 우수하게 서로 접근하여 本 研究結果의 妥當性을 檢證할 수 있다. 文獻[7]의 경우에는 타문헌들과 비교하여 제 1모드에 대해서는 잘 일치하나 제 2, 3모드에서는 다소 차이가 있음을 알 수 있다.

표 1. 他 文獻과 本 研究의 C_i 값 比較(힌지-힌지, $m=1, n=3$)

d_b/d_a	比較文獻	$C_{i=1}$	$C_{i=2}$	$C_{i=3}$
1.2	文獻 [6]	10.827	43.359	97.543
	文獻 [7]	10.866	48.136	121.495
	SAP 80	10.827	43.356	97.533
	本研究	10.827	43.357	97.535
1.5	文獻 [6]	12.173	48.967	110.126
	文獻 [7]	12.216	54.494	136.713
	SAP 80	12.172	48.961	110.066
	本研究	12.172	48.961	110.066
1.9	文獻 [6]	13.845	56.170	126.320
	文獻 [7]	13.894	62.782	157.073
	SAP 80	13.843	56.147	126.060
	本研究	13.842	56.147	126.059

*SAP 80 : 3次元 보 要素, 分割 要素數 100을 利用

*本研究 : Runge-Kutta method 적용시 段階길이 $\Delta\xi$ 는 0.01을 사용

표 2. SAP 80과 本 研究의 C_i 값 比較($d_b/d_a=1.5, m=1, n=3$)

端部條件	比較文獻	$C_{i=1}$	$C_{i=2}$	$C_{i=3}$	$C_{i=4}$
힌지-固定	SAP 80	20.140	62.893	130.092	221.709
	本研究	20.141	62.897	130.091	221.697
固定-固定	SAP 80	27.706	76.345	149.673	247.443
	本研究	27.705	76.341	149.634	247.335
힌지-固定	SAP 80	5.533	29.441	78.511	151.807
	本研究	5.533	29.442	78.517	151.805

表 2는 $d_b/d_a=1.5, (m=1, n=3)$ 인 變斷面 보에 대한 SAP 80과 본 연구의 C_i 값을 비교한 표이다. 역시 이 표에서도 SAP 80과 본 연구의 결과가 아주 우수하여 본 연구결과의 타당성을 입증할 수 있다.

또한 表 2에서의 ($m=1, n=3$)의 斷面形狀 뿐만 아니라 ($m=1, n=1$)과 ($m=2, n=4$)인 단면형상에 대해서도 SAP 80의 결과와 本 研究의 결과가 아주 우수하게 접근하는 것을 확인할 수 있었지만 지면 관계상 재제는 생략한다.

이상의 數值解析 결과의 檢證으로 부터 본 연구에서 誘導한 微分方程式, 境界條件 및 數值解析 方法이 모두 타당함을 입증할 수 있었다.

5. 數值解析 例題 및 考察

실제의 수치적용 例를 실행하기 전에 收斂解析을 시행하여 Runge-Kutta method의 段階길이(step size) $\Delta\xi$ 를 결정해야 한다. 그림 4는 힨지-힌지, ($m=1, n=3$), $d_b/d_a=2$ 인 變斷面 보의 $C_{i=1}/\Delta\xi$ 의 曲線을 나타내고 있다. 이 그림에서 $1/\Delta\xi$ 는 段階길이 $\Delta\xi$ 의 逆數로 보의 支間길이의 分割數를 의미한다. 이 그림이 보여주는 바와 같이 $i=1, 2$ 인 제 1, 2 모드에 대해서는 $1/\Delta\xi$ 를 10으로 하여도 충분히 收斂된 해를 구할 수 있었으며, $i=3, 4$ 인 제 3, 4모드의 경우에도 $1/\Delta\xi$ 가 20 즉 段階길이 $\Delta\xi$ 가 0.05이면

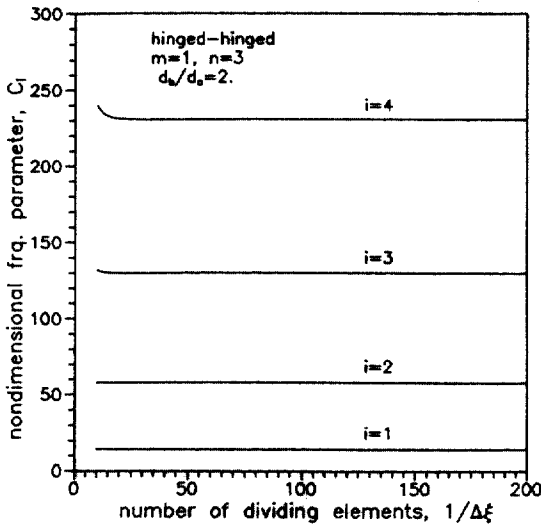


그림 4. 數値解의 收斂解析

충분히 수렴된 數値解를 얻을 수 있다. 본 연구에서 모든 數値解는 $1/\Delta\xi$ 를 100으로 하여 수치해석하였다. 이 경우에 等斷面($d_b/d_a=1$)인 보에서 端部條件에 상관없이 제 5모드까지 C_i 값이 有效숫자 5자리 이상 일치하는 것을 文獻[13]과의 비교로 확인하였다.

表 3은 동일한 變斷面に 대하여 端部條件이 無次元 固有振動數에 미치는 영향을 분석한 표이다. 이 表에서 볼 수 있듯이 언제나 無次元 固有振動數 C_i 값은 固定-固定, 힌지-固定, 힌지-힌지, 自由-固定的

端部條件 순서로 큰 것을 알 수 있었다.

그림 5, 6, 7, 8은 C_i-d_b/d_a 의 관계를 ($m=1, n=3$)인 斷面形狀에 대하여 단부조건별 그립에 나타난 것이다. 공학적으로 d_b/d_a 값은 0~3의 범위이면 충분하므로 d_b/d_a 값을 0.01에서 3까지 변화시키면서 數値解析하였다. 이 그립들에서 볼 수 있듯이 d_b/d_a 값이 增加하면 C_i 값도 增加하는 것을 알 수 있다. 또한 d_b/d_a 값이 1이상에서는 C_i-d_b/d_a 가 거의 直線的 關係에 있음을 알 수 있다. 例로서 그림 5의 힌지-힌지($m=1, n=3$)의 端部條件에 대하여 C_i-d_b/d_a 의 關係를 直線式으로 回歸分析하면 다음 식들과 같은 無次元 固有振動數 方程式을 구할 수 있다.

$$C_{i=1} = 6.704 + 4.028 d_b/d_a \quad (r^2 = 0.998) \quad (20.1)$$

$$C_{i=2} = 22.41 + 17.62 d_b/d_a \quad (r^2 = 0.999) \quad (20.2)$$

$$C_{i=3} = 51.06 + 39.13 d_b/d_a \quad (r^2 = 0.999) \quad (20.3)$$

$$C_{i=4} = 91.44 + 69.02 d_b/d_a \quad (r^2 = 0.999) \quad (20.4)$$

단, $1 \leq d_b/d_a \leq 3$

식(20.1)~(20.4)에서 r 는 相關係數이며, 이 식들에서 볼 수 있듯이 r^2 이 거의 1과 같아서 C_i 와 d_b/d_a 는 완전 相關關係에 있다고 볼 수 있다. 이와 같은 사실로 미루어 그림 5, 6, 7, 8에서 C_i-d_b/d_a 의 關係를 直線式 또는 적당한 曲線式으로 回歸分析하여 無次元 固有振動數 方程式을 구할 수 있을 것으로 생각된다.

表 3. 端部條件이 C_i 값에 미치는 영향($d_b/d_a=1.5$)

斷面形狀	端部條件	$C_{i=1}$	$C_{i=2}$	$C_{i=3}$	$C_{i=4}$
$m=1, n=3$	힌지-힌지	12.172	48.961	110.066	195.575
	힌지-固定	20.141	62.897	130.091	221.697
	固定-固定	27.705	76.341	149.634	247.33
	自由-固定	5.533	29.442	78.517	151.805
$m=1, n=1$	힌지-힌지	9.854	39.493	88.850	157.942
	힌지-固定	15.812	50.334	104.619	178.643
	固定-固定	22.306	61.581	120.803	199.755
	自由-固定	3.973	22.891	62.542	121.757
$m=2, n=4$	힌지-힌지	12.074	49.054	110.212	195.748
	힌지-固定	20.697	63.498	130.726	222.350
	固定-固定	27.789	76.454	149.759	247.466
	自由-固定	6.219	30.581	79.694	153.011

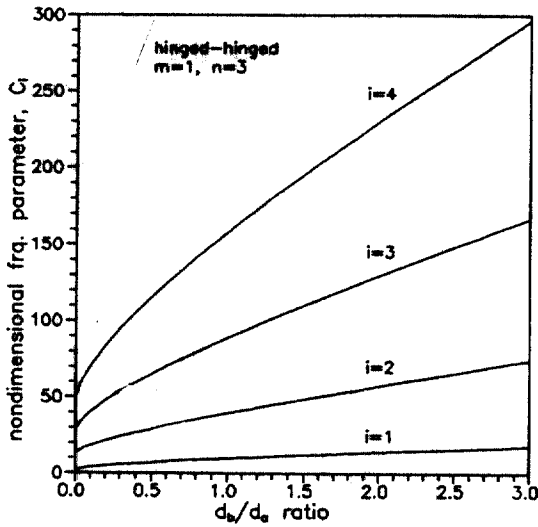


그림 5. C_i-d_b/d_a 곡선(힌지-힌지)

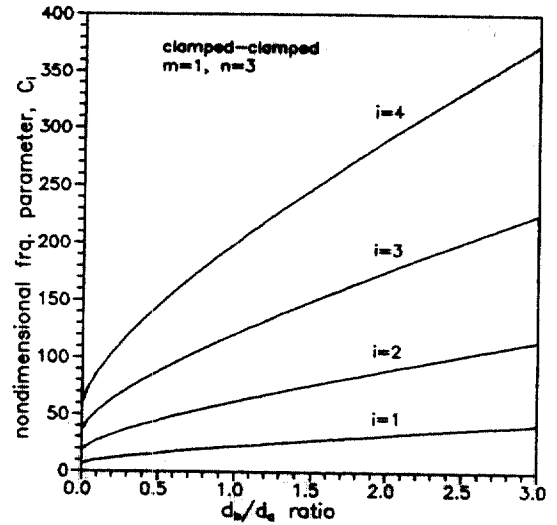


그림 7. C_i-d_b/d_a 곡선(고정-고정)

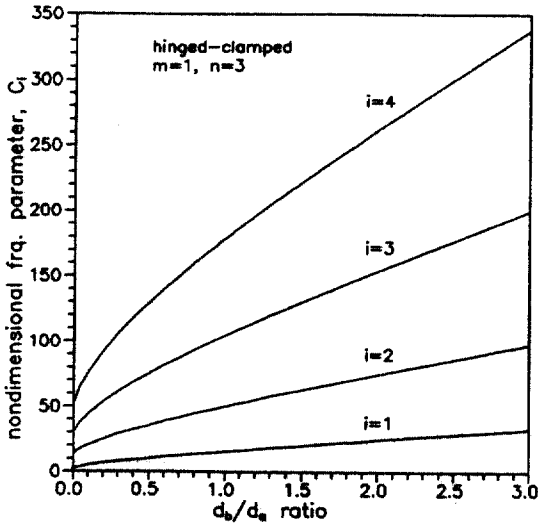


그림 6. C_i-d_b/d_a 곡선(힌지-고정)

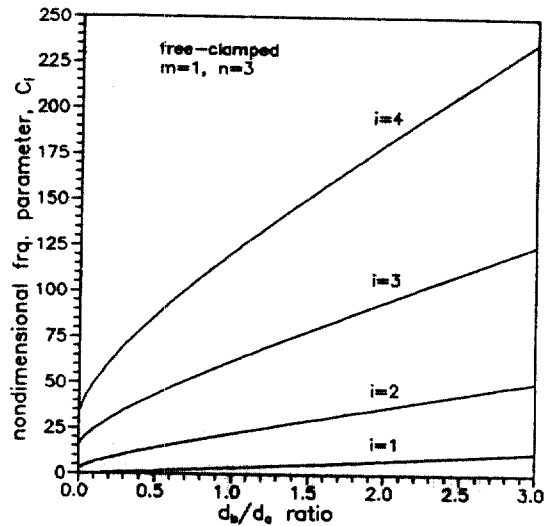


그림 8. C_i-d_b/d_a 곡선(자유-고정)

참고로 $d_b/d_a=1.5$, ($m=1, n=3$)이고 힌지-고정, 자유-고정의 端部條件을 갖는 변단면 보에 대한 振動形의 例를 각각 그림 9(a), (b)에 나타내었다.

表 4는 斷面形狀이 固有振動數에 미치는 영향을 分析하기 위하여 I_b/I_a 값을 일치시켰을 때의 無次元 固有振動數 C_i 값들을 단면형상별로 比較한 표이다. 이때 I_b/I_a 값을 먼저 주면 식(9)에 의하여 d_b/d_a 값이 계산되므로 미분방정식 식(15)를 수정없이 사용할 수 있다. 이 表에서 알 수 있듯이 I_b/I_a 값이

같을 때 無次元 固有振動數 C_i 값은 ($m=1, n=3$), ($m=2, n=4$), ($m=1, n=1$)의 단면형상 순서로 큰 것을 알 수 있다.

6. 結 論

이 논문은 變斷面보의 自由振動을 해석한 연구이다. 이 연구에서는 단면이 직선적으로 변화하는 변 단면 보의 자유진동을 지배하는 微分方程式과 힌지

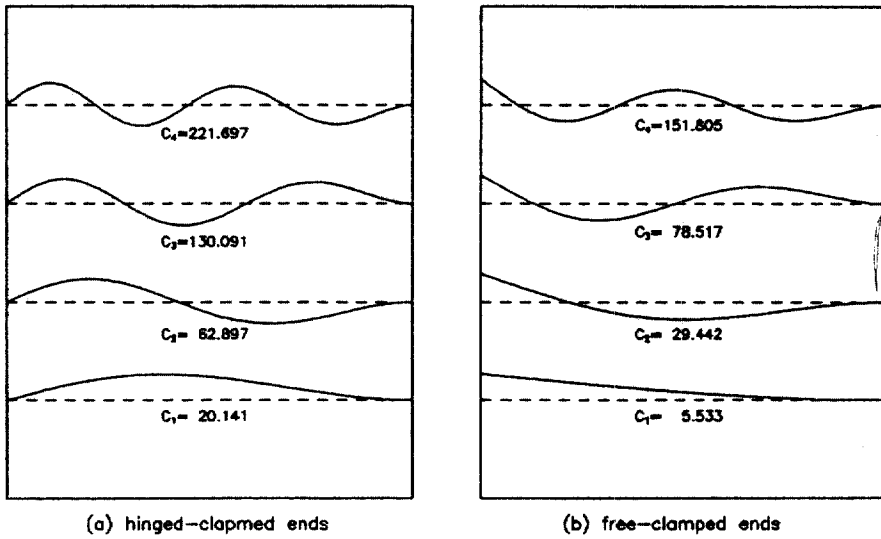


그림 9. 振動形의 예($d_b/d_a=1.5$, $m=1$, $n=3$)

表 4. 斷面形狀이 C_i 값에 미치는 影響($l_b/l_a=3.0$)

端部條件	斷面形狀		無次元 固有振動數 C_i			
	m	n	i=1	i=2	i=3	i=4
힌지-힌지	1	3	11.920	47.899	107.695	191.380
	1	1	9.765	39.555	88.970	158.098
	2	4	11.316	45.591	102.512	182.165
힌지-固定	1	3	19.612	61.450	127.210	216.863
	1	1	16.299	50.807	105.127	179.171
	2	4	18.780	58.612	121.206	206.538
固定-固定	1	3	27.111	74.710	146.443	242.064
	1	1	21.916	61.019	120.165	199.071
	2	4	26.833	71.146	139.423	230.434
自由-固定	1	3	5.295	28.601	76.624	148.347
	1	1	4806	24.441	64.234	123.550
	2	4	5.180	27.448	73.157	141.423

端, 固定端 및 自由端의 境界條件을 유도하였다. 이 미분방정식을 Runge-Kutta method와 試行錯誤의 行列값 探查法을 이용하여 固有振動數와 振動形을 계산할 수 있는 數值解析 方法을 개발하였으며, 他 文獻과 본 연구의 結果를 比較하여 본 研究方法의 妥當性을 立證하였다.

實際의 數值解析 例에서는 3가지 단면형상과 4 가지 단부조건에 대하여 수치해석하였으며, 일련의

수치해석 예를 分析하여 다음과 같은 사실을 알았다.

1. 數值解析時 段階길이를 0.05로 하면 充分한 精度의 數值解를 얻을 수 있다.
2. d_b/d_a 값이 증가하면 無次元 固有振動數도 증가한다.
3. 힨지-힌지, ($m=1$, $n=3$)인 變斷面 보의 無次元 固有振動數 方程式으로 식(20.1)~(20.4)를 提案한다.
4. 變斷面의 幾何學的 形狀이 같을 때 무차원 고

유진동수는 固定-固定, 힌지-固定, 힌지-힌지, 自由-固定의 端部條件 순서로 크다.

5. I_b/I_a 값이 같을 때 無次元 固有振動數는 ($m=1, n=3$), ($m=2, n=4$), ($m=1, n=1$)의 斷面形狀 순서로 크다.

參 考 文 獻

1. A. K. Gupta, "Vibration Analysis of Linearly Tapered Beams Using Frequency-Dependent Stiffness and Mass Matrices", Thesis presented to Utah State University, Logan, Utah, in 1975, partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
2. H. C. Wang, "Generalized Hypergeometric Function Solutions on the Transverse Vibration of a Class of Non-Uniform Beams", Journal of Applied Mechanics, Vol. 36, 1967, pp. 702-708.
3. W. Y. Tseng, "Nonlinear Vibrations of Straight and Buckled Beams Under Harmonic Excitation", M. I. T., Aeroelastic and Structures Research Lab. Report TR 159-1, Air Force Office of Scientific Research, AFOSR 69-2157 TR, Nov. 1969; also written under same title as PhD thesis, M. I. T., Department of Aeronautics and Astronautics, Nov. 1969.
4. J. G. Easley, "Large Amplitude Vibration of Buckled Beams and Rectangular Plates", AIAA Journal, Dec. 1964, pp. 2207-2209.
5. W. Y. Tseng and J. Dugundji, "Nonlinear Vibrations of a Buckled Beam Under Harmonic Excitation", Journal of Applied Mechanics, Vol. 70, 1971, pp. 467-476.
6. A. C. Heidebrecht, "Vibration of Non-Uniform Simply-Supported Beams", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 93, No. EM2, 1967, pp. 1-15.
7. A. K. Gupta, "Vibration of Tapered Beams", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 11, No. 1, 1985, pp. 19-36.
8. Hota V. S. Ganga Rao and C. C. Spyrakos, "Closed Form Series Solutions of Boundary Value Problems with Variable Properties", Computers & Structures, Vol. 23, No. 2, 1986, pp. 211-215.
9. Josef Henrych, The Dynamics of Arches and Frames, Elsevier Scientific Publishing Company, 1981.
10. Hota V. S. Ganga Rao and C. C. Spyrakos, ibid.
11. Melvin J. Maron, Numerical Analysis, Macmillan Publishing Co. Inc., 1982.
12. B. K. Lee and J. F. Wilson, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature", Journal of Sound and Vibration, Vol. 136, No. 1, 1990, pp. 75-89.
13. Mario Paz, Structural Dynamics, Van Nostrand Reinhold Company, 1991.

(接受 : 1991. 2. 18)