

유한요소법에 의한 박판곡선부재의 좌굴해석

Buckling Analysis of Thin - Walled Curved Members by Finite Element Method

이 성 철
Lee, Sung Chul

Abstract

A computer program for the linear elastic buckling analysis of thin walled members is developed using a 3-node triangular shell element.

The element has real stiffness value for a kinematic degree of freedom associated with rotation about the surface normal at each node.

The validity of the present computer program is demonstrated through the plate buckling analysis and the lateral-torsional buckling analysis of a straight beam. Then, simply supported circular arches subjected to uniform bending are analyzed and the results are compared with existing solutions.

要 旨

평면내에서의 비틀림에 대한 강성도를 갖는 3절점 삼각형 shell요소를 사용하여 박판으로 이루어진 곡선 또는 직선부재의 선형 탄성좌굴 해석을 위한 컴퓨터 프로그램을 개발 하였다. 판의 좌굴 해석과 보의 횡 비틀 좌굴해석을 통하여 본 프로그램의 타당성을 입증하였고, 이를 순수 휨을 받는 양단이 단순지지된 원호 아치의 좌굴해석에 적용시켜 그 결과들을 다른 연구 결과들과 비교 검토하여 보았다.

1. 序 論

일반적인 박판부재를 해석하거나 설계하는데 가장 중요한 고려사항중의 하나가 바로 안정성(stability)에 관한 문제이다. 다시 말해서 좌굴과괴(buckling failure)에 대해서 안전한가를 검토하는 일인 것이다. 좌굴은 구조물내에 있는 압축변형에너지가 휨 변형에너지로 바뀔때 일어나는 현상이

다.

박판구조물을 이루고 있는 얇은 판들은 일반적으로 평면내에서의 압축에는 매우 강하고 휨(plate bending)에는 매우 약한 성질을 가지고 있다. 이로 인하여 좌굴시 방출되는 압축변형 에너지를 흡수하기 위하여 순간적으로 매우 큰 휨 변형(bending deformation)이 수반된다. 따라서 좌굴에 의한 파괴는 재료 자체의 항복(yielding)에 의해서 일어나

*정희원 · 동국대학교 공과대학 토목공학과 조교수

는 파괴보다 더 큰 위험성을 내포하고 있다.

1950년대부터 Timoshenko와 Vlasov와 같은 세계적으로 저명한 공학자들에 의해 박판구조물의 선형탄성좌굴에 관한 연구가 시작되었다. 그 후로 현재까지 많은 연구논문들(2, 3, 6, 9, 11, 12, 20)이 발표되어 왔다. 하지만 이 연구들이 제시한 지배미분방정식을 풀어서 정확해(closed form solution)를 구하는데에는 여러가지의 제약사항이 있다. 예를들면, 경계조건이 복잡하거나 단면의 형상이 변화할 경우 지배미분방정식을 풀어 정확해를 구하는 것은 거의 불가능하다고 판단된다. 또한 위의 미분방정식들은 단면의 형상이 좌굴후에도 변화하지 않는다는 가정하에 유도되었기 때문에, 그림 1에서 보인것들과 같이 단면자체의 변형이 수반되는 경우에는 적용이 곤란하다.

특히 직선이 아닌 곡선형태로 이루어진 부재일 경우, 지배미분방정식을 유도하는 과정이 매우 복잡하고, 이 복잡한 문제를 단순화시키는 가정들이 논문마다 서로 다르기 때문에 여러 연구논문들이 제시한 정확해 값들이 하중이나 좌굴형태에 따라서 서로 상당한 차이를 보이고 있는 실정이다. 이러한 현실로 인하여, 때에 따라서는 유한요소법에 의한 좌굴해석이 박판 구조물 설계시 반드시 수반될 필요성이 있다고 판단된다.

본 연구에서는 참고문헌(4)에서 개발된 Shell요소를 사용하여 박판으로 이루어진 직선 또는 곡선 부재의 선형탄성좌굴해석을 위한 컴퓨터 프로그램을 개발하였고, 몇가지 수치해석 예를 통하여 본 프로그램의 타당성을 점검 하였다.

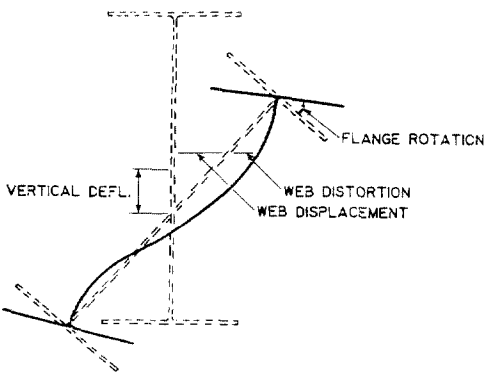


그림 1. 단면의 비틀림

최종적으로 본 프로그램을 박판곡선부재의 좌굴 해석에 적용하여 좌굴하중을 구한다음 기존의 정확해들과 비교 검토 하였다.

2. 삼각형 Shell 요소

2.1 Shell 요소의 개발과정에 대한 간략한 고찰

shell이나 shell형태의 구조물들이 여러분야에서 많이 이용됨에 따라 일반적인 shell구조물의 해석을 위하여 1960년대 이후로 수 많은 shell요소들이 개발 되었다. shell요소들을 개발하기 위하여 사용된 방법들을 크게 셋으로 분류하면 다음과 같다(4, 5).

- (1) 평면응력(plane stress)요소와 판(plate bending)요소의 결합
- (2) shell 이론을 직접 적용
- (3) 3차원 요소(brick element)를 shell 이론의 가정을 이용하여 2차원으로 이산화(degeneration)시킴.

위의 방법들은 정확성이나 경제성 등을 고려할 때 각기 장단점을 가지고 있기 때문에 어떤 방법을 사용하여 개발된 요소가 절대적으로 우수하다고 판단하기가 매우 어렵다. 1960년대에 처음 개발된 shell요소들(17, 18)은 방법(1)을 이용한 평평한 삼각형 요소(flat triangular elements)였다. 그 이후로 방법(2)와 방법(3)을 사용해서 많은 고차 shell 요소들이 개발 되었다.

그 중에서 Ahmad(19)에 의해서 개발된 isoparametric shell요소는 매우 우수한 것으로 인정되어 많은 구조해석용 범용프로그램에 적용되고 있다.

최근 구미 각국에서의 강 구조물(steel structures)설계개념이 종래의 허용응력설계(allowable stress design)개념에서 LRFD(load & resistance factor design)(20)나 LSD(limit state design)(21)와 같은 강도설계(strength design)개념으로 바뀌고 있는 실정이다. LRFD나 LSD와 같은 방법으로 구조물을 설계하기 위해서는 구조물의 극한강도(ultimate strength)를 정확하게 구하는 것이 무엇보다도 중요하다. 이를 위해서는 구조물의 비선형해석(non-linear analysis)이 반드시 수반되어야 한다. 유한요소법으로 비선형 해석을 할 경우 구조물의 거동을 여러단계로 나누어 선형화 시키고, 여러번의 반복수행과정(iterations)이 필요하기 때문에 요소의 경제성(cost-effectiveness)이 매우 중요

한 고려사항이 된다. 1980년대에 와서 방법(1)을 적용한 간단한 삼각형 shell요소(simple flat triangular element)가 다른 고차 shell요소에 비해 경제성이 뛰어나다는 점이 부각 되었다. 그리고 우수한 판요소와 평면응력 요소들이 새로 개발됨에 따라 이들을 이용한 새로운 삼각형 shell요소^(4, 16)들이 탄생 되었고 여러형태의 shell구조물의 비선형 해석에 적용되었다. 본 연구에서는 박판 구조물의 선형 좌굴해석을 위하여 참고문헌(4)에서 개발된 삼각형 shell요소를 이용 하였다.

2.2 삼각형 Shell요소의 문제점과 그 대책

앞에서 언급된 방법(1)을 적용하여 삼각형 shell 요소를 개발하기 위하여 평면응력 요소로 CST (constant strain triangle)요소가 가장 많이 이용 되어 왔다. CST 요소는 절점 당 2개의 자유도(u, v)를 가지고 있고 판 요소에는 절점 당 3개의 자유도(w, θ_x, θ_y)가 있기 때문에 CST 요소와 판 요소를 결합하여 만들어진 shell요소는 절점 당 5개의 자유도를 갖게 된다(그림 2참조). 하지만 일반적인 3차원 shell구조물의 거동을 표현하기 위해서는 절점 당 6개의 자유도가 필요하기 때문에 요소가 놓여 있는 평면에 수직인 방향(z)에 대한 회전(평면

내에서의 비틀림)자유도(θ_z)를 추가 시켜야 한다. 이때 평면내에서의 비틀림에 대한 강도는 영의 값을 갖게 된다. 따라서 한 절점에서 만나는 요소들이 동일 평면상에 있을 경우, 다시 말해서 한 요소에서 평면내에서의 비틀림이 다른 요소의 판 휨 강도(plate bending stiffness)에 의해서 억제가 되지 못할 경우, 구조물 강도 매트릭스(assembled structural stiffness matrix)가 singular가 되는 문제가 발생한다.

이와같은 문제점을 극복하기 위하여 다음과 같은 방법들이 주로 사용되어 왔다.

- 1) 한 절점에서 만나는 요소들이 동일 평면상에 있을 경우 그 평면내에서의 비틀림 자유도를 구속한다.
- 2) 평면내에서의 비틀림에 대한 강도 값으로 임의의 작은 값을 사용한다.

첫번째 방법은 구조물의 거동을 여러 단계로 나누는 비선형 해석에는 적용할 수 없다. 왜냐하면 첫번째 단계에서 해석이 끝나면 처음에는 동일 평면상에 있는 요소들이 구조물의 형상이 변함에 따라 더 이상 같은 평면에 있지 않기 때문이다.

두번째 방법에서는 다음과 같은 인위적인 강도

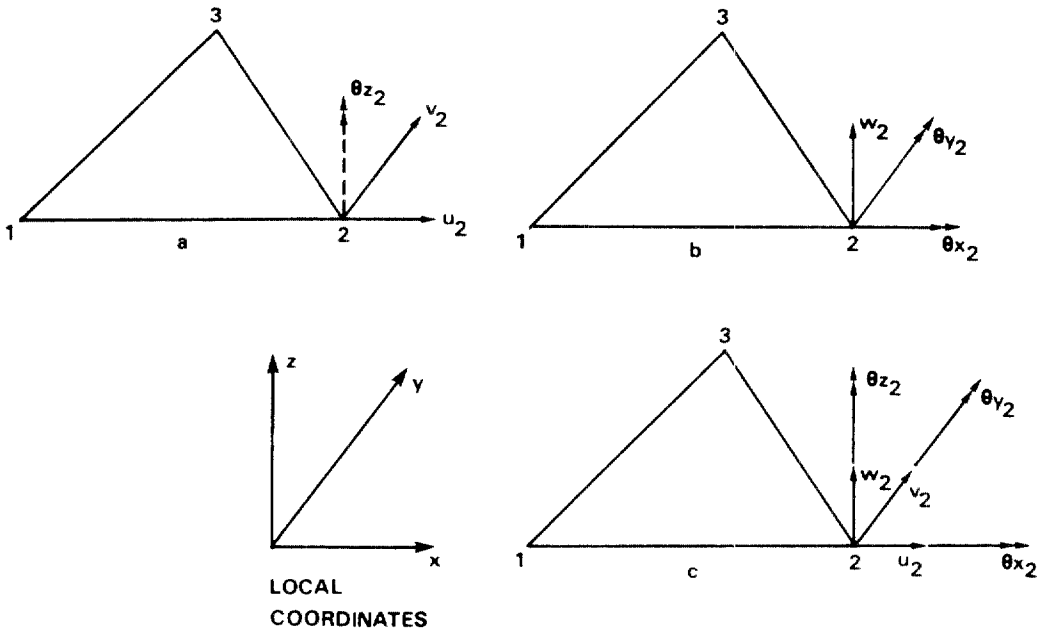


그림 2. 평평한 삼각형 요소
a. 평면응력 요소, b. 판 요소, c. shell요소

값들이 사용된다.

$$\begin{matrix} M_{d1} \\ M_{d2} \\ M_{d3} \end{matrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ & 1 & -0.5 \\ \text{Symm} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{d1} \\ \theta_{d2} \\ \theta_{d3} \end{pmatrix}$$

여기서 α 는 임의의 작은 값임.

Bathe와 Ho⁽¹⁶⁾는 $K_{\alpha}(\alpha)$ 값으로 판의 휨강도 값 중 가장 적은 값에 10^{-4} 을 곱하여 사용 하였다.

두번째 방법은 평면내에서의 비틀림이 거의 나타나지 않는 원통형(cylindrical) shell이나 구형(spherical) shell 또는 arch dam의 해석에 주로 적용되어 왔다.

shell형태의 구조물을 경제적으로 설계하는 방법 중의 하나는 shell이나 plate는 얇게 하고 그 대신에 좌굴을 방지하기 위하여 보강재를 사용하는 것이다. 이런 경우 그림 3과 같은 상황이 초래될 수 있다. 판 A-B에서 발생한은 판휨 회전(plate bending rotation)이 결과적으로 판 B-C에 면내 회전(inplane rotation)을 유발 시키게 된다. 이러한 상황에서 B에 가해진 모멘트에 저항하는 B-C의 B에서의 면내 회전 강도가 판 A-B의 B에서의 판휨 회전 강도보다 매우 크다고 판단된다. 따라서 이러한 경우 K_{α} 값으로 판휨 회전강도(K_{θ_x} , K_{θ_y})보다 아주 적은 값을 사용하는 것은 타당하지 못하다.

CST요소가 평면내에서의 비틀림 강도를 갖지 못하기 때문에 발생하는 이와같은 문제점들을 해결하기 위하여, 평면내에서의 비틀림에 대한 실질적인 강도를 갖는 새로운 삼각형 평면응력 요소가 개발되었고 이를 이용하여 절점 당 6개의 자유도를 갖는 삼각형 shell 요소가 새로이 개발 되었다⁽⁴⁾.

참고문헌(4)에서 개발된 평면응력 요소에서 요소

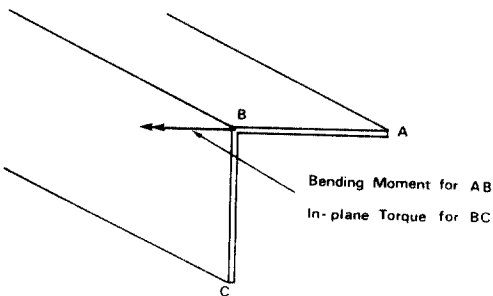


그림 3. 판의 평면내에서의 비틀림

내의 x, y방향으로의 변위 u, v 는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 ND_i \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} NU_i \\ NV_i \end{pmatrix} \theta_{\alpha}$$

여기서 u, v 는 절점변위이고, θ_{α} 는 절점 회전각이며 ND_i, NU_i, NV_i 는 변위 형상함수로서 다음과 같다(그림 4참조).

$$NU_1 = y_3 \eta (1 - \xi - \eta)$$

$$NV_1 = x_2 \xi (1 - \xi - \eta)^2 + x_3 \eta (1 - \xi - \eta)^2$$

$$NU_2 = -y_3 \xi^2 \eta$$

$$NV_2 = -x_2 (1 - \xi) \xi^2 + x_3 \xi^2 \eta$$

$$NU_3 = y_3 (1 - \eta) \eta^2$$

$$NV_3 = x_2 \xi \eta^2 - x_3 (1 - \eta) \eta^2$$

$$ND_1 = L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2$$

$$= (1 - \xi - \eta) + (1 - \xi - \eta)^2 \xi + (1 - \xi - \eta)^2 \eta - (1 - \xi - \eta) \xi^2 - (1 - \xi - \eta) \eta^2$$

$$ND_2 = L_2 + L_2^2 L_3 + L_2^2 L_1 - L_2 L_3^2 - L_2 L_1^2$$

$$= \xi + \xi^2 \eta + \xi^2 (1 - \xi - \eta) - \xi \eta^2 - \xi (1 - \xi - \eta)^2$$

$$ND_3 = L_3 + L_3^2 L_1 + L_3^2 L_2 - L_3 L_1^2 - L_3 L_2^2$$

$$= \eta + \eta^2 (1 - \xi - \eta) + \eta^2 \xi - \eta (1 - \xi - \eta)^2 - \eta \xi^2$$

3. 유한요소법에 의한 좌굴지배방정식

본 연구에서는 좌굴해석을 위해 다음과 같은 가정을 두었다.

1. 재료는 Hooke의 법칙을 따른다.
2. 부재는 보존력계(conservative force system)를 받는다.
3. 구조물내의 변위와 응력은 외력에 비례한다.
4. 좌굴이전의 변형(pre-buckling deformation)은 무시한다.

이와같은 가정하에 좌굴해석을 할 경우 이를 선형좌굴해석(linear buckling analysis) 또는 초기안정해석(initial stability analysis)이라 한다.

유한요소법에 의한 임계점(bifurcation buckling point)에서의 일반적인 지배방정식은, 선형좌굴해석의 가정을 따르면, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\det\{[K]_E + \lambda [K]_C\} = 0 \quad (1)$$

여기서,

det : 행렬식

$[K]_E$: 선형 강도 매트릭스

λ : 고유치(임계하중 계수)

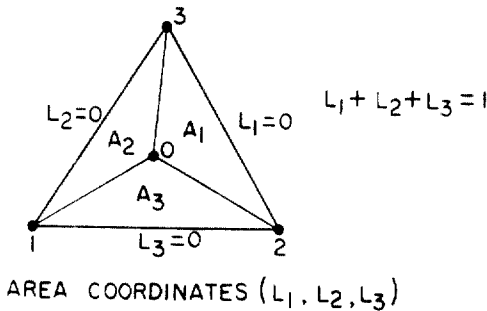
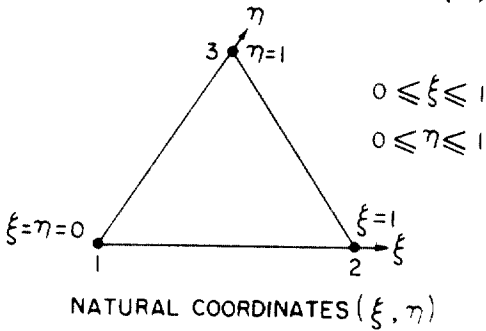
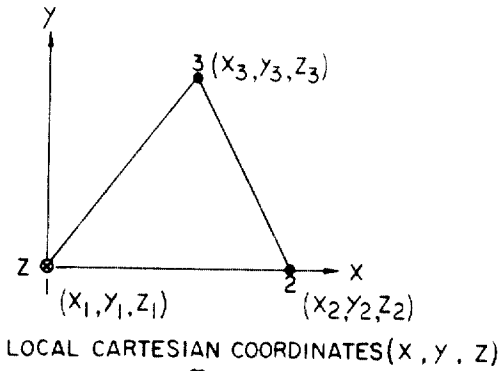


그림 4. 좌표계

$[K]_E$: 기하학적 강도 매트릭스(초기응력 매트릭스)

본 연구에서는 참고문헌(4)에서 개발된 3절점 삼각형 shell 요소를 이용하였다. 선형 강도 매트릭스 $[K]_E$ 는 참고문헌(4)에서 이미 구해진바 있고 본 연구에서는 기하학적 강도 매트릭스 $[K]_G$ 를 위의 요소를 사용하여 유도하였다. 요소의 기하학적 강도 매트릭스, $[K]_G$ 는 다음과 같이 나타내 진다.

$$[K]_G = \int_{V_e} [G]^T \begin{bmatrix} \sigma \\ \sigma \\ \sigma \end{bmatrix} [G] dV \quad (2)$$

여기서, V_e 는 요소의 체적이며 σ 는 초기하중에 의한 응력 매트릭스로서 다음과 같다.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xy} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_y \end{bmatrix}$$

그리고 T는 전치 행렬을 의미하며,

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} [N]$$

여기서 $[N]$ 은 변위 형상함수 매트릭스이다.

본 연구에서는 식(1)의 고유치 문제를 해석하기 위하여 참고문헌(14)에 있는 subspace iteration method를 이용하였다.

일단 고유치(임계하중 계수)가 얻어지면 임계하중 P_{cr} 은 다음과 같이 구해진다.

$$P_{cr} = \lambda P_m$$

여기서, P_m 은 초기하중을 뜻한다.

4. 컴퓨터 프로그램의 구성

본 연구에서는 개발된 박판구조물의 선형좌굴 해석 프로그램은 크게 다음의 세단계로 구성된다(그림 5. 컴퓨터 프로그램의 흐름도 참조).

1. 자료 입력
2. 선형해석 및 결과출력
3. 선형좌굴해석 및 결과 출력

첫번째 단계에서는 일반적인 선형해석에 필요한 구조물에 관한 모든 자료와 초기하중, P_m 및 구하고자 하는 좌굴모드의 수가 입력된다. 두번째 단계에서는 구조물의 선형강도 매트릭스, $[K]_E$ 가 계산되고 초기하중에 의한 하중벡터가 구성되어 선형해석이 이루어진다. 그리고 해석결과(변위, 응력)가 출력된다. 마지막으로 선형해석 단계에서 구한 응력(초기응력)을 이용하여 기하학적 강도매트릭스, $[K]_G$ 를 계산한다. 그 다음 선형좌굴해석의 지배방정식(제 3장 식(1))을 subspace iteration 방법을 이용하여 풀고 그 결과(임계하중계수 및 좌굴모드)를 출력한다. 입력자료 및 결과 출력의 예시는 부록에 주어져 있다.

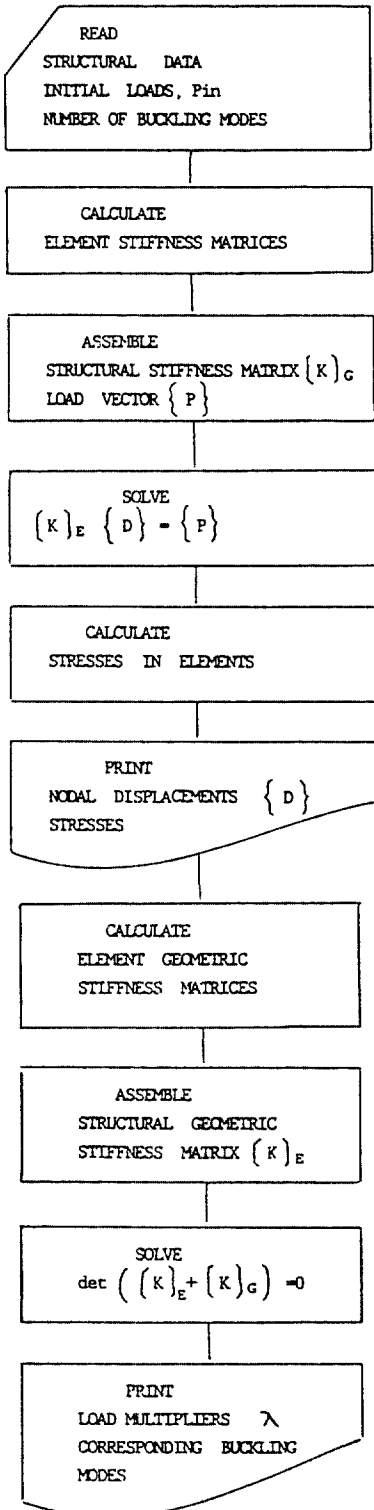


그림 5. 컴퓨터 프로그램의 흐름도

5. 수치해석

5.1 판의 좌굴해석

본 프로그램을 판의 좌굴해석에 적용할 수 있는 가를 검토하기 위하여 그림 6에 보인 것과 같은 단순화된 정사각형 판을 해석 하였다.

판 이론(7)에 따른 단위길이당 임계하중 N_{cr} (KN/cm)은 다음과 같이 나타낸다.

$$N_{cr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2} \quad (4)$$

여기서, D는 판의 휨강성(flexural rigidity)이다.

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5)$$

본 연구결과 및 식(4)에 의한 값들이 표 1에 제시 되어 있다.

표 1. 판 좌굴해석 결과의 비교

Mesh	A	B	C
N_{cr} (KN/cm)	2.658	2.830	2.890
% Difference	-10.42	-4.64	-2.63

정확해(Exact Solution) : 2.968 KN/cm

표 1로부터 본 연구결과들이 사용된 요소의 수가 증가할수록 정확해에 수렴함을 알 수 있다.

5.2 I형 보의 횡비틀 좌굴(Lateral-Torsional Buckling)해석

중앙에서 집중하중을 받는 단순보와 자유단에서 집중하중을 받는 캔틸레버보가 해석 되었다. 그림 7에 단면형상과 유한요소망의 형태가 나타나 있다. 직선보의 횡비틀 좌굴에 대한 정확해는 다음과 같다.

$$P_{cr} = \gamma_2 \frac{\sqrt{EIC}}{L^2} \quad (6)$$

여기서, L은 보의길이, E는 탄성계수, I는 단면 2차 모멘트, C는 St. Venant비틀림 강성(torsional rigidity)이다. γ_2 는 $L^2 C/C_1$ 에 의해 결정되는 무차원 계수로 참고문헌(7)에 주어져 있다. C_1 은 뒹강성(warping torsional rigidity)라 불리우며 다음과 같다.

$$C_1 = E I \omega$$

여기서, ω 는 뒹 상수(warping constant)이다.

본 해석에서 사용된 I형보의 재료 및 기하학적인

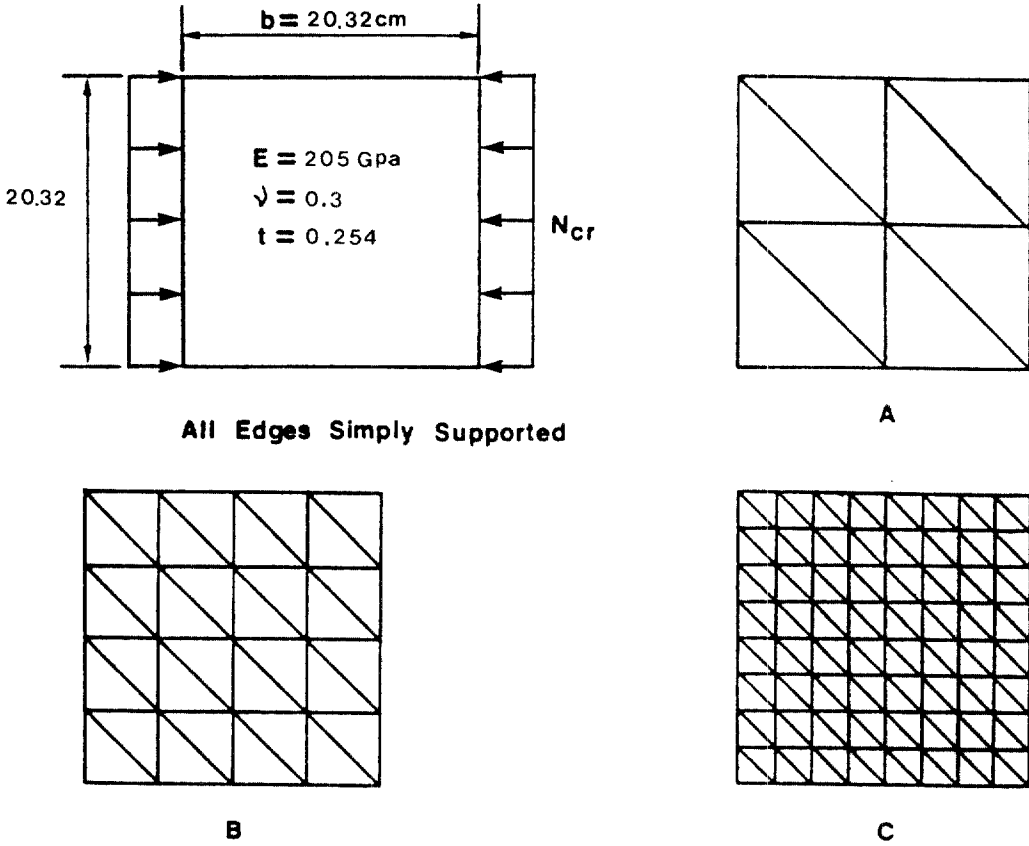


그림 6. Plate의 형상 및 요소망

단면 제원들은 다음과 같다.

$$E = 2,111,000 \text{ kg/cm}^2, G = 811,960 \text{ kg/cm}^2, \nu = 0.3$$

$$I_x = 88.78 \text{ cm}^4, I_y = 22.19 \text{ cm}^4$$

$$I_w = 5,156 \text{ cm}^6, J = 1.55 \text{ cm}^4$$

본 해석에서는 보의 깊이에 대한 길이의 비율(L/d)을 변화시켜가면서 좌굴하중값을 얻었다. 본 해석의 결과와 식(6)의 차이가 그림 8에 주어져 있다.

식(6)은 좌굴 후에도 단면형상이 변화하지 않는다는 가정하에 유도되었기 때문에, L/d 값이 작을수록 본 연구결과와 많은 차이를 보여주고 있다. 그 이유는 깊은 보 (L/d 값이 작은 보)일수록 좌굴 후 단면의 비틀림정도가 커지기 때문이다. 그림 8~12는 캔틸레버보의 좌굴후 자유단에서의 단면형상을 보여주고 있다. 이로부터 좌굴하중값의 차이는 단면의 비틀림(cross-sectional distortion)의 정도와 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다. 여기서 $(P_{cr})_p$ 는

본 연구 결과를 의미한다.

5.3 순수 휨을 받는 아치의 면외 좌굴

여기서는 양단이 단순지지된 원호 아치의 면외 좌굴(out-of-plane buckling)에 대하여 내각을 변화시켜가면서 임계모멘트(M_{cr})를 구해 보았다.

1950년대 이후 현재까지 이 경우에 대한 많은 연구가 이루어져 왔지만, 연구 결과들이 크게 달라서 아직 확실한 결론이 나지 않은 상태이다. 특히 내각이 180° 인 단순지지 아치의 Z축 방향의 회전에 대한 구속이 없기 때문에 기학적으로 불안정 하다. 따라서 이 경우 M_{cr} 은 휨 모멘트 방향(正 또는 負)에 관계없이 항상 0이 되어야 하지만 負(-)모멘트의 경우 아주 큰 임계모멘트 값을 얻은 연구들도 있는 실정이다.

본 해석에서 사용된 아치의 단면형상과 유한요소망은 그림 7과 동일하며 임계모멘트의 비($M_{cr, cv.}/M_{cr, st}$)는 그림 15에 도시되어 있다.

표 2 I형 캔틸레버의 횡비틀 좌굴해석 결과 비교

L(cm)	L/d	$(P_{cr})_{theory}$ (10^3kg)	$(P_{cr})_{FEM}$ (10^3kg)	$\frac{(P_{cr})_{theory} - (P_{cr})_{FEM}}{(P_{cr})_{theory}} \times 100\%$
101.6	6.67	22.385	10.221	54.34
203.2	13.33	3.481	2.898	16.75
254	16.67	1.956	1.760	10.02
304.8	20	1.231	1.146	6.90
381	25	0.707	0.672	4.95

표 3. I형 단순보의 횡비틀 좌굴해석 결과 비교

L(cm)	L/d	$(P_{cr})_{theory}$ (10^3kg)	$(P_{cr})_{FEM}$ (10^3kg)	$\frac{(P_{cr})_{theory} - (P_{cr})_{FEM}}{(P_{cr})_{theory}} \times 100\%$
30	5	218.079	65.667	69.89
80	13.33	11.430	10.796	5.55
160	26.67	1.977	1.901	3.84
200	33.33	1.180	1.138	3.56

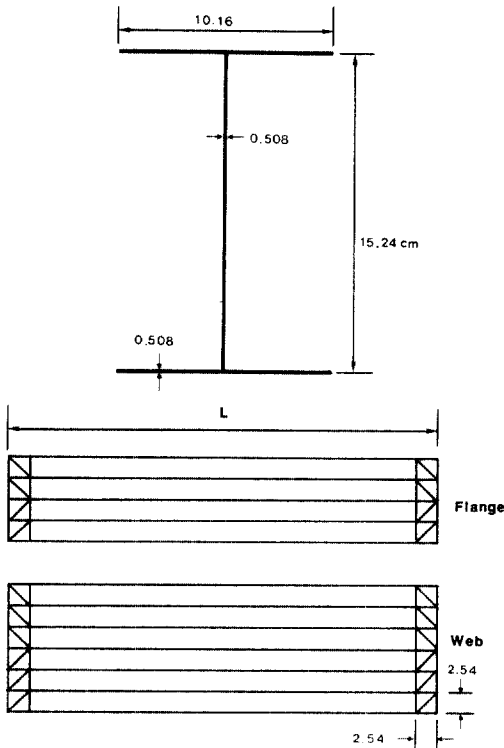


그림 7. I형 보의 형상 및 요소망

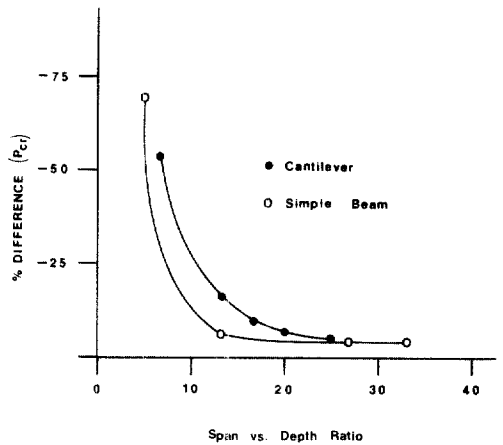


그림 8. I형 보의 횡비틀 좌굴해석

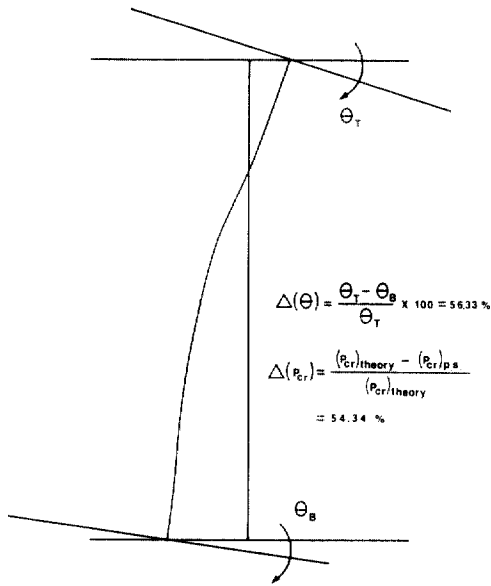


그림 9. I형 캔틸레버보 자유단에서 비틀림(L/d=6.67)

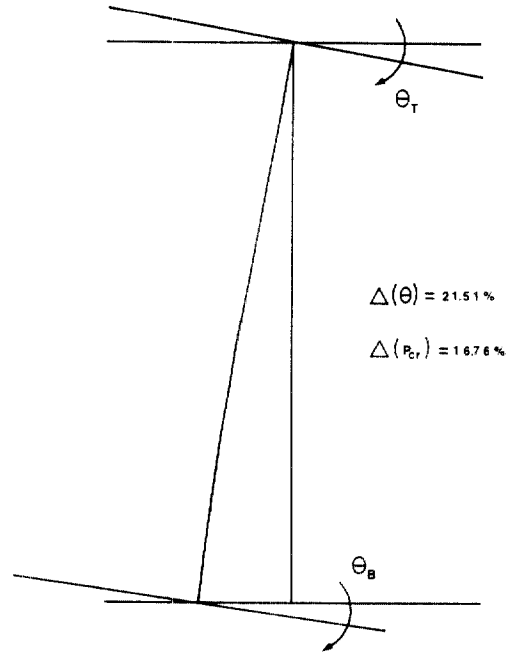


그림 10. I형 캔틸레버보 자유단에서 비틀림(L/d=13.33)

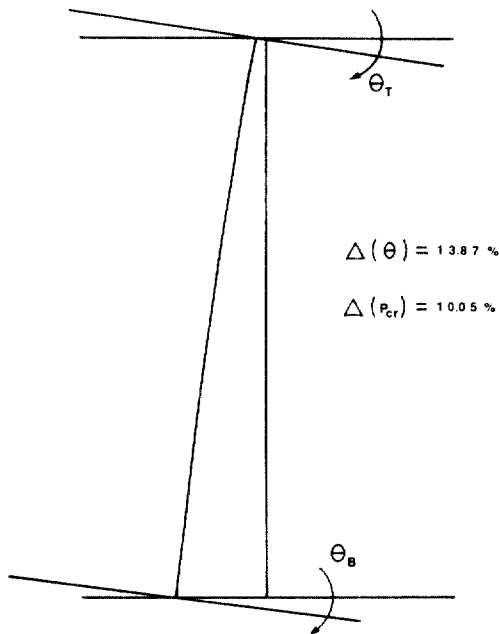


그림 11. 캔틸레버보 자유단에서의 비틀림(L/d=16.67)

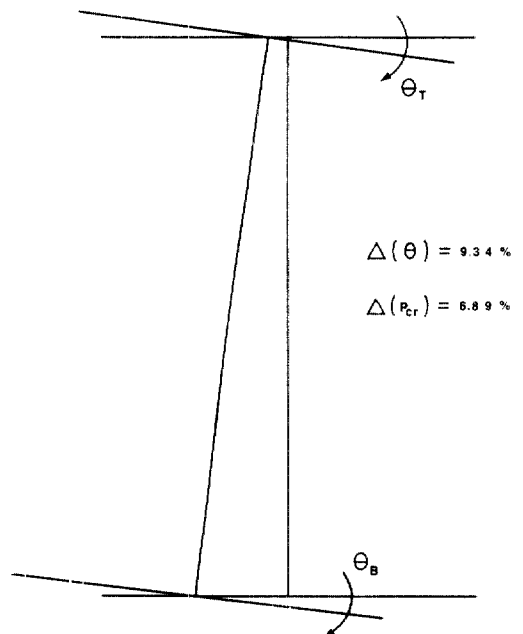


그림 12. I형 캔틸레버보 자유단에서의 비틀림(L/d=20)

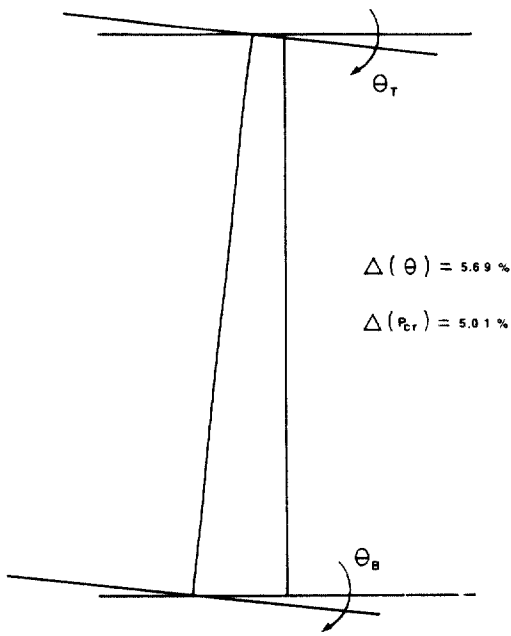


그림 13. I형 캔틸레버보 자유단에서의 비틀림(L/d=25)

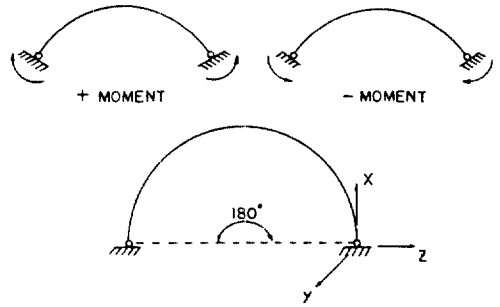


그림 14. 순수 힘을 받는 아치

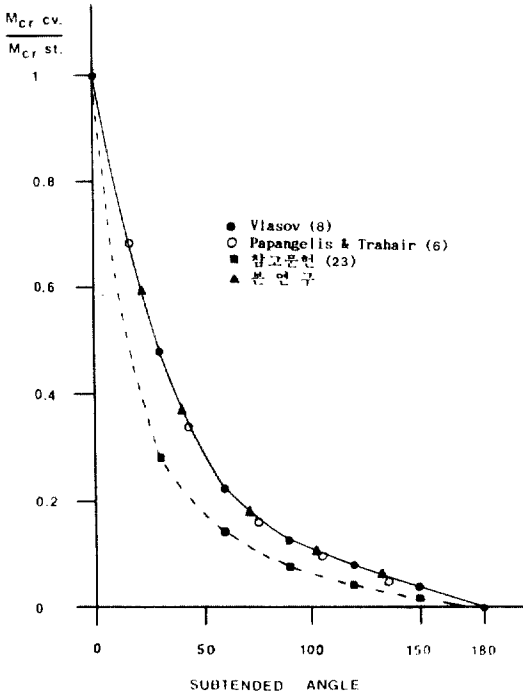


그림 15-1. 임계 모멘트 비(+ 모멘트)

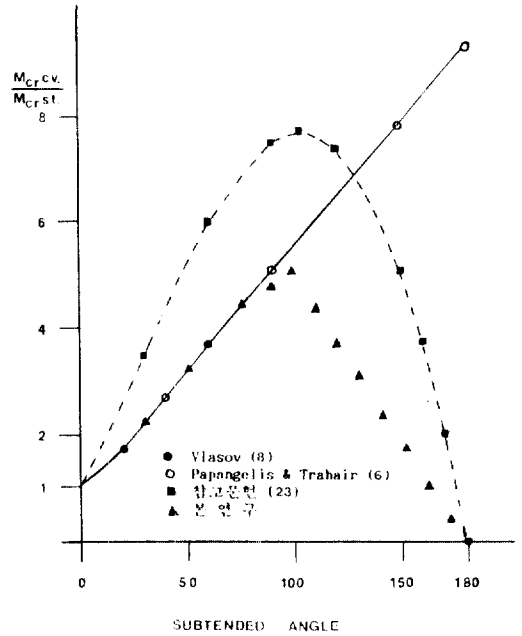


그림 15-2. 임계 모멘트 비(- 모멘트)

여기서, $M_{cr\ st}$ 는 직선보의 임계모멘트이고, $M_{cr\ cv}$ 는 아치의 임계모멘트이다. 따라서 내각이 0°일경우 $M_{cr\ cv}$ 값은 $M_{cr\ st}$ 값과 일치한다.

오직 참고문헌 (23)만이 본 연구결과와 유사한 경향을 보임을 알 수 있다.

본 해석 결과는 내각이 180°인 원호아치의 면외 좌굴에 대한 임계모멘트 값이 모멘트의 방향에 관계없이 0임을 확실히 보여주고 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 참고문헌(4)에서 개발된 shell 유

한요소를 사용하엿 박판으로 이루어진 부재의 선형 탄성 좌굴해석을 위한 컴퓨터 프로그램을 개발하였다. 그리고 몇가지 수치해석 예를 통하여 본 프로그램의 타당성을 입증하였다.

I형 단면을 갖는 직선보의 횡비틀 좌굴 해석결과, 단면자체의 비틀림(cross-sectional distortion)의 정도에 따라 이론값들과 본 해석의 결과와의 차이의 정도가 좌우됨을 알 수 있었다.

끝으로 순수 휨을 받는 양단이 단순지지된 원호아치를 해석한 결과 내각이 180°인 경우 면의 좌굴에 대한 임계모멘트 값이 모멘트의 방향에 관계없이 항상 0이 된다는 것이 밝혀졌다.

감사의 말씀

본 연구는 1989년 한국과학재단 신진연구 지원에 의하여 수행되었기에 이에 감사의 말씀을 드립니다.

참 고 문 헌

1. Bleich, F., *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill New York, N.Y., 1964.
2. Cheney, J. A., "Bending and Buckling of Thin-Walled Open Section Rings," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. No. 5, Oct. 1963. pp. 17~44.
3. Ojalvo, M., Demuts, E., and Tokarz, F., "Out-of Plane Buckling of Curved Members." *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 95, No. 10, Oct. 1969, pp. 2305~2316.
4. Lee, Sung C. and Yoo, C. H., "A Novel Shell Element Including In-Plane Torque Effect," *Computers & Structures*, Vol. 28. No. 4, 1988, pp. 502~522.
5. Lee, S. C., *Finite Element Analysis of Thin-Walled Assemblages*, Ph. D Dissertation, Auburn University, 1987.
6. Papangelis, J. P. and Trahair, N. S., "Flexural-Torsional Buckling of Arches," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 112, No. 12, Nov.1986, pp. 2492~2511.
7. Timoshenko, S. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability* 2nd Edition, McGraw-Hill Co., New York, N. Y., 1961.
8. Vlasov, V. Z., *Thin Walled Elastic Beams*, 2nd Edition National Science Foundation, Washington, D. C., 1961.
9. Yang, Y. B. and Kuo, S. R., "Static Stability of Curved Thin-Walled Beams", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 112, No. 8, Aug. 1986, pp. 821~841.
10. Yoo, C. H. "Bimoment Contribution to Stability of Thin-Walled Assemblages.", *Computers & Structures*, Vol. II, No. 5, May, 1980, pp. 465~471.
11. Yoo, C. H. "Flexural-Torsional Stability of Curved Beams", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 108, No. 6, Dec., 1982, pp. 1351~1369.
12. Yoo, C. H., and Pfeiffer, P.A., "Elastic stability of Curved Members", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 109, No. 12, Dec., 1983, pp. 2922~2940.
13. Yoo, C. H., Lee, S. C. and Carbine, R.L., "Experimental and Analytical Study of Horizontally Curved Steel Wide Flange Beams.", *Proc. Annual Technical Session, Structural Stability Research Council*, April, 1986.
14. Bathe, K. J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982.
15. J. L. Batoz, K. L. Bathe and L. W. Ho, "A study of three node triangular plate bending elements", *Int. J. Number Meth Engng.* 15, pp. 1771~1812, 1980.
16. K. L. Bathe and L. W. Ho, "A simple and effective element for analysis of general shell structures", *Comput. Struct.* 13, pp. 673~681, 1981.
17. R. W. Clough and C. P. Johnson, "Finite element approximation for the analysis of thin shells", *Int. J. Solids Struct.* 4, pp. 43~60, 1968.
18. B. E. Greene, D. R. Strom and R. C. Weikel, "Application of the stiffness method to the analysis of shell structures", *Proc. Aviation conf.* ASCE, Los Angeles, March, 1961.
19. S. Ahmad, B. M. Irons and O. C. Zienkiewicz, "Analysis of thick shell structures by curved fi-

nite elements", *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2, pp. 419~451, 1970.

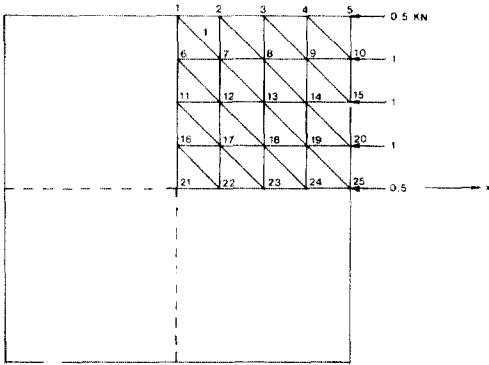
- 20. Manual of Steel Construction—*Load Resistance Factor Design*, AISC, 1986.
- 21. Patrick J. Dowling, "*New Directions in European Structural Steel Design*", Seminar presented to Korean Society of Steel Construction, 1990.
- 22. Yoo. C. H., Ramey, G. E., Lee, S. C., Carbine, R.

L. and Littrell, P. C., "Determination of the Elastic and Inelastic Buckling Behavior of Curved Flexural Members", Final Report to National Science Foundation, Washington, D. C., 1986.

- 23. 김생빈, 유재홍, 이성철 "순수 휨을 받는 아치의 횡 좌굴에 관한 연구", *토목학회 논문집*, 1989년 9월 9권 3호 pp. 13~19.

부 록

1 : 판의 좌굴해석(5.1)에서 사용된 요소망 B



2 : 요소망 B의 입력자료

PLATE BUCKLING PROBLEM - MESH B

25	80	1	1	1					
A 1	1	1	1	1	1	0.00	10.16	0.	
A 2		1	1	1		2.54	10.16	0.	
A 4		1	1	1		7.62	10.16	0. 1	
A 5		1	1	1	1	10.16	10.16	0.	
A 6	1		1	1	1	0.00	7.62	0.	
A 16	1		1	1		0.00	2.54	0. 5	
A 7						2.54	7.62	0.	
A 9						7.62	7.62	0. 1	
A 12						2.54	5.08	0.	
A 14						7.62	5.08	0. 1	
A 17						2.54	2.54	0.	
A 19						7.62	2.54	0. 1	
A 10		1	1			10.16	7.62	0.	
A 20		1	1			10.16	2.54	0. 5	
A 21	1	1	1	1	1	0.00	0.00	0.	
A 22		1	1	1	1	2.54	0.00	0.	
A 24		1	1	1	1	7.62	0.00	0. 1	
A 25		1	1	1	1	10.16	0.00	0.	
1									
	1.0	0.0	0.						
	0.	1.0	0.						
	0.	0.	1.						
	.3	20685.	20685.	3.					
2	32								
1									
1	7	2	1	3	1	.254			
5	1	6	7	3	1	.254			
9	12	7	6	3	1	.254			
13	6	11	12	3	1	.254			
17	17	12	11	3	1	.254			
21	11	16	17	3	1	.254			
25	22	17	16	3	1	.254			
29	16	21	22	3	1	.254			
5									
5	1		-0.5						
10	1		-1.0						
15	1		-1.0						
20	1		-1.0						
25	1		-0.5						
2	18	2	0						
0	0	1		0.0	0	0	0	0	0

3 : 선형해석 결과출력

DISPLACEMENTS/ROTATIONS OF UNRESTRAINED NODES

NODE NUMBER	X-TRANSLATION	Y-TRANSLATION	Z-TRANSLATION	ALPHA-ROTATION	BETA-ROTATION	GAMMA-ROTATION
1	0.000000+00	.213263D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
2	-.186210D-03	.225359D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.308294D-04
3	-.380531D-03	.224229D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.318660D-04
4	-.373985D-03	.222231D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.327092D-04
5	-.779721D-03	.235434D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
6	0.000000+00	.162241D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
7	-.189473D-03	.167601D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.226597D-04
8	-.381046D-03	.167280D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.380495D-04
9	-.573077D-03	.165707D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.312926D-04
10	-.764859D-03	.165082D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.327427D-04
11	0.000000+00	.108603D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
12	-.190153D-03	.111214D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.195407D-04
13	-.381683D-03	.110751D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.265357D-04
14	-.573427D-03	.109204D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.295946D-04
15	-.765448D-03	.107276D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.318157D-04
16	0.000000+00	.564991D-04	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
17	-.190061D-03	.551121D-04	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.142833D-04
18	-.380969D-03	.545883D-04	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.192966D-04
19	-.572241D-03	.534688D-04	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.224530D-04
20	-.764842D-03	.494184D-04	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	-.302381D-04
21	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
22	-.187992D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
23	-.376140D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
24	-.564374D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00
25	-.750402D-03	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00	0.000000+00

MEMBER / SHELL ELEMENT STRESSES AND MOMENTS

ELEMENT NUMBER	GAUSS POINT	MEMBRANE STRESS COMPONENTS			BENDING MOMENT COMPONENTS		
		SXX	SYY	SXY	M - XX	M - YY	M - XY
1	1	.1645E-01	-.2158E+01	.1598E-01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
1	2	.4631E-01	-.1594E+01	-.1725E-01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
1	3	.1135E+00	-.1812E+01	.6818E-01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
1	4	-.1183E+00	-.2031E+01	-.1066E-01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

4 : 선형좌굴해석 결과출력

MODE SHAPE NO. 1 (LOAD MULTIPLIER : .7189E+01)

MODE	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	Z-DISPLACEMENT	X-ROTATION	Y-ROTATION	Z-ROTATION
1	0.000000E+00	.444792E-13	0.000000E+00	-.148215E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	.188765E-13	.271520E-13	0.000000E+00	-.138288E+00	0.000000E+00	-.599591E-14
3	.257018E-13	.207256E-14	0.000000E+00	-.106357E+00	0.000000E+00	-.116117E-13
4	.276818E-13	-.256038E-13	0.000000E+00	-.578389E-01	0.000000E+00	-.114049E-13
5	.238119E-13	-.425563E-13	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
6	0.000000E+00	.410306E-13	.374426E+00	-.137922E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
7	.712986E-15	.278081E-13	.346122E+00	-.128373E+00	.214227E-01	-.781536E-14
8	.258242E-14	.389903E-14	.265404E+00	-.979742E-01	.402320E-01	-.966076E-14
9	.566178E-14	-.221459E-13	.143948E+00	-.528290E-01	.528977E-01	-.847832E-14
10	.877698E-14	-.450867E-13	0.000000E+00	0.000000E+00	.577944E-01	-.114221E-13
11	0.000000E+00	.311247E-13	.695725E+00	-.104725E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
12	-.844515E-14	.213846E-13	.642053E+00	-.894152E-01	.408662E-01	-.606241E-14
13	-.123998E-13	.393298E-14	.490681E+00	-.751883E-01	.753936E-01	-.733364E-14
14	-.116525E-13	-.158548E-13	.265324E+00	-.402116E-01	.980014E-01	-.666000E-14
15	-.731625E-14	-.329995E-13	0.000000E+00	0.000000E+00	.198366E-01	-.490048E-14
16	0.000000E+00	.167509E-13	.914997E+00	-.576607E-01	0.000000E+00	0.000000E+00
17	-.135601E-13	.113560E-13	.842829E+00	-.551196E-01	.553304E-01	-.385905E-14
18	-.212807E-13	.255098E-14	.641837E+00	-.408073E-01	.894424E-01	-.415798E-14
19	-.219179E-13	-.836844E-14	.346294E+00	-.216389E-01	.128248E+00	-.329272E-14
20	-.171006E-13	-.171102E-13	0.000000E+00	0.000000E+00	.136668E+00	-.167265E-14
21	0.000000E+00	0.000000E+00	.100000E+01	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
22	-.150417E-13	0.000000E+00	.914528E+00	0.000000E+00	.573444E-01	0.000000E+00
23	-.237251E-13	0.000000E+00	.695412E+00	0.000000E+00	.104190E+00	0.000000E+00
24	-.260413E-13	0.000000E+00	.375070E+00	0.000000E+00	.137268E+00	0.000000E+00
25	-.217883E-13	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	.149221E+00	0.000000E+00

MODE SHAPE NO. 2 (LOAD MULTIPLIER : .1990E+02)

MODE	X-DISPLACEMENT	Y-DISPLACEMENT	Z-DISPLACEMENT	X-ROTATION	Y-ROTATION	Z-ROTATION
1	0.000000E+00	.330283E-10	0.000000E+00	.135881E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	.121868E-10	.262496E-10	0.000000E+00	.639071E-01	0.000000E+00	-.208145E-11
3	.259164E-10	.113584E-10	0.000000E+00	-.896733E-01	0.000000E+00	-.678172E-11
4	.427430E-10	-.196014E-10	0.000000E+00	-.131369E+00	0.000000E+00	-.189493E-10
5	.421352E-10	-.603314E-10	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
6	0.000000E+00	.311058E-10	-.381924E+00	.126417E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
7	.171405E-11	.269217E-10	-.144380E+00	.509849E-01	-.153904E+00	-.443127E-11
8	.455232E-11	.127064E-10	.259005E+00	-.920135E-01	-.125950E+00	-.853758E-11
9	.799668E-11	-.144154E-10	.335405E+00	-.118916E+00	.601269E-01	-.136382E-10
10	.138305E-10	-.618159E-10	0.000000E+00	0.000000E+00	.161451E+00	-.188958E-10
11	0.000000E+00	.237246E-10	-.700014E+00	.807631E-01	0.000000E+00	0.000000E+00
12	-.676605E-11	.212359E-10	-.258887E+00	.431133E-01	-.294855E+00	-.445386E-11
13	-.119339E-10	.102978E-10	.491902E+00	-.650947E-01	-.227630E+00	-.741205E-11
14	-.141374E-10	-.100826E-10	.633672E+00	-.100840E+00	.118358E+00	-.938504E-11
15	-.105127E-10	-.436168E-10	0.000000E+00	0.000000E+00	.312974E+00	-.913708E-11
16	0.000000E+00	.125925E-10	-.905490E+00	.344042E-01	0.000000E+00	0.000000E+00
17	-.117378E-10	.114687E-10	-.334922E+00	.250714E-01	-.387485E+00	-.307344E-11
18	-.214134E-10	.565660E-11	.656690E+00	-.398089E-01	-.238215E+00	-.445651E-11
19	-.267374E-10	-.481284E-11	.848652E+00	-.617961E-01	.153654E+00	-.483614E-11
20	-.233225E-10	-.224726E-10	0.000000E+00	0.000000E+00	.422185E+00	-.291978E-11
21	0.000000E+00	0.000000E+00	-.100000E+01	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
22	-.125908E-10	0.000000E+00	-.352670E+00	0.000000E+00	-.423291E+00	0.000000E+00
23	-.235358E-10	0.000000E+00	.728865E+00	0.000000E+00	-.222324E+00	0.000000E+00
24	-.302490E-10	0.000000E+00	.931072E+00	0.000000E+00	.162203E+00	0.000000E+00
25	-.305285E-10	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	.672045E+00	0.000000E+00