

## 복합적층구조 해석을 위한 개선된 쉘요소

An Improved Degenerated Shell Element for Analysis of  
Laminated Composite Structures

최창근\* · 유승운\*\*

Choi, Chang Koon · Yoo, Seung Woon

## Abstract

The paper is concerned with the analysis of laminated composite shell structures using an improved degenerated shell element. In the formulation of the element stiffness, the combined use of three different techniques was made. They are; 1) an enhanced interpolation of transverse shear strains in the natural coordinate system to overcome the shear locking problem; 2) the reduced integration technique in in-plane strains to avoid the membrane locking behavior; and 3) selective addition of the nonconforming displacement modes to improve the element performances. This element is free of serious shear/membrane locking problems and undesirable compatible/commutable spurious kinematic deformation modes. An incremental total Lagrangian formulation is presented which allows the calculation of arbitrarily large displacements. The resulting non-linear equilibrium equations are solved by the Newton-Raphson method. The versatility and accuracy of this improved degenerated shell element are demonstrated by solving several numerical examples.

## 요 지

본 논문에서는 개선된 감절점(degenerated) 쉘 유한요소의 복합적층을 갖는 쉘구조에의 적용성을 고찰하였다. 본 논문의 개선된 쉘 요소는 shear locking 해결에 우수한 결과를 보인 가정된 전단변형도를 대치사용하고, membrane locking 현상을 제거하기 위해 평면내 변형도의 구성시 감차적분을 행하며, 쉘요소 자체의 거동을 보완하기 위해 비적합변위형을 선택적으로 추가하였다. 본 요소는 shear/membrane locking이 발생하지 않으며, 전달가능한 거짓 영에너지모드도 나타나지 않는다. 유한변형을 고려한 기하학적 비선형 방정식을 total Lagrangian 수식화를 사용하여 정형화 하였고, 비선형 수치해석은 Newton-Raphson 반복법으로 반복 계산한다. 여러 예제해석을 통하여 본 개선된 쉘 유한요소의 유용성과 정확도를 고찰하였다.

\* 정희원. 한국과학기술원 토목공학과 교수, 공·박

\*\* 정희원. 삼성종합건설기술연구소, 선임연구원, 공·박

# 1. 서 론

셸 및 평판구조는 그 자체의 구조력학적 효율성과 미학적 특성때문에 여러분야의 공학적 구조에 가장 많이 사용되는 구조형태 중의 하나이다. 이러한 구조의 기존재료로서는 철강제품이나 콘크리트가 대부분 차지하고 있으나 최근에는 대체재료로서 복합재료가 여러산업에서 각광받고 있다. 이러한 복합재료는 그 자체의 높은 비강성(specific stiffness), 비강도(specific strength)와 내구성 등의 특징을 갖고 있다. 처음 항공, 우주분야에서 사용이 시작되어 제품의 우수성뿐만 아니라 그 가격이 점차 낮아짐에 따라 여러 분야에서 사용되어지고 있다.

복합적층(laminated composite) 구조물은 각 단층(lamina)의 방향성과 적층구조에 기인한 이방성(anisotropic)에 의하여 복잡한 기계적인 거동을 보이게 되는데 이와같은 복합적층 셸구조의 해석방법으로 본 연구에서는 유한요소법을 채택한다. 유한요소법은 그동안 많은 고체역학의 복잡한 문제의 해석에서 그 효율성이 입증되었고 특히 임의의 형상을 갖는 구조물을 그대로 모형화하여 해석할 수 있는 점에 있어서 그 범용성을 인정받고 있다.

본 연구에서 사용된 개선된 감절점(degenerated) 셸요소는 shear locking 현상을 제거하기 위해 효과적인 가정된 전단변형도장(shear strain fields)를 대치 사용하고, 막변형도에 감차적분기법을 사용함으로써 membrane locking 현상을 제거하며, 셸요소 전체의 거동을 유연하게 하기 위해 비적합변위형을 선택적으로 추가한다.<sup>(1)</sup> 이와같은 개선된 셸요소는 shear 또는 membrane locking 현상이 완전히 제거되며, 전달가능한 거짓 영에너지모드(commutable spurious zero energy mode)도 발생하지 않으며 수렴성이 양호하였다.<sup>(11)</sup>

본 연구에서는 이와같이 등방성재료 문제에서 우수한 결과가 보여준 개선된 셸 유한요소를 복합적층을 갖는 셸구조 문제에 그 적용범위를 확장한다. 기하학적 비선형거동을 total Lagrangian 수식화를 사용하고, 비선형 수치해석은 Newton-Raphson 반복법을 사용하여 셸의 비선형 해석을 행한다.

## 2. 감절점(Degenerated) 셸 유한요소

본 연구의 곡면 셸요소의 정형화에는 어떠한 특

별한 셸이론에 구애됨이 없이 다음과 같은 기본적인 가정만을 바탕으로 한다. 첫째는 변형전에 중립곡면에 수직인 직선면은 변형후에도 직선을 유지한다. 이 가정은 많은 연구자들이 선형뿐만 아니라 비선형해석에서도 많이 사용하여 왔다.<sup>(8)</sup> 둘째는 중립면에 수직인 응력성분은 없다고 생각한다. 일반적으로 셸요소의 절점에서는 3개의 이동변위(u, v, w)와 2개의 회전변위( $\alpha$ ,  $\beta$ )를 갖는다. 이 논문에서 사용하는 요소에서는 이동변위와 회전변위를 각각 독립적으로 가정하기 때문에 전단변형이 허용된다.

### 2.1 셸요소의 형상화

감절점 셸요소의 정형화에는 그림 1과 같이 전체좌표계, 절점좌표계, 곡면좌표계 및 국부좌표계 등을 함께 사용한다. 셸의 기하학적 형상은 중립면의 절점좌표와 중립면에 수직인 벡터들을 사용하여 표시할 수 있다. 요소 내부의 직교좌표는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} + \sum_{\text{mid}} N_k(\xi, \eta) \zeta \frac{h_k}{2} \begin{bmatrix} \bar{v}_{3k}^x \\ \bar{v}_{3k}^y \\ \bar{v}_{3k}^z \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 n은 절점수이며  $N_k(\xi, \eta)$ 는 중립면의 형상함수,  $h_k$ 는 k절점의 셸두께,  $\xi, \eta, \zeta$ 는 고려하는

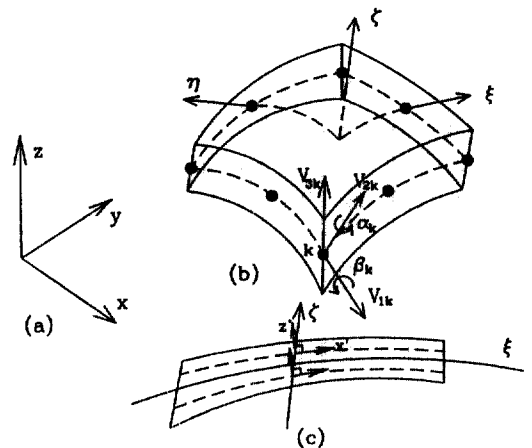


그림 1. Coordinate systems in degenerated shell element; (a) global (b) nodal and curvilinear (c) local coordinate.

점의 곡면좌표,  $v_3 = x_{top} - x_{bot}$ 으로 정의되며,  $\bar{v}_3$ 는  $v_3$ 의 단위벡터이다. 또한 요소의 변위장은 중립면에 위치한 각각의 절점에서 전체좌표계 방향의 변위자유도와 셸의 중립면의 각각의 절점에서 정의되는 절점좌표계에 관한 회전자유도 등 모두 5개의 절점자유도로써 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} + \sum_{mid} N_k(\xi, \eta) \zeta b_k \quad (2)$$

여기서  $b_k$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$b_k = \frac{h_k}{2} (\bar{v}_3 - v_3) \quad (3)$$

위의 식에서  $\bar{v}_3$  벡터는  $v_3$ 의 변형된 후의 상태를 나타낸다.

현재 고려대상으로 한 복합적층구조의 경우 여러 단층으로 구성되어 있으므로 그림 2에 도시한 셸의 두께와 각 단층의 두께는 각각의 절점에서의 단층 두께로부터 보간하여 계산된다.  $t_{ij}$ 를  $i$ 점에서  $j$ 번째 단층의 두께라고 하고  $h_i$ 를 절점  $i$ 에서의 셸두께,  $t_j$ 는 요소 내부에서  $j$ 번째 단층의 두께로 표현하면 이들은 아래의 식으로 계산할 수 있다.

$$t_j = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) t_{ij} \quad (4a)$$

$$h_i = \sum_{j=1}^m t_{ij} \quad (4b)$$

$$h = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) h_i \quad (4c)$$

여기서  $n$ 은 절점수,  $m$ 은 단층수이다.

## 2.2 유한요소 방정식

비선형해석에서의 비선형효과는 응력과 변형도의 기준좌표에 대한 표현관계와 고차항의 고려에 의한 비선형효과로써 기준좌표의 선택에 따라 두가지로 나누어진다. 즉, 초기모양을 기준으로하는 total Lagrangian

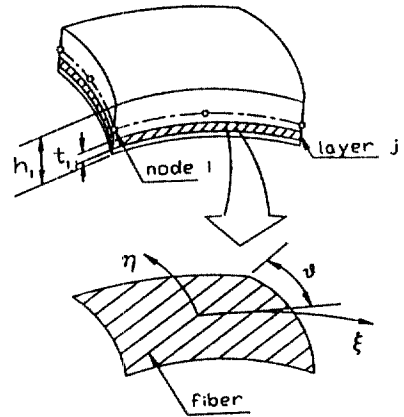


그림 2. Geometry of laminated shell element.

rangian 수식과 증분이 시작할 때의 모양을 기준으로 하는 updated Lagrangian 수식으로 구분된다. 본 연구에서는 total Lagrangian 수식을 이용하였다. 셸두께방향(즉  $z'$  방향)으로 응력이 0이라는 가정을 간단히 수용하기 위해서는 변형도항을 국부좌표계로 표현하는 것이 편리하다. 본 연구에서는 total Lagrangian 수식화에서 Green-Lagrangian 변형도와 Piola-Kirchhoff 응력을 사용한다. 미소 증분응력과 미소 증분변형도 관계는 재료성질행렬  $D^*$ 로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta\sigma = D^* \delta\varepsilon \quad (5)$$

여기서

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]^T \quad (6)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T \quad (7)$$

국부좌표계에 의한 Green-Lagrangian 변형도는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\varepsilon = \varepsilon^L + \varepsilon^{NL} \quad (8)$$

여기서  $\varepsilon^L$ 는 선형부분이고  $\varepsilon^{NL}$ 은 비선형부분이며, 각각의 경우는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\varepsilon^L = \begin{bmatrix} u',_x \\ v',_y \\ u',_x + v',_x \\ u',_z + w',_x \\ v',_x + w',_y \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^{NL} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[(u',_x)^2 + (v',_x)^2 + (w',_x)^2] \\ \frac{1}{2}[(u',_y)^2 + (v',_y)^2 + (w',_y)^2] \\ u',_x u',_y + v',_y v',_x + w',_x w',_y \\ u',_x u',_z + z v',_x + w',_x w',_z \\ u',_y u',_z + z v',_y + w',_x w',_z \end{bmatrix} \quad (9)$$

또한, Green-Lagrangian 변형도는 변위의 미분항으로 나타낼 수 있다. 즉,  $\mathbf{E}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathbf{E} = [\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z]^T \quad (10)$$

여기서

$$\mathbf{E}_x = [u',_x, v',_x, w',_x]^T \quad (11a)$$

$$\mathbf{E}_y = [u',_y, v',_y, w',_y]^T \quad (11b)$$

$$\mathbf{E}_z = [u',_z, v',_z, w',_z]^T \quad (11c)$$

그러면

$$\varepsilon^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{E} = \mathbf{HE} \quad (12)$$

$$\varepsilon^{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_x^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_y^T & 0 \\ \mathbf{E}_y^T & \mathbf{E}_x^T & 0 \\ \mathbf{E}_z^T & 0 & \mathbf{E}_x^T \\ 0 & \mathbf{E}_z^T & \mathbf{E}_y^T \end{bmatrix} \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{AE} \quad (13)$$

여기서  $\mathbf{H}$ 는 일정한 상수 행렬이며,  $\mathbf{A}$ 는 변위자유도  $\mathbf{u}$ 에 종속함수이다.

위의 Green-Lagrangian 변형도의 선형, 비선형 부분에 대해 변분을 취하면 다음과 같다.

$$d\varepsilon = d\varepsilon^L + d\varepsilon^{NL} = \mathbf{H}d\mathbf{E} + \mathbf{A}d\mathbf{E} \quad (14)$$

여기서  $d\mathbf{E}$ 는 다음과 같다.

$$d\mathbf{E} = \mathbf{G}d\mathbf{u} \quad (15)$$

그러므로 변형도의 변분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d\varepsilon = \mathbf{B}d\mathbf{u} \quad (16)$$

여기서  $\mathbf{B}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^L = \mathbf{B}^{NL} = [\mathbf{H} + \mathbf{A}]\mathbf{G} \quad (17)$$

### 2.3 증분 평형 방정식

정적상태에서 평형방정식(equation of static equilibrium)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>(1)</sup>

$$\Psi = \mathbf{R} - \int_V \mathbf{B}^T d\boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{R} - \mathbf{P} \quad (18)$$

여기서 잔여치  $\Psi$ 는 절점평형하에 가정된 변위장을 만족시키기 위한 절점력으로 볼 수 있으며,  $\mathbf{R}$ 는 외력에 의한 절점력이다. 위의 식은 변위벡터  $\mathbf{u}$ 에 대해 직접적으로 풀 수 없으므로 위의 평형방정식을 증분형태로 표시한다. 위의 식에 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d\Psi &= d\mathbf{R} - \int_V d\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \mathbf{B}^T d\boldsymbol{\sigma} dV \\ &= d\mathbf{R} - \int_V \mathbf{B}^T d\boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \mathbf{G}^T d\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} dV \\ &\quad - \int_V d\mathbf{G}^T [\mathbf{H} + \mathbf{A}]^T \boldsymbol{\sigma} dV \end{aligned} \quad (19)$$

여기서

$$\int_V \mathbf{B}^T d\boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV d\mathbf{u} = \mathbf{K}_0 d\mathbf{u} \quad (20)$$

$$\int_V \mathbf{G}^T d\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dV d\mathbf{u} = \mathbf{K}_{01} d\mathbf{u} \quad (21)$$

$$\int_V d\mathbf{G}^T [\mathbf{H} + \mathbf{A}]^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K}_{02} d\mathbf{u} \quad (22)$$

여기서

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x \mathbf{I} & \tau_{xy} \mathbf{I} & \tau_{xz} \mathbf{I} \\ \tau_{xy} \mathbf{I} & \sigma_y \mathbf{I} & \tau_{yz} \mathbf{I} \\ \tau_{xz} \mathbf{I} & \tau_{yz} \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

그러므로 평형방정식 (18)의 증분 평형방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d\Psi = d\mathbf{R} - [\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{01} + \mathbf{K}_{02}]d\mathbf{u} = d\mathbf{R} - \mathbf{K}d\mathbf{u} \quad (24)$$

### 2.4 복합적층 구조

복합적층 구조는 여러개의 단층들로 구성되어 있고 각 단층들은 횡등방성(transversely isotropic)을 가진다고 가정되며,<sup>(17)</sup> 요소내에서 각 단층의 섬유는  $\xi$  축과  $\theta$ 의 각도를 가진다고 가정한다.

재료주축방향으로 응력-변형도 관계행렬은 쉘의 두께방향으로 응력을 무시한다는 가정에 의해 다음과 같이 주어진다.<sup>(18)</sup>

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{bmatrix} \quad (25)$$

여기서  $E_1, E_2$ 는 1, 2 축방향 영계수,  $G_{13}, G_{23}$ 는 전단계수,  $\nu_{12}, \nu_{21}$ 는 포아슨비이다.

한 단층의 접면에서 재료주축이  $\theta$ 의 방향각이 있을 때 행렬  $D^*$ 는 다음과 같이 변환한다.

$$D = TD^*T^T \quad (26)$$

$$T = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & -2CS & 0 & 0 \\ S^2 & C^2 & 2CS & 0 & 0 \\ CS & -CS & C^2 - S^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}$$

여기서  $C = \cos\theta, S = \sin\theta$  이다.

복합적층 구조에서 재료의 강성은 각 단층들이 서로 다른 방향성을 가짐으로써 두께 방향으로 일정하지 않다. 이러한 적응효과를 고려하기 위하여 두께방향의 적분은 각 단층들에 대한 적분들의 합으로 얻어진다.<sup>(19)</sup>

### 3. 요소 거동의 개선

#### 3.1 감차 적분방법

요소의 강성행렬 계산시 감차적분의 사용은 과도한 전단 및 막(membrane)에너지의 발생을 억제시키는 효과를 가져다 준다.<sup>(6)</sup> 예를 들면 2차요소(quadratic element)의 정상적분 점인  $\xi = \sqrt{0.6}$ 에서 평가되는 전단 및 막 변형도는 과도한 반면 감차적분점인  $\xi = \sqrt{1/3}$ 에서는 정확하게 가까운 전단 및 막 변형도의 평가가 가능하다. 따라서 휨거동에 영향을 미치지 않고 미소한 막 변형도와 전단 변형도를 나타낼 수 없기 때문에 발생하는 shear와 membrane locking 현상을 감차적분방법의 사용으로 일부 해결할 수 있다.

#### 3.2 비적합 변위형의 추가

일반 등매개변수 요소가 부정확한 값을 주는 가장 큰 원인 중의 하나가 단순한 응력 분포를 제대로 나타내지 못하기 때문이다. Wilson<sup>(7)</sup> 등은 2차원 문제에서 비적합 변위형을 추가함으로써 요소내에서 발생하는 과도한 변형 에너지를 제거하고, 요소의 억제된 거동을 유연하게 하였다. Choi와 Schnobrich<sup>(6)</sup>는 이 개념을 등매개변수 쉘 요소에 적용하여 원래의 요소의 거동을 개선하였으며, 8절점 요소에 추가

적용가능한 다음과 같은 비적합 변위 형상 함수를 제안하였다.

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= \xi(1-\xi^2), \bar{N}_2 = \eta(1-\eta^2), \bar{N}_3 = \xi\eta(1-\xi^2) \\ \bar{N}_4 &= \xi\eta(1-\eta^2), \bar{N}_5 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (27)$$

비적합 변위형의 추가로 인해 원래의 평형관계식은 불가피하게 다음과 같이 확장된다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

여기서  $\mathbf{u}$ 는 절점 자유도이고  $\bar{\mathbf{u}}$ 는 추가된 비적합 변위형의 크기이며,  $\mathbf{F}_1$ 과  $\mathbf{F}_2$ 는 서로 대응되는 하중 성분이다.

비적합 변위형의 추가로 확장된 강성행렬은 정적 응축(static condensation) 기법을 사용하면 원래와 같은 차수로 줄어들게 된다.

$$K' \mathbf{u} = \bar{\mathbf{F}}_1 \quad (29)$$

여기서

$$K' = K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21} \quad (30a)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{F}_1 - K_{12}K_{22}^{-1}\mathbf{F}_2 \quad (30b)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = K_{22}^{-1}\mathbf{F}_2 - K_{22}^{-1}K_{21}\mathbf{u} \quad (30c)$$

#### 3.3 가정된 전단 변형도장

본 연구에서는 비적합 변위형 중  $\bar{N}_5$  모드 즉 bubble mode가 이동 변위에 추가된 상태를 본 쉘 요소의 기본형으로 생각하므로 별도로 가정된 전단 변형도  $\tilde{\gamma}_{\xi\zeta}$ 와  $\tilde{\gamma}_{\eta\zeta}$ 는 적어도 다음과 같은 다항식을 이루어야 한다.<sup>(11)</sup>

$$\tilde{\gamma}_{\xi\zeta} = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\eta^2 + a_6\xi\eta^2 \quad (31a)$$

$$\tilde{\gamma}_{\eta\zeta} = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta + b_5\xi^2 + b_6\xi^2\eta \quad (31b)$$

위의 가정된 전단 변형도 다항식의 미지항을 구하기 위해 6개의 요소내의 적분 선택점이 필요하게 된다.  $\tilde{\gamma}_{\xi\zeta}$ 와  $\tilde{\gamma}_{\eta\zeta}$ 의 적분 선택점은 그림 2와 같이 각각 상이하고, 다음과 같이 보간된다.

$$\tilde{\gamma}_{\xi\zeta} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\eta)Q_j(\xi) \gamma_{\xi\zeta}^i \quad (32a)$$

$$\tilde{\gamma}_{\eta\zeta} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi)Q_j(\eta) \gamma_{\eta\zeta}^i \quad (32b)$$

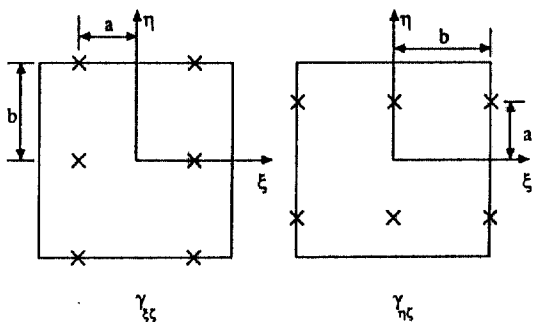


그림 3. Interpolation points for shear strains.

여기서

$$\begin{aligned}
 P_1(x) &= \frac{x}{2b} \left( \frac{x}{b} + 1 \right), & P_2(x) &= 1 - \left( \frac{x}{b} \right)^2, \\
 P_3(x) &= \frac{x}{2b} \left( \frac{x}{b} - 1 \right) \\
 Q_1(x) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{a} \right), & Q_2(x) &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \quad (33)
 \end{aligned}$$

$a=1/\sqrt{3}$ ,  $b=1$  이며 적분 선택점위치는 그림 2와 같다.

#### 4. 개선된 감절점(degenerated) 쉘요소

앞에서 언급한 것처럼 감차적분방법과 비적합 변위형의 추가와 가정된 전단변형도의 대치 사용은 각각의 경우 요소의 거동을 개선 시킨다는 것과 각각의 한계는 잘 알려져 있다.<sup>(6,8,10)</sup> 본 논문에서는 각각의 한계를 배제하고, 각각의 장점을 보완 결합

하여 개선된 새로운 쉘요소를 구성한다. 본 논문의 개선된 쉘요소의 기본착상은 shear locking 해결에 우수한 결과를 보인 가정된 전단변형도를 사용하고, membrane locking 현상을 제거하기 위해 평면내 변형도의 구성시 감차적분을 행하며, 쉘요소자체의 거동을 보완하기 위해 비적합 변위형을 선택적으로 추가하는 것이다.<sup>(11)</sup>

위에서 언급한 것의 효과적인 결합을 위하여 전체 요소의 강성을 평면내 부분(in-plane part)과 전단 부분(transverse shear part)으로 나눈다. (평면내 부분은 감차적분(2×2)을 행하며, 모든부분에 대해 비적합 변위형을 선택적으로 추가한다(표 1). 그러므로 증분 Green-Lagrangian 변형도 텐서중 전단변형도에 관한 항을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d\tilde{\epsilon}_{\xi\xi} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\eta) Q_j(\xi) d\epsilon_{\xi\xi} \quad (34a)$$

$$d\tilde{\epsilon}_{\eta\xi} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi) Q_j(\eta) d\epsilon_{\eta\xi} \quad (34b)$$

여기서 P와 Q는 앞식(33)에서 정의한바와 같다.

그러므로 증분변위 미분치와 증분변위와의 관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$dE = G du' = \sum \begin{bmatrix} G_r \\ \tilde{G}_s \end{bmatrix} du + \sum \begin{bmatrix} \bar{G}_r \\ \bar{G}_s \end{bmatrix} d\bar{u} \quad (35)$$

여기서  $du = [du, dv, dw, d\alpha, d\beta]$ ,  $d\bar{u} = [d\bar{u}, d\bar{v}, d\bar{w}, 0, 0]$ 이다.  $G_r$ 는 증분 평면내변위 미분치와 증분변위 관계행렬이며,  $\tilde{G}_s$ 는 대치된 증분 전단변위 미분치와 증분변위 관계행렬이고,  $\bar{G}_r$ 와  $\bar{G}_s$ 는 증분 비적합 변위형의 변위 미분치와 증분 비적합변위형

표 1. Numerical integration scheme.

Element	Stiffness	Conforming		Nonconforming							
		$N_1 - N_8$	$\bar{N}_5$		$\bar{N}_1$	$\bar{N}_2$	$\bar{N}_3, \bar{N}_4$				
		u, v, w, $\alpha, \beta$	$\bar{u}$	$\bar{v}$	$\bar{w}$	$\bar{u}$	$\bar{v}$	w	$\bar{u}$	$\bar{v}$	w
QSR	In-Plane	2×2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Transverse Shear	2×2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Type I	In-Plane	2×2	2×2	2×2	2×2	3×3	-	-	-	3×3	-
	Transverse Shear	2×3/3×2	3×3	3×3	2×3/3×2	3×3	-	-	-	3×3	-
Type II	In-Plane	2×2	2×2	2×2	2×2	3×3	-	-	-	-	-
	Transverse Shear	2×3/3×2	3×3	3×3	2×3/3×2	3×3	-	-	-	-	-

의 변위와의 관계행렬이다.

개선된 쉘 유한요소는 비적합모드의 추가형식에 따라 2가지로 구분하였다. 즉 이동변위( $u, v, w$ )에 5개의 비적합변위형( $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4, \bar{N}_5$ )을 추가하는 type II과 동 변위에 3개의 비적합변위형( $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_5$ )을 Type II로 구분하였다.

### 5. 수치 해석

본 연구에서 제시한 개선된 쉘요소의 복합적층 구조에의 적용성을 알아보기 위해 여러 예제시험을 하였다. 비교를 위하여 8절점 등매개요소를 감차적분한 경우를 QSR<sup>(6)</sup>로 표시한다. 비선형 해석시에는 Newton-Raphson 반복법을 사용하였으며, 수렴의 판정은 총 변위의 Euclidian Norm대 증분된 변위의 Euclidian Norm의 비가  $1.0 \times 10^{-3}$ 보다 작을 때 수렴하였다고 판정하였다.

#### 비틀린 캔틸레버(twisted cantilever)

본 개선된 쉘요소의 등방성재료에의 시험으로 집중하중을 받는 비틀린 캔틸레버를 해석하였다. 그림 4는 평면내 하중과 평면외 하중이 작용하는 비틀린 캔틸레버로서 와핑 찌그러짐(warping distortion)문제를 내포하고 있다. 본 요소는 와핑 찌그러짐 문제에서 양호한 결과를 줌을 표 2, 3에서 볼 수 있다.

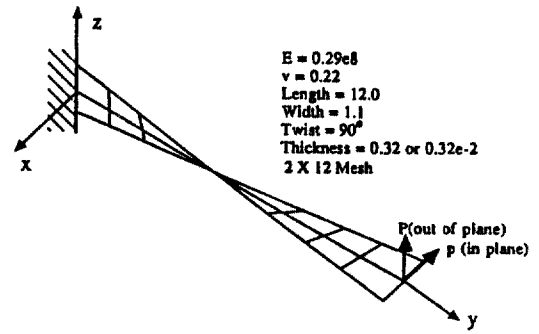


그림 4. Twisted beam with concentrated load at tip.

기존의 곡면 쉘요소중에는 본 문제를 만족시키지 못하는 경우도 있다.<sup>(13)</sup> 캔틸레버의 두께가 각각 0.32, 0.0032의 두 경우에 대해 해석하였다. 이 비틀린 캔틸레버에서 두께가 0.0032의 경우는 membrane locking 현상이 심하게 발생하는 예제이다. 즉 표 2, 3에서 보는바와 같이 막변형도부분에 감차적분을 행하지 않은 요소에서는 매우 심한 membrane locking 현상이 발생하였으나 본 요소에서는 membrane locking 현상이 발생하지 않음을 볼 수 있다.

#### 복합 적층 평판

그림 5와 같은 분포하중을 받는  $[\pm\theta]$ 로 적층된 단순지지 평판에 대해  $\theta$ 의 각도 변화에 따라 해석

표 2. Normalized solution for twisted beam (thickness=0.32).

Formulation	Element	In Plane	Out of Plane
Degenerated Shell*	9-Node R	1.00	1.00
	9-Node S	0.99	0.99
	9-Node N	0.98	0.98
Resultant Stress Degenerated Shell*	9-Node R	1.41	1.36
This study	Type I	1.00	1.01
	Type II	1.00	1.00
Beam Theory		$0.5424 \times 10^{-2}$	$0.1754 \times 10^{-2}$

Notes; \* Ref. T. Belytschko et al.(1989); (3×13) mesh

R: Reduced integration(2×2)

N: Normal integration(3×3)

S: Selective integration

3×3 for in plane stiffness

2×2 for shear stiffness

표 3. Normalized solution for twisted beam (thickness=0.0032).

Formulation	Element	In Plane	Out of Plane
Degenerated Shell*	9-Node R	1.01	1.00
	9-Node S	0.02	0.03
	9-Node N	0.01	0.001
Resultant Stress Degenerated Shell*	9-Node R	1.39	1.72
This study	Type I	1.00	1.00
	Type II	0.99	1.00
Beam Theory		$0.5256 \times 10^{-2}$	$0.1294 \times 10^{-2}$

Notes; \* Ref. T. Belytschko et al.(1989); (3×13) mesh

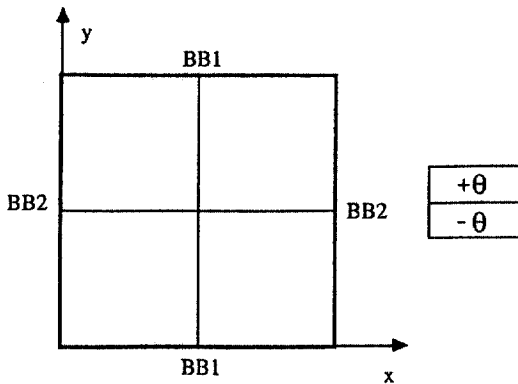
R: Reduced integration(2×2)

N: Normal integration(3×3)

S: Selective integration

3×3 for in plane stiffness

2×2 for shear stiffness



BB1 :  $v=w=\alpha=0$

BB2 :  $u=w=\beta=0$

$L=10.0$   $h=0.02$

$E_{11}=40 \times 10^6$  psi  $E_{22}=10^6$  psi

$\nu_{12}=\nu_{23}=0.25$   $G_{12}=G_{23}=0.5 \times 10^6$  psi

그림 5. 2 layer square plate of angle-ply  $[\pm \theta]$ .

하였다. 고려하는 평판의 형상과 재료특성 등은 그림 4와 같다. 고려하는 적층은 비대칭 적층으로써 연계강성(coupling stiffness)의 영향에 의하여 대칭거동을 기대할 수 없으므로 전체 평판을  $N \times N$ 으로 모델링하여  $\theta$ 의 변화에 따른 수렴연구를 행하였다. 해석 결과는 Spilker<sup>(14)</sup>의 해를 정확해라보고 이 해에 대해 비교하여 그림 6에 나타내었다.

대변형을 받는 복합적층 평판

본 예제는 등분포하중을 받는 4 적층[0/90/0/90]

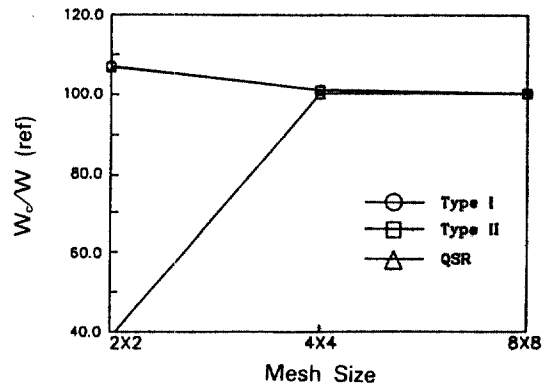


그림 6a. Convergence characteristics for central deflection of layered plate  $[\pm 5^\circ]$ .

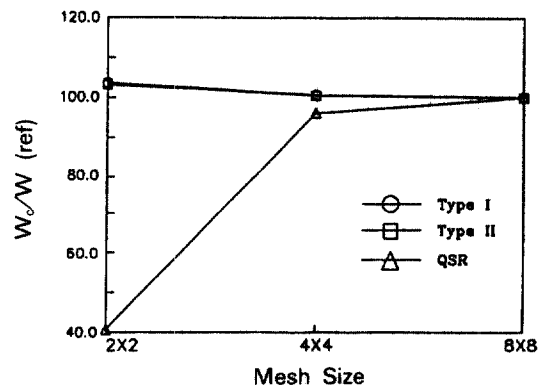


그림 6c. Convergence characteristics for central deflection of layered plate  $[\pm 25^\circ]$ .



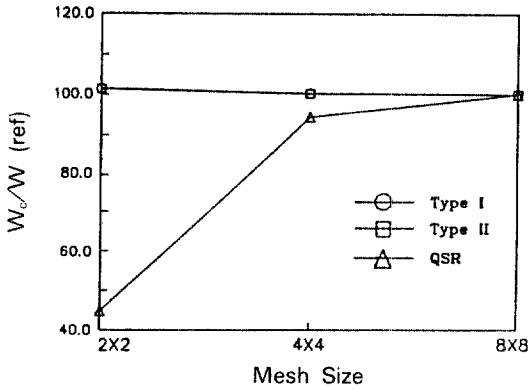


그림 6b. Convergence characteristics for central deflection of layered plate [ $\pm 15^\circ$ ].

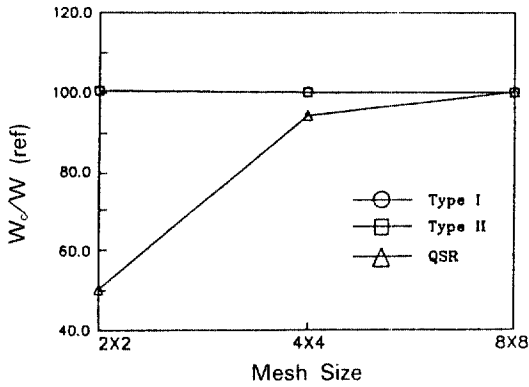


그림 6d. Convergence characteristics for central deflection of layered plate [ $+35^\circ$ ].

된 고정지지 평판의 기하학적 비선형해석을 행한다. 고려한 평판의 형상치수와 재료특성 등은 다음과 같다.  $l=12in$ ,  $h=0.096in$ ,  $E_1=1.828 \times 10^6psi$ ,  $E_2=1.832 \times 10^6psi$ ,  $G_{12}=G_{13}=G_{23}=0.3125 \times 10^6psi$ ,  $\nu=0.23949$ . 직교적층(cross ply)과 대칭성에 의해 평판의 1/4을  $4 \times 4$ 로 모델링한다. 평판 중심의 처짐과 등분포 하중의 크기와의 관계를 그림 7에 나타내었으며 Reddy<sup>(5)</sup>의 해와 비교시 양호한 결과를 준다.

#### 대변형을 받는 원통형 복합적층 쉘

본 예제는 등분포하중을 받는 2 적층 $[0/90]$ 된 고정지지 원통형 쉘의 기하학적 비선형해석을 행한다. 고려한 원통형 쉘의 형상치수와 재료특성 등은 다음과 같다.  $R=2450in$ ,  $L=508in$ ,  $h=2.54in$ ,  $\alpha=0.1rad$ ,  $E_1=25 \times 10^6psi$ ,  $E_2=1.0 \times 10^6psi$ ,  $G_{12}=G_{13}=0.5 \times 10^6psi$ ,  $G_{23}=0.2 \times 10^6psi$ ,  $\nu=0.25$ . 직교적층과

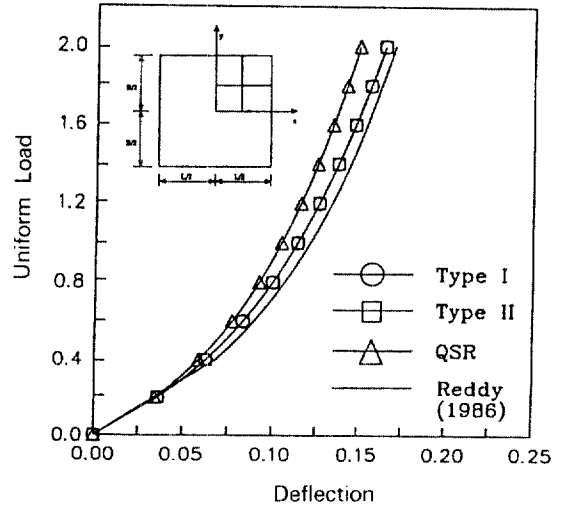


그림 7. Load-deflection relation for  $[0/90/0/90]$  layered plate in large deformation.

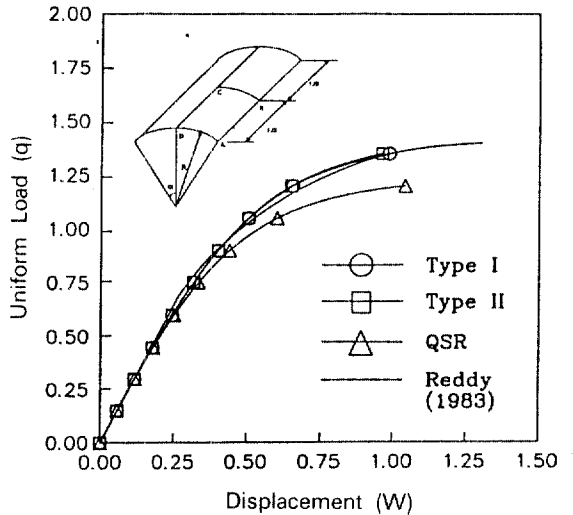


그림 8. Load-deflection relation for  $[0/90]$  layered cylindrical shell in large deformation.

대칭성에 의해 원통형 쉘의 1/4을  $4 \times 4$ 로 모델링한다. 쉘 중심의 처짐과 등분포 하중의 크기와의 관계를 그림 8에 나타내었으며 Reddy<sup>(16)</sup>의 해와 비교시 양호한 결과를 준다.

## 6. 결 론

본 논문에서 사용한 개선된 감절점 쉘유한요소

가정된 전단변형도장의 대치사용, 감차적분 및 비 적합변위형의 선택적 추가 등 세가지 기법의 장점을 상호 보완적으로 혼합사용하여 등방성 재료문제에서 우수한 결과를 주었다. 또한 이 개선된 쉘 유한요소를 복합적층을 갖는 쉘문제 해석으로 확대 적용시켰다. 쉘의 기하학적 비선형거동은 total Lagrangian 수식화를 사용하였고, 비선형 수치해석은 Newton-Raphson 반복법으로 반복계산하였다. 여러 수치해석결과 본 개선된 쉘 유한요소는 복합적층 구조해석 영역에서도 양호한 결과를 준다.

### 참 고 문 헌

1. Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, 3rd Ed., McGraw-Hill, 1977.
2. Ahmad, S., Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C., "Analysis of thick and thin shell structures by curved elements", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2, 419-451 (1970).
3. Parish, H., "Nonlinear analysis of shells using isoparametric elements", *Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells*, T.J.R. Hughes et al.(Eds), AMSE, 1981.
4. Surana, K.S., "Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 19, 581-615 (1983).
5. Stolarski, H. and Belytschko, T., "Shear and membrane locking in curved C(0) elements", *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 41, 279-296 (1983).
6. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Too, J.M., "Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 3, 275-290 (1971).
7. Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P. and Ghaboussi, J., "Incompatible displacement models", *In Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, S.T. Fenves et al.(Eds), Academic Press, 1973.
8. Choi, C.K. and Schnobrich, W.C., "Use of nonconforming modes in finite element analysis of Shells", *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 101, 447-464 (1975).
9. Dvorkin, E.N. and Bathe, K.J., "A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis", *Engineering Computation*, 1, 77-88 (1984).
10. Huang, H.C. and Hinton, E., "A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 22, 73-92 (1986).
11. Choi, C.K. and Yoo, S.W., "Combined use of multiple improvement techniques in degenerated shell element", *Computers and Structures*, Accepted for publication.
12. Choi, C.K. and Yoo, S.W., "Geometrically nonlinear behavior of an improved degenerated shell element", *Computers and Structures*, Accepted for publication.
13. Belytschko, T., Wong, B.L. and Stolarski, H., "Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrangian shell elements", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 28, 385-414 (1989).
14. Spilker, R.L., "Hybrid-stress eight-node elements for thin and thick multilayer laminated plates", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 18, 801-826 (1982).
15. Reddy, J.N., "On mixed finite element formulations of a higher-order theory of composite laminates", *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*, Hughes, T.J.R. and Hinton, E.(Eds), Pineridge Press, 1986.
16. Reddy, J.N. and Chandrashekhara, K., "Nonlinear analysis of laminated shells including transverse shear strains", *AIAA J.*, 23, 440-441 (1983).
17. Hoskin, B.C. and Baker, A.A.(Eds), *Composite Materials for Aircraft Structures*, AIAA Education Series, 1986.
18. Hass, D.J. and Lee, S.W., "A nine-node assumed-strain finite element for composite plates and shells", *Computers and Structures*, 26, 445-452 (1987).
19. Panda, S. and Natarajan, R., "Analysis of laminated composite shell structures by finite element method", *Computers and Structures*, 14, 225-230 (1981).

(接受: 1990. 9. 20.)