

물체력이 작용되는 반무한영역문제의 비선형유한요소-경계요소 조합해석

Analysis of Semi-Infinite Problems Subjected to Body Forces
Using Nonlinear Finite Elements and Boundary Elements

황 학 주* · 김 문 겸** · 허 택 녕*** · 나 경 웅***
Hwang, Hak Joo · Kim, Moon Kyum · Huh, Taik Nyung · Ra, Kyeong Woong

Abstract

The underground structure, which has infinite or semi-infinite boundary conditions, is subjected by body forces and in-situ stresses. It also has stress concentration, which causes material nonlinear behavior, in the vicinity of the excavated surface. In this paper, some methods which can be used to transform domain integrals into boundary integrals are reviewed in order to analyze the effect of the body forces and the in-situ stresses. First, the domain integral of the body force is transformed into boundary integral by using the Galerkin tensor and divergence theorem. Second, it is transformed by writing the domain integral in cylindrical coordinates and using direct integration. The domain integral of the in-situ stress is transformed into boundary integral applying the direct integral method in cylindrical coordinates. The methodology is verified by comparing the results from the boundary element analysis with those of the finite element analysis. Coupling the above boundary elements with finite elements, the nonlinear behavior that occurs locally in the vicinity of the excavation is analyzed and the results are verified. Thus, it is concluded that the domain integrals of body forces and in-situ stresses could be performed effectively by transforming them into the boundary integrals, and the nonlinear behavior can be reasonably analyzed by coupled nonlinear finite element and boundary element method. The result of this research is expected to be used for the analysis of the underground structures in the effective manner.

요 지

지하구조물은 물체력과 초기응력이 지배적인 하중조건이 되며, 무한 또는 반무한영역을 경계로 한다.

*정회원 · 연세대학교 공과대학 토목공학과 교수

**정회원 · 연세대학교 공과대학 토목공학과 부교수

***정회원 · 연세대학교 대학원 토목공학과 박사과정

또한 굴착면 주위에는 응력집중에 의해 비선형 거동이 발생한다.

본 논문에서는 경계요소법으로 물체력과 초기응력을 해석하기 위하여 영역적분은 경계 적분화하였다. 물체력에 대한 영역적분은 Galerkin테서와 발산정리를 사용한 방법과 극좌표를 이용한 직접적분 방법으로 경계적분화하였고, 초기응력에 대한 영역적분은 극좌표를 이용한 직접적분 방법을 응용하여 경계 적분화하였다. 경계요소해석 결과는 유한요소해석 결과와 비교하여 검증하였고 검증된 경계요소 프로그램을 비선형 유한요소 프로그램과 조합하여 굴착면 주위에 발생하는 비선형 거동을 합리적으로 해석하도록 하였다. 경계요소법에서 고려하기 어려운 물체력과 초기응력에 대한 영역적분을 경계적분화하여 효율적으로 해석할 수 있었으며, 조합해석 방법으로 비선형 거동을 합리적으로 해석할 수 있었다. 본 연구의 결과는 지하구조물의 해석에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

1. 서 론

최근 경계요소법에 대한 연구가 활발해 지면서 구조해석 분야에서도 널리 활용되고 있다. 경계요소법은 경계에서만 요소를 구성하므로 유한요소법에 비하여 자료의 입력이 간단할 뿐만 아니라, 무한 및 반무한 영역을 해석할 때 매우 효과적이다⁽¹⁾. 지하구조물의 해석에 있어 그 경계는 무한 및 반무한 영역으로 설정되며, 또한 굴착부 주변에서는 응력집중에 의해서 국부적으로 재료의 비선형 거동이 발생하게 된다⁽²⁾. 따라서 경계요소와 유한요소를 조합한 해석방법이 효율적이다⁽³⁾.

지반의 굴착문제 등을 해석하는 경우, 물체력인 자중과 자중에 의한 초기응력이 지배적인 하중이 된다. 물체력이 재하되는 문제를 경계요소법으로 해석하기 위해서 영역적분이 필요하다. 영역적분 방법으로는 내부요소(internal cell)을 이용하는 방법^(4, 5)과 영역적분을 경계 적분형태로 변환하여 경계적분하는 방법^(6, 7)이 있다. 영역적분을 위하여 내부요소를 이용하려면 영역을 미리 분할하여야 하는 불편함이 있다. 따라서 영역적분을 경계적분형태로 변환하여 적분하는 방법이 더 효과적인 해석방법이 된다. 영역적분을 경계적분으로 변환하기 위하여 Danson⁽⁸⁾은 Galerkin테서와 발산정리를 이용하여 변환하는 방법을 제시하였고, Venturini⁽⁶⁾는 극좌표를 이용하여 변환하는 방법을 제안하였다.

본 연구에서는 경계요소에 Danson과 Venturini가 제안한 방법을 응용하여 물체력과 초기응력 문제의 해석방법을 개발하고 이를 비선형유한요소와 조합하여 물체력이 작용하는 반무한 영역문제에 대한 효율적인 해석방법을 제시하고자 한다.

2. 경계요소에서의 물체력과 초기응력

경계요소법은 크게 직접 경계요소법과 간접 경계요소법으로 나눌 수 있다. 직접 경계요소법이 유한요소와 조합하기에 용이하므로 본 연구에서는 직접 경계요소법에 의한 접근방법을 이용하도록 한다.

2.1 경계적분방정식

연속체 내의 한 점에서 응력텐서를 σ_{ij} , 물체력을 b_k 로 나타내면 평형방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (1)$$

여기서 응력 σ_{ij} 는 외부하중에 의한 탄성응력 σ_{ij}^e 와 초기응력 σ_{ij}^0 의 합으로 나타낼 수 있다. 영역 Ω 의 전체경계 Γ 를 기하학적 경계 Γ_1 과 역학적 경계 Γ_2 로 분할 할때, 경계조건은 Γ_1 과 Γ_2 에 대하여 각각 식(2)와 같다.

$$u = \underline{u} \text{ on } \Gamma_1, \quad t_i = \sigma_{ij} n_j = \underline{t}_i \text{ on } \Gamma_2 \quad (2)$$

여기서 \underline{u} 는 변위벡터, \underline{t}_i 는 표면력벡터이며 \underline{u} 및 \underline{t}_i 는 기지의 변위벡터 및 표면력벡터이다. 또한 n_j 는 외부로 향한 수직벡터의 방향여현이다.

대상영역에 대하여 가중잔차방정식(weighted residual equation)을 구성하면 식(3)과 같다.

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (t_k - \underline{t}_k) u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u_k - \underline{u}_k) t_k^* d\Gamma \quad (3)$$

여기서, u_k^* 는 가중영역에서 변위벡터이며, t_k^* 는 가중영역에서의 변위벡터에 대응하는 표면력벡터이다. 식(3)을 두번 부분적분하고 변형률-변위 관계를 이용하여 정리하면 다음과 같은 적분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} u_k^* d\Omega - \int_{\Omega} b_k \epsilon_{ij} u_k^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega \\ &= - \int_{\Gamma_1} \underline{t}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \underline{t}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k t_k^* d\Gamma \\ & \int_{\Gamma_1} \underline{u}_k t_k^* d\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 영역 내 임의의 점 i 에서 x_p 방향으로 단위 하중 δ_k^i 가 작용될 때의 응력을 σ_{pk}^i 라 하고, 이를 가중함수로 사용하도록 한다. 무한영역에서 이 문제의 해로서 kelvin의 해⁽⁷⁾를 사용한다. 평면변형률 문제에서 변위, 표면력, 변형률에 대한 기본해를 각각 $u_{pk}^i, t_{pk}^i, \epsilon_{pk}^i$ 로 표시하면 식(5)와 같다.

$$u_{pk}^i = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} \{ (3-4\nu) \ln r \delta_{k-r, p, r, k} \} \quad (5a)$$

$$t_{pk}^i = \frac{-1}{4\pi G(1-\nu)r} \{ [(1-2\nu) \delta_{k-r, p, r, k} + 2r_{,p} r_{,k}] n_m r_m - (1-2\nu)(r_p n_k - r_k n_p) \} \quad (5b)$$

$$\epsilon_{pk}^i = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)r} \{ (1-2\nu)(r_p \delta_{pk} + r_k \delta_{ip}) - r_p \delta_k + 2r_{,p} r_{,k} \} \quad (5c)$$

식(5)에서 G 는 전단탄성계수, ν 는 포아손비이며, r 은 재하점 i 와 변위 및 표면력이 발생하는 x 점 사이의 거리를 나타낸다. 반무한영역의 문제에 대한 기본해는 무한탄성영역에 대한 Kelvin의 기본해에 반무한영역의 보충항을 추가하여 구성된다⁽⁸⁾.

가중함수로 Kelvin해를 이용하는 경우, 기본해가 영역 내부의 임의의 점에서는 만족되지만, 하중점이 경계상에 있으므로 특이점이 발생하게 된다. 특이점의 영향을 고려하면 다음과 같은 경계적분방정식을 얻을 수 있다.

$$C_p U_p + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^i \epsilon_{ij}^i d\Omega + \int_{\Gamma} t_{ik}^i u_{ik}^i d\Gamma = \int_{\Omega} b_k u_{ik}^i d\Omega + \int_{\Gamma} t_{ik}^i u_{ik}^i d\Gamma \quad (6)$$

여기서 C_p 는 경계면 상의 기하학적 형상에 의하여 결정되는 상수이며, σ_{ij}^i 는 초기 응력으로 그 크기가 좌표에 따라서 변화하는 경우에 대해서 고려하여야 한다.

2.2 물체력의 해석방법

식(6)에서 변위와 표면력에 대한 항은 경계적분의 형태로 변환되었으나 초기응력과 물체력에 대한 항은 영역적분으로 남아 있다. 물체력의 영역적분을 위하여 내부요소를 이용한 방법을 사용할 수 있으나 이는 영역문제를 경계에서의 문제로 치환하는 경계요소의 장점을 반감시키므로, 영역적분을 효율적으로 하기 위해서 영역적분을 경계적분으로 변환하는 방법을 사용하도록 한다. 물체력의 영역적분을 경계적분으로 변환하는 방법으로서 Galerkin테서와 발산정리를 이용하여 영역을 경계로 투영시키는 방법과 극좌표를 이용한 직접적분 방법을 고찰

한다.

2.2.1 Galerkin테서와 발산정리를 이용하는 방법

식(6)에서 물체력에 대한 항은 다음과 같다.

$$B_p = \int_{\Omega} u_{ik}^i b_k d\Omega \quad (7)$$

여기서, 가중변위 u_{ik}^i 가 Galerkin테서 G_{ik}^* 와 다음과 같이 연결된다고 생각한다.

$$u_{ik}^i = G_{ik}^* n_m m - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{im, nk}^* \quad (8)$$

평면변형률문제의 경우 Galerkin테서는 다음과 같다.

$$G_{ik}^* = \frac{1}{8\pi G} r^2 \ln(1/r) \delta_{ik} \quad (9)$$

이다. 식(9)와 (8)로부터

$$u_{ik}^i = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} \{ 9(3-4\nu) \ln r \delta_{k-r, p, r, k} + 1/2(7-8\nu) \delta_{ik} \} \quad (10)$$

이 된다. 식(5a)와 식(10)의 차이인 $1/2(7-8\nu) \delta_{ik}$ 는 계의강체이동을 표시하는 부분이다.

식(8)을 식(7)에 대입하고 발산정리를 이용하면, 영역적분은 다음과 같이 경계적분의 형태로 변환될 수 있다.

$$B_p = \int_{\Gamma} \frac{r}{8\pi G} \{ [2 \ln(1/r) - 1] (b_p n_m r_m - \frac{1}{2(1-\nu)} b_p r_m n_p) \} d\Gamma \quad (11)$$

2.2.2 극좌표를 이용한 직접적분방법

Venturini는 그림 1과 같이 영역을 극좌표로 나타내고 r 에 대하여 적분하여 영역적분을 경계적분으로 변환하였다. 물체력이 일정한 경우, 식(11)에서 물체력에 대한 적분을 극좌표 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$B_p = \int_{\Omega} u_{ik}^i b_k d\Omega = b_k \int_{\theta} \int_r u_{ik}^i r dr d\theta \quad (12)$$

여기서 θ 에 적분을 경계에 대한 적분으로 변환하면 $d\theta$ 는 다음과 같다.

$$d\theta = n_m R_{,m} / R d\Gamma \quad (13)$$

따라서, 기본해를 대입하고 r 에 대하여 적분하면 다음과 같이 경계에 대한 적분으로 변환된다.

$$B_p = b_k \int_{\Gamma} B_{ik}^* d\Gamma \quad (14)$$

여기서

$$B_{ik}^* = \frac{R}{16\pi G(1-\nu)} \{ -(3-4\nu)(\ln R - 1/2) \delta_{ik} + R_{,p} R_{,k} \} n_m m \quad (15)$$

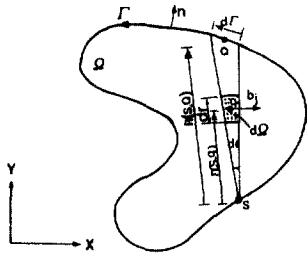


그림 1. 영역적분의 경계적분화

이다.

23 초기응력의 해석방법

경계적분방정식에서 초기응력에 대한 항 역시 영역적분의 형태로 남아 있다. 초기 응력에 대한 영역적분을 경계적분 형태로 변환할 때, 초기응력은 좌표에 따라서 그 크기가 변하기 때문에 Galerkin 텐서와 발산정리를 이용하여 경계적분화하기 어려우므로 극좌표를 이용한 직접적분 방법으로 경계적분화하도록 한다. 극좌표를 이용하면 초기 응력에 대한 영역적분은 다음과 같이 표시된다.

$$S_p = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij}^* dQ = \int_r \int_{\theta} \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij}^* r dr d\theta \quad (16)$$

여기에 식(13)을 적용하면 S_p 는 다음과 같이 경계적분화된다.

$$S_p = \int_r S_{pj}^* d\Gamma \quad (17)$$

역시

$$S_{pj}^* = \left[\int_r \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij}^* r dr \right] n_m R_{,m} / R \quad (18)$$

이다.

24 경계요소 계방정식

경계적분방정식은 한 점의 변위에 대하여 전체 경계 Γ 와 전체 영역 Ω 에 대한 적분 항으로 표시된다. 경계적분방정식을 풀기 위해서 경계를 요소화하고, 이 요소에 대한 근사해를 구하기 위한 계방정식을 구성하도록 한다. 경계적분방정식을 행렬 형태로 나타내기 위해서 전체좌표계에 대한 변위 $\{u\}$ 와 표면력 $\{t\}$ 를 형상함수로 나타낸다.

변위와 표면력을 선형요소로 이산화하면,

$$\{u\} = \{\phi\}^T \{u^n\} \quad (19)$$

$$\{t\} = \{\phi\}^T \{t^n\} \quad (20)$$

으로 할 수 있다. 여기서 $\{\phi\}^T$ 는 형상함수이며 $\{u^n\}$ 과 $\{t^n\}$ 은 각각 절점에서의 변위와 표면력이다. 식(19)와 식(20)을 경계적분방정식(6)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} [c] \{u\} + \sum_{j=1}^N \left(\int_r S_{pj}^* d\Gamma \right) + \sum_{j=1}^N \left(\int_r \{t^j\} \{\phi\}^T d\Gamma \right) \{du\} \\ = \sum_{j=1}^N \left(\int_r b_{pj}^* d\Gamma \right) + \sum_{j=1}^N \left(\int_r \{u^j\} \{\phi\}^T d\Gamma \right) \{dt\} \quad (21) \end{aligned}$$

여기서 N 은 경계상의 절점수를 나타낸다. 식(21)을 수치적분의 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [c] \{du\} + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{q=1}^L w_q (S_{pj}^*)_{qj} \right] + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{q=1}^L |J|_{qj} w_q (\{t^j\} \{\phi_q\}^T) \right] \{du\} \\ = \sum_{j=1}^N \left[\sum_{q=1}^L w_q (b_{pj}^*)_{qj} \right] + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{q=1}^L |J|_{qj} w_q (\{u^j\} \{\phi_q\}^T) \right] \{dt\} \quad (22) \end{aligned}$$

여기서 $|J|$ 는 Jacobian행렬식, w 는 Gauss적분의 가중치, L 은 경계요소의 수이다.

따라서 계방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$[H] \{u\} + \{S\} = [G] \{t\} + \{B\} \quad (23)$$

계방정식(23)에서 초기응력에 대한 항 $\{S\}$ 는 r 에 대하여 적분하여야 한다. 이때 초기응력이 x, y 좌표에 따라 변화하는 함수이므로 r 에 대한 적분방법으로 수치적분을 사용한다. 이 수치적분은 그림 2에서와 같이 경계상의 한 절점 S 에서 각 요소상의 적분점 Q 에 대하여 적분함에 의하여 수행된다.

3. 비선형유한요소-경계요소의 조합

유한요소와 경계요소의 조합은 경계요소의 계방정식을 유한요소형 계방정식으로 변환시키는 유한요소형 접근 방법을 사용한다. 탄소성이론으로부터 구성된 유한요소 영역의 증분형태 계방정식은 식(24)와 같이 하중-변위의 관계로 표시된다.

$$[K]_{FE} \{du\}_{FE} = \{dF\}_{FE} + \{dD\}_{FE} \quad (24)$$

여기서 $[K]_{FE}$ 는 강성도행렬, $\{du\}_{FE}$ 는 절점변위의 증분, $\{dF\}_{FE}$ 는 외부에서 가해진 하중에 의한 등가

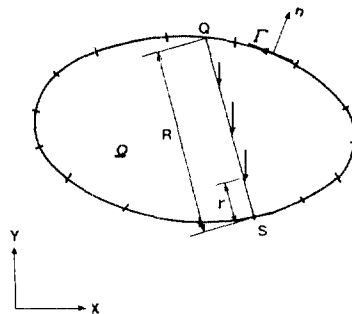


그림 2 초기응력의 적분과정

절점하중의 증분, $\{dD\}_{FE}$ 는 물체력과 초기응력의 증분 항이다. 경계요소 영역에서는 경계적분방정식에 대한 계방정식은 표면력-변위 관계로 구성되므로 이를 하중-변위 관계로 변환한다. 에너지이론을 이용하여 경계요소에서 얻어진 요소행렬을 대칭화하는 방법을 사용한다. 경계요소 영역에 대하여 최소위치에너지 원리로 부터 구한 평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta_p = \frac{1}{2} \int_r (\{\delta u\}^T \{t\} - \{\delta t\}^T \{u\}) d\Gamma - \int_r \{\delta u\}^T \{t\} d\Gamma - \int_\Omega \{\delta u\}^T \{B\} d\Omega + \int_\Omega \{\delta u\}^T \{S\} d\Omega \quad (25)$$

여기서 $\{u\}$ 와 $\{t\}$ 는 변위와 표면력을 나타낸다. $\{u\}$ 와 $\{t\}$ 에 대해서 형상함수를 이용하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\delta_p = \frac{1}{2} (\{\delta u\}^T [N] \{t\} + \{\delta t\}^T [N]^T \{u\}) - \{\delta u\}^T \{F\} - \{\delta u\}^T \{D\} = 0 \quad (26)$$

여기서, $\{u\}$ 와 $\{t\}$ 는 절점에서의 미지수이며, $\{D\}$ 는 물체력과 초기응력의 항을 나타내며, $[N]$ 은 형상함수의 적분으로 얻어진다.

적분방정식으로 부터 $\{t\}$ 에 대한 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\{t\} = [G]^{-1} [H] \{u\} = [C] \{u\} \quad (27)$$

식(27)을 식(26)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\{\delta u\}^T \left(\frac{1}{2} ([N][C] \{u\} + [C]^T [N]^T \{u\}) - \{F\} - \{D\} \right) = 0 \quad (28)$$

따라서 경계요소의 계방정식을 다음과 같이 유한요소 형태로 쓸 수 있다.

$$[K]_{FE} \{u\}_{FE} = \{F\}_{FE} + \{D\}_{FE} \quad (29)$$

여기서, $[K]_{FE}$ 는 대칭행렬이며 다음과 같다.

$$[K]_{FE} = \frac{1}{2} ([N][C] + [C]^T [N]^T) \quad (30)$$

유한요소의 강성도행렬 $[K]_{FE}$ 와 경계요소의 강성도행렬 $[K]_{BE}$ 은 모두 하중-변위관계를 갖고 있으므로 유한요소와 경계요소의 접합부분에서 공유하는 절점에 대하여 강성도와 하중을 조합하여 다음과 같이 전체 강성도행렬과 하중행렬을 구성하여 유한요소 형태로 만들 수 있다.

$$([K]_{FE} + [K]_{BE}) (\{u\}_{FE} + \{u\}_{BE}) = \{F\}_{FE} + \{F\}_{BE} + \{D\}_{FE} + \{D\}_{BE} \quad (31)$$

이로부터 전체 강성도행렬과 전체하중 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$[K]_G \{u\}_G = \{F\}_G + \{D\}_G \quad (32)$$

여기서 $[K]_G$ 는 조합된 전체 강성도행렬, $\{u\}_G$ 는 조합된 전체 변위, $\{F\}_G$ 는 조합된 전체 외부하중, $\{D\}_G$ 는 조합된 전체 물체력과 초기응력을 나타낸다.

4. 결과분석 및 검증

물체력과 초기응력을 하중조건으로 하는 반무한영역 문제에 대한 비선형 유한요소-경계요소의 조합 해석 방법의 검증을 위하여 우선 경계요소해석에 있어서 물체력과 초기응력의 재하 방법을 검증한다. 그림 3과 같이 지표로부터 40m깊이에서 반지름이 10m인 원공을 굴착한 경우를 생각하도록 한다. 해석 대상의 물성은 탄성계수 2000Mpa, 포아손비 0.2, 밀도 $2t/m^3$ 로 하며, 중력가속도는 $9.8m/sec^2$ 으로 하였다. 해석 모형은 원공의 굴착으로 인한 영향이 미소한 곳까지 영역을 설정하여야 한다. 따라서, 내부영역 문제에 대한 경계요소해석과 유한요소해석에서 경계는 지표에서 깊이 방향으로 300m, 원공 중심에서 수평 방향으로 200m떨어진 곳으로 설정하였다. 경계요소 해석은 내부영역 문제에 대하여 그림 4(a)와 같이 48개의 절점과 44개의 요소에 대하여 실시하였으며, 원공 주위의 절점과 요소는 그림 4(b)와 같다. 반무한영역 문제에 대하여는 그림 4(b)와 같이 원공 주위에서 24개의 절점과 24개의 요소로 구성하였다. 유한요소 해석은 대칭성을 고려하여 그림 5와 같이 경계요소의 반을 모형화하였으며, 130개의 절점과 105개의 요소로 구성하였다.

4.1 물체력 재하 방법의 검증

경계요소에 의한 물체력 재하 방법의 검증을 위

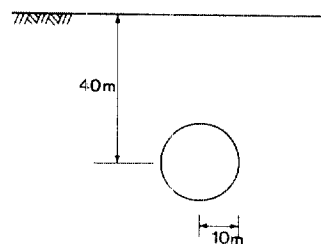
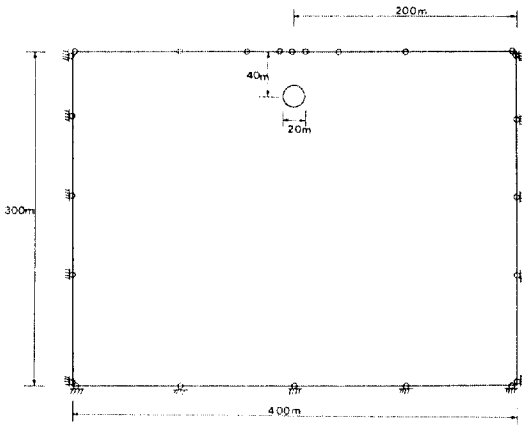
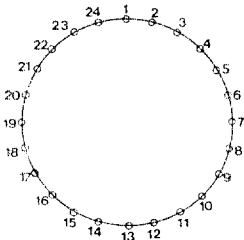


그림 3. 해석대상



(a) 내부영역 문제의 경계요소 해석모형



(b) 원공주위의 절점과 요소
그림 4. 경계요소해석 모형

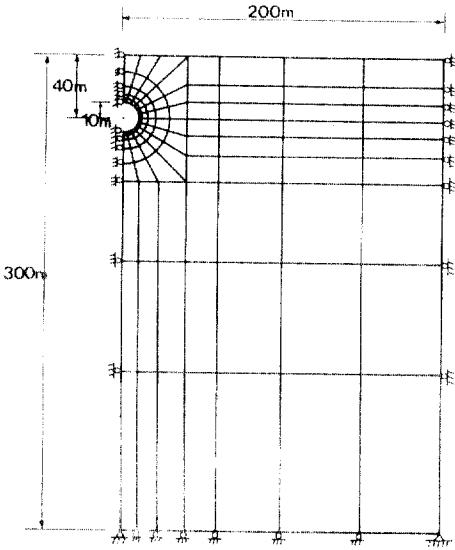


그림 5. 유한요소해석 모형

하여 내부영역 문제에 대해서 원공주위에서 발생하

는 변위를 유한요소해석 결과와 비교한다. 경계요소법에 의한 물체력의 해석은 Danson의 방법과 Venturini의 방법을 사용하여 두 경우를 해석하였다.

표 1은 경계요소법과 유한요소법을 사용하여 물체력을 하중조건으로 하였을 때 구한 원공 주위의 각 절점에서 발생하는 변위를 비교한 것이다. 경계요소에서 Danson의 방법과 Venturini의 방법으로 해석한 결과는 동일하였다. 경계요소에 의한 해석결과와 유한요소에 의한 해석 결과는 수직방향 변위에 대하여 비교하였을 때, 2%이내의 근소한 차이를 보이며, 수평방향 변위는 수직방향의 변위에 비하여 아주 작은값이므로 전체적인 거동에 큰 영향을 미치지 않는다. 따라서 경계요소해석 방법으로 물체력에 대한 영향을 효과적으로 고려할 수 있음을 알 수 있다.

4.2 물체력과 초기응력 재하 방법의 검증

지반을 굴착하기 전에 초기응력에 의해 발생하는 원공 주위의 표면력은 평형을 이루고 있다. 따라서, 원공 주위의 변위를 구속하면 굴착하기 전의 상태와 같아지므로, 이때 발생한 원공 주위의 반력은 초기응력에 의해 원공 내부에서 발생하는 표면력과 같아야 한다. 표 2는 정지토압계수를 0.25로 하여 원공 주위를 구속하였을 때 발생하는 반력을 초기응력에 의해 발생하는 표면력과 비교한 것이다. 표 2에서 반력과 표면력의 오차는 2%이내에 있으므로 합리적인 해석이 됨을 알 수 있다. 그림 6은 내부영역 문제에 대한 경계요소 해석결과로 원공 주위에서 발생하는 x방향 변위와 y방향 변위를 비교한 것이다. 유한요소해석 결과와 전체적인 변위 형상이 서로 일치함을 알 수 있다.

4.3 유한요소-경계요소 조합해석에 대한 검증

유한요소와 경계요소를 조합한 경우를 검증하기 위하여 그림 7과 같은 비선형 유한요소-경계요소 조합해석 모형에 대하여 선형해석과 비선형 해석을 하여 유한요소 해석 결과와 비교하였다. 조합해석은 반무한영역에 대한 경계요소와 조합하여 해석하였으며 정지토압계수는 0.4로 하여 해석하였다. 그림 8에는 선형해석의 경우 각 요소의 적분점에서 구한 최대주응력과 최소주응력을 원공 중심에서 떨어진 거리에 따라 구분하여 비교하였다. 그림 8(a)는 원공 중심에서 10.47m 떨어져 있는 적분점에서의

표 1. 물체력에 의한 원공 주위의 변위(단위 m)

절점번호	x방향변위			y방향변위		
	Danson	Venturini	FEM	Danson	Venturini	FEM
1	0.0000	0.0000	0.0000	-0.3966	-0.3966	-0.3966
2	0.0002	0.0002	0.0002	-0.3963	-0.3963	-0.3963
3	0.0005	0.0005	0.0003	-0.3954	-0.3954	-0.3954
4	0.0007	0.0007	0.0005	-0.3940	-0.3940	-0.3940
5	0.0009	0.0009	0.0007	-0.3921	-0.3921	-0.3921
6	0.0010	0.0010	0.0008	-0.3898	-0.3898	-0.3898
7	0.0010	0.0010	0.0009	-0.3872	-0.3872	-0.3874
8	0.0010	0.0010	0.0008	-0.3845	-0.3845	-0.3848
9	0.0009	0.0009	0.0007	-0.3817	-0.3817	-0.3822
10	0.0007	0.0007	0.0005	-0.3793	-0.3793	-0.3799
11	0.0005	0.0005	0.0003	-0.3773	-0.3773	-0.3780
12	0.0003	0.0003	0.0001	-0.3761	-0.3761	-0.3768
13	0.0000	0.0000	0.0000	-0.3756	-0.3756	-0.3763

표 2. 초기응력에 의해 원공 주위에 발생하는 반력(단위 Mpa)

절점번호	x방향변위			y방향변위		
	Danson	Venturini	FEM	Danson	Venturini	FEM
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.5891	0.5931	0.5880
2	0.0385	0.0391	0.0385	0.5754	0.5794	0.5744
3	0.0767	0.0780	0.0768	0.5335	0.5367	0.5320
4	0.1140	0.1157	0.1141	0.4582	0.4606	0.4564
5	0.1484	0.1504	0.1485	0.3454	0.3465	0.3430
6	0.1768	0.1791	0.1771	0.1914	0.1923	0.1898
7	0.1958	0.1981	0.1960	0.0024	0.0013	0.0000
8	0.2016	0.2038	0.2016	-0.2148	-0.2163	-0.2160
9	0.1912	0.1932	0.1910	-0.4398	-0.4431	-0.4410
10	0.1635	0.1651	0.1631	-0.6524	-0.6564	-0.6534
11	0.1197	0.1209	0.1192	-0.8268	-0.8319	-0.8260
12	0.0633	0.0639	0.0630	-0.9421	-0.9474	-0.9402
13	0.0000	0.0000	0.0000	-0.9817	-0.9877	-0.9800

주응력을 표시한 것이고, 그림 8(b)는 원공 중심에서 11.90m 떨어진 적분점에서의 주응력을 표시한 것이다. 주응력을 비교한 결과 조합해석 방법이 타당함을 알 수 있다.

비선형해석을 위한 항복조건은 Mohr-Coulomb 파괴조건을 사용하였으며, 내부 마찰각을 30° 로 하고 점착력을 380kpa, 370kpa, 360kpa, 350kpa,

340kpa, 330kpa, 320kpa로 변화하며 해석하였다. 조합해석의 경우, 점착력이 370kpa 이상에서는 선형으로 나타났고, 유한요소 해석은 점착력이 360kpa 이상에서 선형으로 나타났다. 그림 9는 점착력의 변화에 따른 소성영역의 변화를 비교한 것으로 조합해석에 의한 소성영역이 유한요소 해석결과 보다 다소 크게 나타났으나 전반적인 경향은 잘 일치하

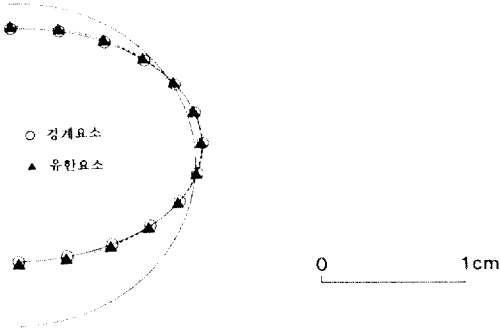
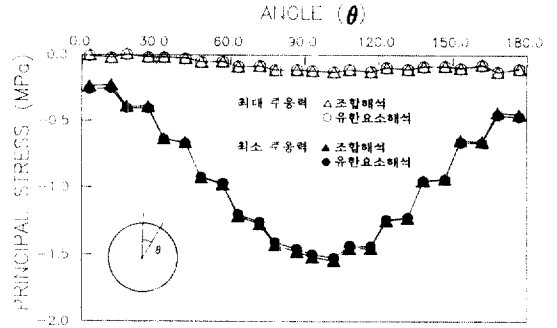


그림 6. 원공 주위에서 발생하는 변위



(b) 원공 중심에서 11.90m 떨어진 적분점에서의 주응력

그림 8. 원공 주위의 주응력 비교

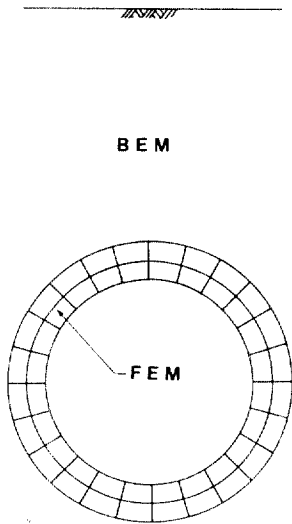
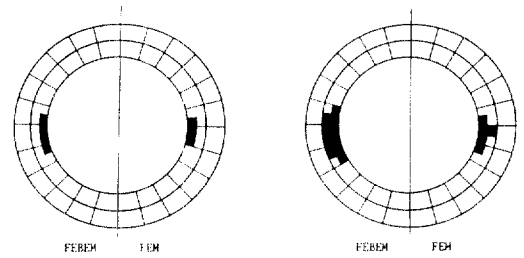
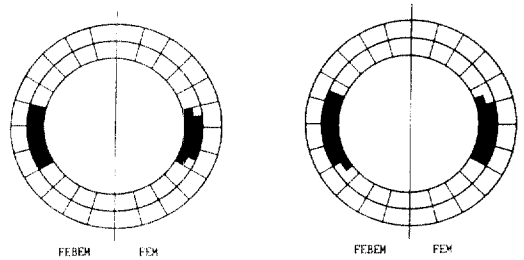


그림 7. 조합해석 모형

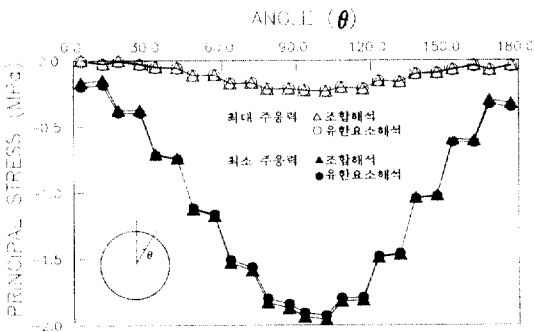


(a) 점착력이 350kPa인 경우 (b) 점착력이 340kPa인 경우



(c) 점착력이 330kPa인 경우 (d) 점착력이 320kPa인 경우

그림 9. 점착력의 변화에 따른 소성영역의 비교



(a) 원공 중심에서 10.47m 떨어진 적분점에서의 주응력

고 있음을 알 수 있다. 이 차이는 유한요소 해석에서 경계조건을 그림 5에서와 같이 구속하였으므로 실제 경계조건보다 강성이 크게 모형화되었기 때문

인 것으로 판단된다. 따라서 조합해석이 경계조건을 더 합리적으로 반영하고 있다고 사료된다.

5. 결론

본 논문에서는 물체력이 작용하는 영역에 대한 경계요소해석에서 영역적분 형태로 남아있는 물체력의 항을 Galerkin 텐서와 발산정리를 이용한 방법과 극좌표를 이용한 방법을 각각 적용하여 경계적분화하여 물체력에 대한 항을 경계적분화하므로 물체력에 의한 영향을 효과적으로 해석하였다. 두

방법은 모두 같은 결과를 주었으며, 유한 요소해석 결과와도 잘 일치하므로 물체력의 해석 방법으로 타당한 것으로 사료된다.

초기응력의 영향을 해석하기 위하여 영역적분의 형태로 표시되는 초기응력의 항을 극좌표를 이용한 직접적분 방법을 응용하여 경계적분형태로 처리하였으며, 이 방법에 의하면 초기응력에 대한 영향을 효과적으로 해석할 수 있음을 밝혔다.

상기의 방법을 적용하여 반무한영역 문제를 경계 요소-유한요소 해석에 적용한 결과, 유한요소해석 결과와 비교하여 타당한 결과임을 알수 있었다. 결과적으로 물체력이 지배되는 반무한영역 문제에 조합해석 방법을 사용하면 하중조건과 경계조건을 합리적으로 고려할 수 있으며, 효율적인 비선형해석을 할 수 있는 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 연세대학교 학술연구비의 지원으로 진행된 것으로 재단에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., *Boundary element techniques*, Springer-Verlag, 1984.
2. Owen, D.R.J and Hinton, E., *The Finite Elements*

in Plasticity: Theory and Practice, Pineridge Press, 1980.

3. 황학주, 김문경, 임윤목, "유한요소와 경계요소의 조합에 의한 반무한 영역 문제의 비선형해석", *한국전산구조공학회지*, 제2권, 제1호, 1988, pp.55-64.
4. Brebbia, C.A., *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press, London, 1980.
5. Danson, D.J., "A Boundary element formulation of problems in linear isotropic elasticity with body forces", *Boundary Element Methods, Proceeding of the Third Int. Seminar, Irvine. California*, 1981, pp.102-122.
6. Venturini, W.S., *Lecture Notes in Engineering 4. Boundary Element Method in Geomechanics*, Springer-Verlag, 1983.
7. Love, A.Z.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dove, 1944.
8. Telles, J.C.F. and Brebbia, C.A., "Boundary element solution for half-plane problems", *Int. J. Solids Structures*. Vol.17, 1981, pp.1149-1158.
9. Stagg, K.G. and Zienkiewicz, O.C., *Rock Mechanics in Engineering Practice*. John Wiley & Sons, 1968, pp.245-274.

(接受: 1990. 12. 3)