

## 균열선단 응력확대계수 결정을 위한 후처리기법

Post-Processing Technique on the Determination of Crack  
Tip Stress Intensity Factors

진 치 섭\* · 장 회 석\*\*  
Jin, Chi Sub · Jang, Heui Suk

## Abstract

The determination of the stress intensity factors is investigated by means of a surface integral defined around the crack tip of the structure. It has been shown in this work that this integral is derived from the standard path integral  $J$ . The use of the surface integral has also been extended to the case where body forces act.

Computer program obtaining the stress intensity factors  $K_I$  and  $K_{II}$  is developed, which prepares input variables from the result of the conventional finite element analysis.

This paper provides a parabolic smooth curve function. By the use of the function and conventional element meshes in which the aspect ratio (element length/crack length) is about 25 percent, relatively correct  $K_I$  and  $K_{II}$  values can be obtained for the exterior radius ranging from 1/3 to 1 of the crack length.

## 요 지

본 논문에서는 구조물의 응력확대계수를 균열선단주위에서 정의되는 표면적분법에 의하여 구하는 방법을 연구하였다. 통상의  $J$ 적분법을 변형시켜 표면적분법을 유도하였으며 물체력을 고려하는 경우도 포함시켰다.

유한요소 해석결과를 입력변수로 받아들여 표면적분법으로 응력확대계수  $K_I$ 과  $K_{II}$ 를 구하는 프로그램을 작성하였다.

형상비(요소길이/균열길이)가 25%정도인 요소망에서 본 논문에서 제안한 포물선형태의 평활곡선함수를 사용한 결과, 외측적분반경이 균열길이의 1/3~1 되는 구간에서 비교적 정확한 응력확대계수가 얻어지는 것을 알수 있었다.

\*정회원 · 부산대학교 공과대학 토목공학과 교수

\*\*정회원 · 부산공업대학 토목공학과 부교수

## 1. 서 론

1928년 Richart et al<sup>(1)</sup>은 콘크리트의 응력과 변형률이 인장파괴를 일으킬 만큼 커지기 전에 미세 균열이 생긴다는 것을 최초로 발표하였다. 또 Neville<sup>(2)</sup>는 콘크리트에 Griffith이론을 처음 적용하였는데, 그는 콘크리트의 강도가 한계응력기준보다는 한계변형률에 지배될 지 모르기 때문에 이 이론을 콘크리트에 대하여는 근사적으로만 사용할 수 있다고 주장하였다. 또 콘크리트에 파괴역학개념을 적용한 최초의 실험논문은 1961년 Kaplan<sup>(3)</sup>에 의한 것이었는데, 그는 균열길이를 변화시킨 콘크리트보들의 휨실험에서 선형탄성파괴역학(LEFM)이 콘크리트에 대한 파괴기준으로 적합하다고 결론을 내렸다. 이에 반하여 Kesler et al<sup>(4)</sup>은 중앙에 균열이 있는 모르타르판과 콘크리트판을 실험하여, 파괴인성치(fracture toughness : K<sub>IC</sub>)가 균열길이에 따라 변화하기 때문에 LEFM은 콘크리트의 파괴기준이 될 수 없다고 보고하였다. 그러나 Saouma et al<sup>(5)</sup>은 균열선단 부근을 1/4점 특이 삼각형 유한요소로 분할하고 데이터를 새로 분석하여 재계산하였다. 그리하여 그들은 Kesler et al의 결론이 옳지않고 공학적 정확도의 범위에서 콘크리트에 LEFM을 충분히 적용할 수 있다고 주장하였다. 실제로 콘크리트 재료의 특성을 볼 때 거시적인 해석만이 아직도 유용하지만, 콘크리트를 완전탄성으로 가정하거나 하중-변위 선도의 선형 부분만을 고려한다면 비선형효과는 매우 작아서 무시할 수 있으며, 또한 공시체의 크기가 충분히 커서 평면변형률 상태를 유지한다고 하면 콘크리트의 파괴특성은 LEFM으로 결정할 수가 있다고 생각된다.

LEFM에 의하여 균열전파를 추적하는 데에는 우선 응력확대계수(stress intensity factor)의 결정이 선행되어야 한다. 이 값에 의하여 균열선단의 변위와 응력이 계산되고 또 재료의 파괴인성치와 비교하여 균열전파 여부를 판단하게 된다. 이 응력확대계수는 부재의 형상이 간단한 경우에는 응력함수를 이용한 일반공식<sup>(6, 7)</sup>으로 구할 수 있으나, 형상이 복잡할 경우에는 유한요소법과 같은 수치적 기법을 사용하여야 한다. 이리하여 지난 20년 동안 유한요소법이 실제로 파괴문제의 해를 구하는 표준적 방법으로 그 기반을 닦아왔다.

유한요소법에 의하여 응력확대계수를 구하는 방법에는, 첫째, 균열선단주위의 변위장 및 응력장에 대한 해석해와 유한요소해석으로 얻어진 값과의 비교로부터 균열선단의 응력확대계수를 구하는 방법<sup>(8, 9)</sup>이 있는데 이는 균열선단주위에서 응력의 특이성을 나타내기 위하여 세밀한 요소분할과 특이요소(singular element)의 사용을 필요로 한다.

둘째, 변형에너지해방률법과 가상균열확장법<sup>(11, 12)</sup>이 있는데 이는 서로 다른 균열길이에 대하여 유한요소해석을 두번 수행해야 된다. 마지막으로, 경로독립인 선적분 값으로부터 응력확대계수를 구하는 방법이 있는데 Rice<sup>(13)</sup>의 J적분이 널리 사용되고 있다. 이 방법은 적분경로를 미리 지정해 주어야 하는 번거로움이 있다.

그런데 1984년 Babuska and Miller<sup>(14, 15)</sup>는 일반 유한요소해석 결과로부터 두가지 응력확대계수 K<sub>I</sub>, K<sub>II</sub>를 직접 구할 수 있는 표면적분법(surface integral technique)을 제안하였다. 그러나 이들은 균열선단부근의 변위장을 점근전개식(asymptotic expansions)의 형태로 유도하고 있어 난해하고, 또한 본론에서 지적하겠지만 몇 가지 오류를 범하고 있다. 한편 Droz<sup>(6)</sup>도 표면적분법을 이용하여 응력확대계수를 구하고 있으나 해석해와 차이가 매우 큰것을 알 수 있었다.

이러한 관점에서, 본 연구는 통상의 J적분법을 변형시켜서 표면적분법을 유도하고 또한 특별한 평활곡선함수(smooth curve function)를 제안하여, 일반 유한요소해석에서 얻어진 변위를 이용하는 후 처리기법에 의하여 응력확대계수를 간편하게 구하는 기법을 제시하는 데에 그 목적을 두고 있다.

위에서는 콘크리트 재료에 관해서만 기술했으나, 본 연구에서 제시하는 표면적분법은 일반 항복재료에도 물론 적용가능하다.

## 2. 표면적분법

### 2.1 표면적분법과 응력확대계수

표면적분법은 균열선단의 에너지는 물론 균열선단 주위에서의 변위장과 응력장에 기초를 두고 있어서, 유한요소해석에서 특이요소를 사용할 필요가 없고 요소망의 지나친 세분도 요구하지 않으면서 응력확대계수 K<sub>I</sub>과 K<sub>II</sub>를 직접 구할 수 있는 편리한 방법이다. 이 기법은 J적분의 정식화와 매우 유사

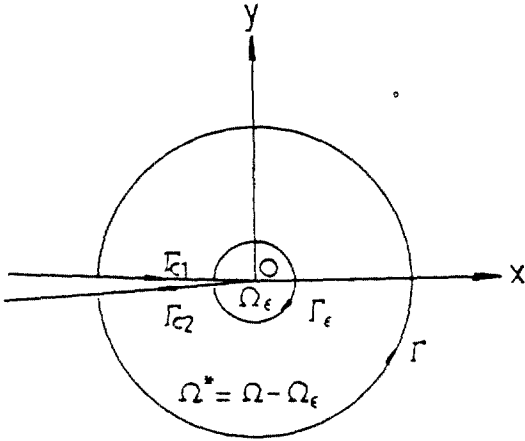


그림 1. 표면적분의 경로 및 영역

하며 따라서 어떤 물체력도 작용하지 않고 또한 균열면에는 외력이 작용하지 않는 것으로 가정한다.

그림 1과 같은 적분경로 및 영역을 생각할 때 폐곡선  $\Gamma^*$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\Gamma^* = \Gamma + \Gamma_{c1} + \Gamma_c + \Gamma_{c2} \quad (2.1)$$

그리고 경로  $\Gamma_c$ 에 대한 J적분은 방향을 고려할 때 다음과 같다.

$$J = - \int_{\Gamma_c} (W dy - t_i U_{i,1} ds) \quad (2.2)$$

식(2.2)에서  $W$ 는 변형률에너지밀도(strain energy density),  $t_i$ 는 작용력벡터,  $U_{i,1}$ 는 변위  $U$ 의  $x$ 에 관한 미분량,  $ds$ 는 곡선  $\Gamma$ 에서 미소선요소를 각각 의미한다.

여기서  $\Gamma_c$ 과  $\Omega_c$ 내에서는 값이 1이고,  $\Gamma$ 와  $\Omega$ 외측에서는 값이 0인 평활곡선함수  $\phi$ 를 고려한다. 그림 1에서, 경로  $\Gamma_c = \Gamma_{c1} + \Gamma_{c2}$ 에서  $dy=0$ 이고  $t_x=0$ 이다. 따라서

$$\int_{\Gamma_{c1} + \Gamma_{c2}} (W dy - t_i U_{i,1} ds) \phi = 0 \quad (2.3)$$

그리고

$$\int_{\Gamma} (W dy - t_i U_{i,1} ds) \phi = 0 \quad (2.4)$$

이다. 그러므로 폐곡선  $\Gamma^*$ 에 관한 적분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J = - \int_{\Gamma^*} (W n_i - t_i U_{i,1}) \phi ds \quad (2.5)$$

여기서  $n_i = dy/ds$ 로서 외향단위법선 벡터이다. 식(2.5)를 Green정리를 이용하여 영역  $\Omega^*$ 에 대한 면적적분으로 바꾸고  $W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$ 를 고려하면 다음과 같다.

$$J = - \frac{1}{2} \int_{\Omega^*} \{ (\sigma_{22} U_{i,2} - \sigma_{11} U_{i,1})$$

$$\phi_{,1} - 2(\sigma_{22} U_{i,1}) \phi_{,2} \} d\Omega \quad (2.6)$$

한편 균열선단주위에서 유한요소해로부터 얻어지는 변위  $V$ 의 값은, 해석해에 대한 근사값으로 생각할 수 있으므로 다음과 같이 표현할 수가 있다.

$$V \approx U = K_I U^I + K_{II} U^{II} \quad (2.7)$$

이 식에서  $U^I, U^{II}$ 는 다음과 같다<sup>9)</sup>.

$$U^I = \frac{1}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} (2\kappa-1)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \\ (2\kappa+1)\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$U^{II} = \frac{1}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} (2\kappa+3)\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} \\ (2\kappa-3)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \end{pmatrix}$$

여기서  $\mu$ 는 전단탄성계수이고  $\kappa$ 는 평면응력 상태에서는  $(3-\nu)/(1+\nu)$ 이고 평면변형률 상태에서는  $(3-4\nu)$ 이다. 응력장에 대하여도 같은 방법으로 표현할 수 있다. 즉,

$$\sigma(V) = \sigma(U) = K_I \sigma(U^I) + K_{II} \sigma(U^{II}) \quad (2.9)$$

식(2.7)과 식(2.9)를 식(2.6)에 대입한 후 모드 I과 모드 II에 대하여 분리하여 표현하면 다음과 같다.

$$J = - \frac{1}{2} K_I \Phi(V, U^I, \phi) - \frac{1}{2} K_{II} \Phi(V, U^{II}, \phi) \quad (2.10)$$

이 식에서  $\Phi$ 함수는 다음과 같다.

$$\Phi(V, U^{\alpha}, \phi) = \int_{\Omega^*} \{ \sigma_{22}(U^{\alpha}) V_{i,2} - \sigma_{11}(V) U_{i,1}^{\alpha} \} \phi_{,1} - \{ \sigma_{22}(U^{\alpha}) V_{i,1} + \sigma_{22}(V) U_{i,1}^{\alpha} \} \phi_{,2} \} d\Omega \quad (2.11)$$

여기서  $\alpha=I, II$ 이다.

또  $\sigma_{ij}(U^{\alpha}) = \sigma_{ij}^{\alpha}$ 로 표시하고, 식(2.7)과 식(2.9)를 식(2.11)에 대입하면  $\alpha=I, II$ 에 대하여 다음식이 얻어진다.

$$\Phi^I = \Phi(V, U^I, \phi) = K_I \Phi_1^I + K_{II} \Phi_2^I$$

$$\Phi^{II} = \Phi(V, U^{II}, \phi) = K_I \Phi_1^{II} + K_{II} \Phi_2^{II} \quad (2.12)$$

여기서,  $\Phi_1^I, \Phi_2^I, \Phi_1^{II}, \Phi_2^{II}$ 는 다음과 같다.

$$\Phi_1^I = \int_{\Omega^*} \{ (\sigma_{22}^I U_{i,2}^I - \sigma_{11}^I U_{i,1}^I) \phi_{,1} - 2(\sigma_{21}^I U_{i,1}^I) \phi_{,2} \} d\Omega$$

$$\Phi_2^I = \int_{\Omega^*} \{ (\sigma_{22}^I U_{i,2}^I - \sigma_{11}^I U_{i,1}^I) \phi_{,1} - (\sigma_{21}^I U_{i,1}^I + \sigma_{21}^I U_{i,1}^I) \phi_{,2} \} d\Omega$$

$$\Phi_1^{II} = \int_{\Omega^*} \{ (\sigma_{22}^{II} U_{i,2}^{II} - \sigma_{11}^{II} U_{i,1}^{II}) \phi_{,1} - (\sigma_{21}^{II} U_{i,1}^{II} + \sigma_{21}^I U_{i,1}^{II}) \phi_{,2} \} d\Omega$$

$$\Phi_2^{II} = \int_{\Omega^*} \{ (\sigma_{22}^{II} U_{i,2}^{II} - \sigma_{11}^{II} U_{i,1}^{II}) \phi_{,1}$$

$$-2(\sigma_{21} U_{i,1}) \phi_{,2} d\Omega \quad (2.13)$$

한편 혼합모드의 경우에 J적분값은  $K_I, K_{II}$ 와 다음의 관계에 있다.

$$J = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} \quad (2.14)$$

이 식에서  $E^*$ 는 평면응력상태에서는  $E$ 이고 평면변형률 상태에서는  $E/(1-\nu^2)$ 이다. 여기서 식(2.12)에서  $\phi^I, \phi^{II}$ 가 각각 모드 I, II의 성분만을 갖도록 하고, 또한 식(2.10)과 식(2.14)를 등치시키면 다음식이 성립한다.

$$\phi_1^I = -\frac{2}{E^*}, \phi_2^I = 0, \phi_1^{II} = 0, \phi_2^{II} = -\frac{2}{E^*} \quad (2.15)$$

그 결과 식(2.12)로부터 다음과 같은  $K_\alpha$ 를 구하는 식을 얻을 수 있다.

$$K_\alpha = -\frac{E^*}{2} \phi_\alpha = -\frac{E^*}{2} \phi(V, U^\alpha, \phi) \quad (2.16)$$

$K_\alpha$ 에 대하여 Babuska and Miller<sup>(15)</sup>가 제안한 식과 비교하기 위하여, 평면변형률 문제로 가정하고 식(2.16)에 각항들을 대입해 보면 다음과 같다.

$$K_\alpha = -\frac{\mu}{1-\nu} \int_{\mathcal{Q}} [\{\sigma_{22}(U^\alpha) V_{i,2} - \sigma_{11}(V) U_{i,1}^\alpha\} \phi_{,1} - \{\sigma_{21}(U^\alpha) V_{i,1} + \sigma_{12}(V) U_{i,2}^\alpha\} \phi_{,2}] d\Omega \quad (2.17)$$

식(2.17)을 살펴보면 문헌15의 식(17)은  $\pi$ 가 없어 야 하고, 식(17)의 위에 있는 삼각함수가 포함된 식도 이론해와 다르므로 본 연구의 식(2.8)의 형태를 가져야 한다고 본다. 또 식(17)은 완전히 정리된 형태가 아니고 적분호속의 2개 항을 하나로 줄여서 써야 마땅하다고 본다. 이는 문헌15의 저자들의 착오라 생각된다.

## 2.2 평활곡선함수

본 연구에서는 포물선 형태의 평활곡선함수를 제안하였으며 이를 Babuska and Miller<sup>(15)</sup>와 Droz<sup>(16)</sup>가 각각 제안한 함수를 사용했을 때의 결과와 비교하였다. 본 연구에서는 사용된 평활함수는 각각 다음과 같다.

i) 본 연구에서 제안한 함수

$$\phi(r) = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ \frac{2R_1}{(R_e - R_1)^2} r^2 + \frac{2R_2}{(R_e - R_2)^2} r + \frac{R_e(R_e - 2R_1)}{(R_e - R_1)^2} \end{cases}$$

$$r \leq R_1, \quad R_1 < r \leq R_e \quad (2.18)$$

ii) Babuska and Miller의 함수

$$\phi(r) = \begin{cases} 1 & 0 \leq r < \frac{1}{2} R_e \\ 1 - 4(r - \frac{R_e}{2})^2 / R_e^2 & \frac{1}{2} R_e \leq r \leq R_e \end{cases} \quad (2.19)$$

iii) Droz의 함수

$$\phi(r) = \begin{cases} 1 - r^2 / R_e^2 & r \leq R_e \\ 0 & r > R_e \end{cases} \quad (2.20)$$

여기서  $R_1$ 는 내측 적분반경이고  $R_e$ 는 외측 적분반경이다.

## 2.3 물체력을 고려할 때의 표면적분법

그림 1에서 물체력  $f_i$ 가 작용하는 경우, 경로  $\Gamma$ 로 둘러싸인 영역  $\mathcal{Q}$ 에 대한 J적분을  $J'$ 라 하면 다음식이 성립한다.

$$J' = \int_{\Gamma} (W n_1 - t_i U_{i,1}) ds - \int_{\mathcal{Q}} f_i U_{i,1} d\Omega \quad (2.21)$$

그리고  $\Gamma$  및  $\mathcal{Q}$ 에 대한  $J'$ 적분은 다음과 같다.

$$J' = - \int_{\Gamma} (W n_1 - t_i U_{i,1}) ds + \int_{\mathcal{Q}} f_i U_{i,1} d\Omega \quad (2.22)$$

여기서 평활곡선함수를 사용하면, 폐곡선  $\mathcal{Q}^*$ 에 대한 적분은 다음과 같다.

$$J' = - \int_{\mathcal{Q}^*} f_i U_{i,1} \phi d\Omega - \int_{\mathcal{Q}^*} \{ (W - \sigma_{11} U_{i,1}) \phi_{,1} - (\sigma_{12} U_{i,1}) \phi_{,2} \} d\Omega + \int_{\mathcal{Q}^*} f_i U_{i,1} \phi d\Omega \quad (2.23)$$

한편 유한요소해석에 얻어진 변위  $V$ 는 외력 이외에 물체력도 함께 고려하여 얻어진 해석해  $U$ 의 근사치로 생각하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V \simeq U = \underline{U}_g + K_I \underline{U}^I + K_{II} \underline{U}^{II} \\ \underline{g}(\underline{V}) \simeq \underline{g}(\underline{U}) = \underline{g}_g + K_I \underline{g}^I + K_{II} \underline{g}^{II} \quad (2.24)$$

여기서  $\underline{U}_g, \underline{g}_g$ 는 각각 물체력만에 의한 변위와 응력이다. 식(2.24)를 식(2.23)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$J' = K_I \{ -\frac{1}{2} \phi(\underline{V}, \underline{U}^I, \phi) - \frac{1}{2} \phi(\underline{f}, \underline{U}^I, \phi) \} \\ + K_{II} \{ -\frac{1}{2} \phi(\underline{V}, \underline{U}^{II}, \phi) - \frac{1}{2} \phi(\underline{f}, \underline{U}^{II}, \phi) \} \quad (2.25)$$

여기서 함수  $\phi$ 는 다음과 같다.

$$\phi(\underline{f}, \underline{U}^\alpha, \phi) = \int_{\mathcal{Q}^*} f_i U_{i,1}^\alpha \phi d\Omega; \alpha = I, II \quad (2.26)$$

위의 식(2.25)가 모드 I, II에 관한 항들을 분리하여 나타내고 있는 점을 고려하면, 식 (2.14)와의 비교에서 다음과 같이 물체력을 포함할 때의 응력확대계수를 구할 수가 있다.

$$K_{\phi} = -\frac{E^*}{2} \phi(\bar{V}, \bar{U}^{\alpha}, \phi) - \frac{E^*}{2} \int_{\Omega} f_i U_{i,1}^{\alpha} \phi \, d\Omega, \quad \alpha = I, II \quad (2.27)$$

### 3. 수치에 및 고찰

#### 3.1 흐름도

식(2.16)과 식(2.27)의 각 함수에 대한 미분과 수치적분을 포함한 컴퓨터 프로그램 과정은 지면관계로 생략하고 계산의 흐름도만 수록하였다. 흐름도에

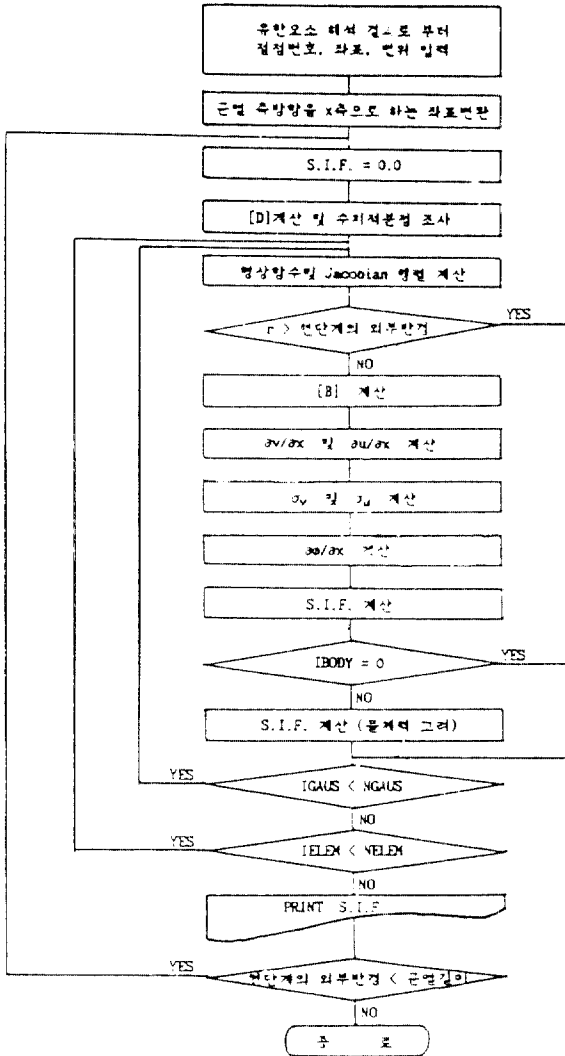


그림 2 흐름도

서 보는 바와 같이 일반 유한요소해석 결과를 입력 데이터로 받아들여 응력확대계수를 구하고 있다.

#### 3.2 집중하중을 받는 단순보

본 논문에서는 지면관계로 표 1과 같이 집중하중을 받는 단순보에 대하여만 수록하였는데, 순수모드와 혼합모드의 경우를 모두 조사하였다. 수치해석에 사용된 단순보는 길이가 36in, 두께가 2in이고 중앙에 3.17in의 균열을 갖고 있다.

그리고 표 1에서 형상비는 균열선단부근의 요소 길이를 균열길이로 나눈 값을 의미하며, 수치해석 결과는 다음과 같다.

우선 그림 3에서 그림 23까지에 공통적으로 사용되는 그림의 표제들을 설명하면, 첫문자는 모델명을 두번째 문자는 사용한 평활곡선함수로서 P는 본 연구에서 제안한 함수이고 B는 Babuska and Miller, D는 Droz가 제안한 함수를 의미한다. 또 세번째 숫자 중 2는 2×2적분, 3은 3×3적분 등을 의미하고, 네번째 문자는 필요에 따라 사용하였는데 물체력을 고려할 때는 B를, 내측적분반경을 변화시켜 조사할 때는 I를 택하였다.

그림 3은 모드 I에 대하여, 본 연구에서 제시한 함수를 사용하여 2×2적분으로 요소망의 크기를 변화시켜 가면서 수렴정도를 비교한 것이다. 해석하는 문헌(17)에서 계산한 결과  $K_I = 0.6011 \text{kip/in}^{3/2}$ 이었다. 이 그림에서 횡축은 적분반경을, 종축은 응력확대계수를 나타낸다. 그림 4와 그림 5는 혼합모드에 대한 3×3적분의 결과이다. 수치해<sup>(10)</sup>는  $K_I = 0.1132 \text{kip/in}^{3/2}$ ,  $K_{II} = -0.089 \text{kip/in}^{3/2}$ 이었다. 이 그림들을 살펴볼 때 사용된 요소망이 가늘 수록 수렴이 빠른 것을 알 수 있다.

그림 6~그림 8은 본 연구에서 제안한 평활곡선함수의 효율성을 알아보기 위하여 모델 C와 F에 대하여 3×3적분을 수행한 것이다. Babuska and Miller의 함수를 이용한 경우와 매우 잘 일치하였다. Droz의 함수에 대한 것은 생략하였는데, 그것은 본 연구에서 제안한 함수에서 내측적분반경  $R_i$ 를 0로 두면 같은 식이 되기 때문이다.

그림 9~그림 14는 그림 3~그림 8에서와 같이 본 연구에서 제안한 함수를 내측적분반경을 0으로 놓고 외측반경만을 변화시킨 경우이다. 구간  $1/3 \text{Re}_{\text{max}} \sim \text{Re}_{\text{max}}$ 에서  $K_I$ 과  $K_{II}$ 의 수렴 정도가 좋았다. 여기서  $\text{Re}_{\text{max}}$ 는 균열길이에 해당된다. 이 그림들로 부

표 1. 수치에-집중하중을 받는 단순보

모델명	요소수	절점수	형상비	모델명	요소수	절점수	형상비
A	48	179	1.00	D	48	179	1.00
B	84	297	0.50	E	84	297	0.50
C	338	1101	0.24	F	338	1101	0.24

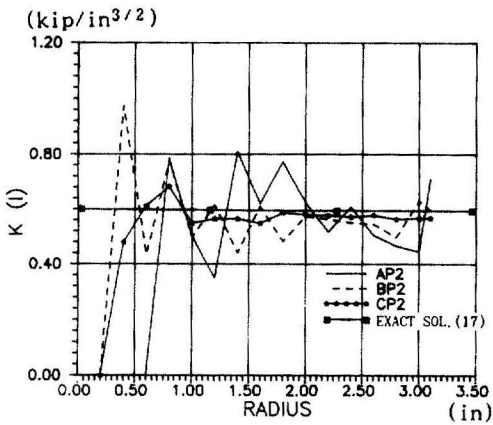


그림 3. AP2, BP2, CP2

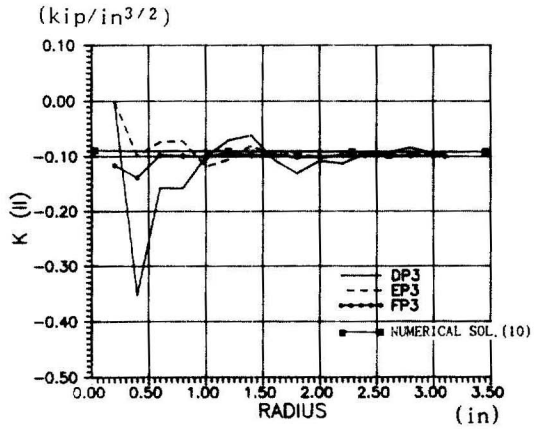


그림 5. DP3, EP3, FP3

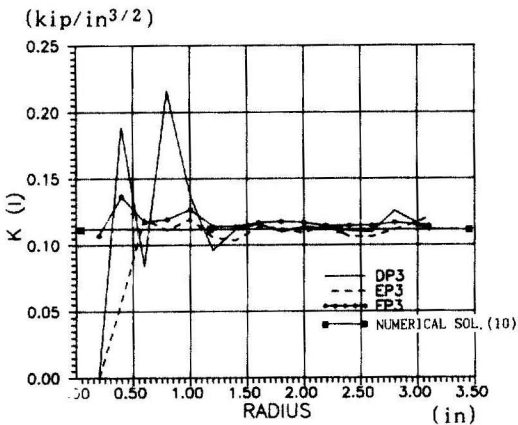


그림 4. DP3, EP3, FP3

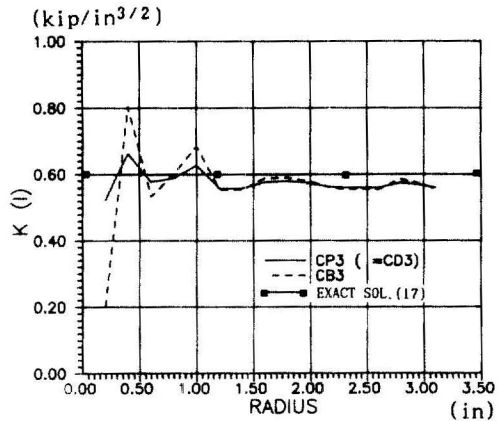


그림 6. CP3, CD3, DB3

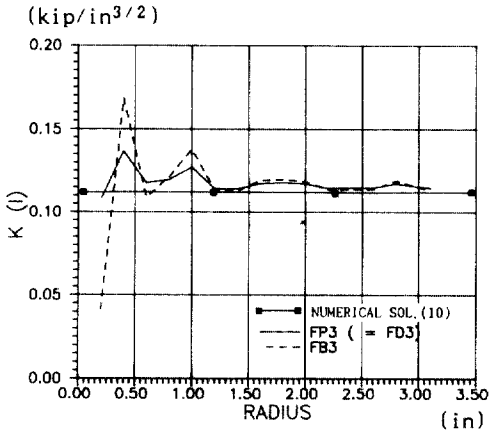


그림 7. FP3, FD3, FB3

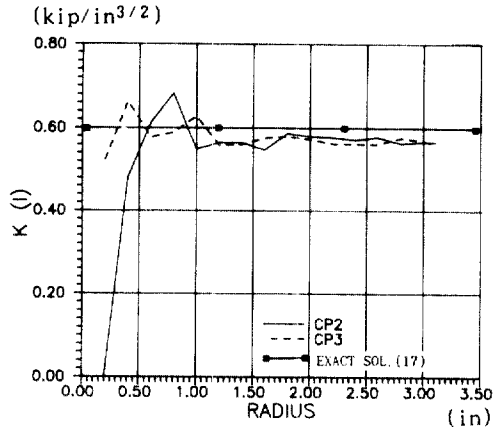


그림 10. CP2, CP3

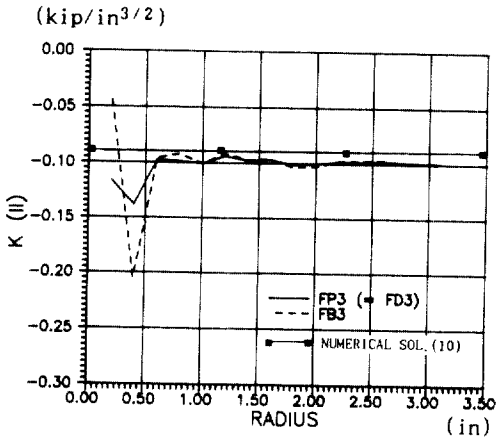


그림 8. FP3, FD3, FB3

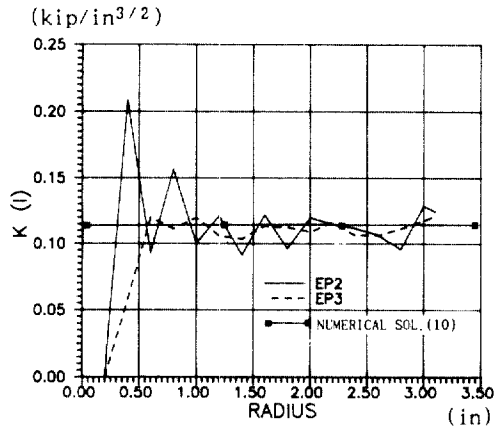


그림 11. EP2, EP3

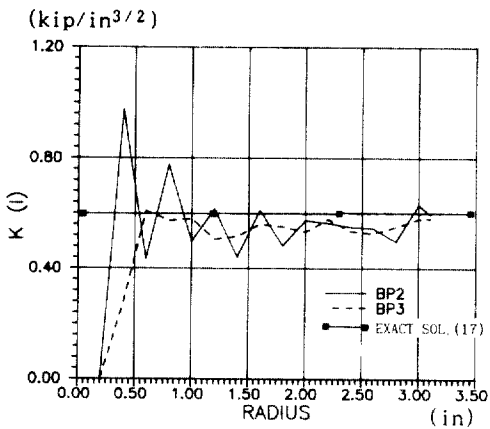


그림 9. BP2, BP3

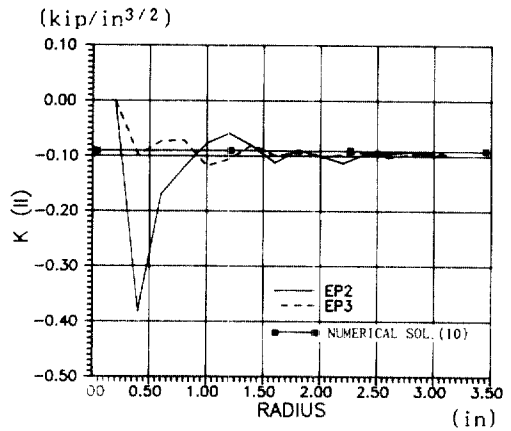


그림 12. EP2, EP3

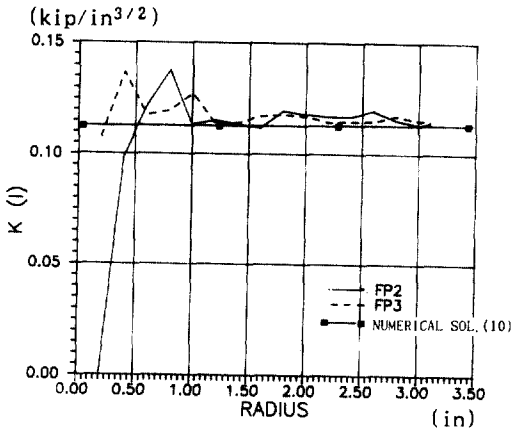


그림 13. FP2, FP3

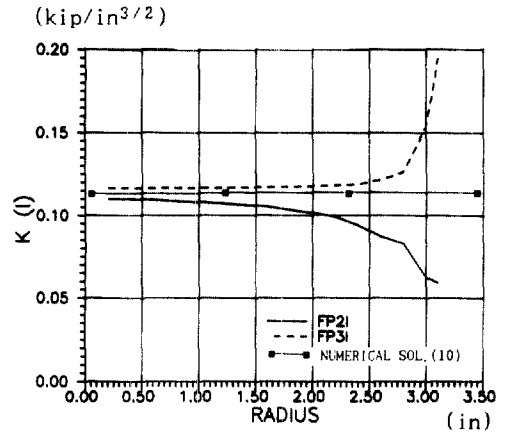


그림 16. FP2I, FP3I

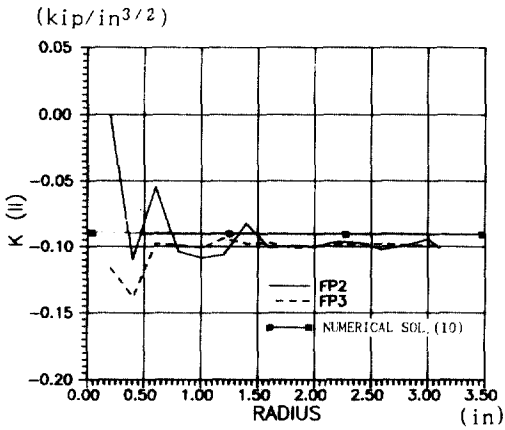


그림 14. FP2, FP3

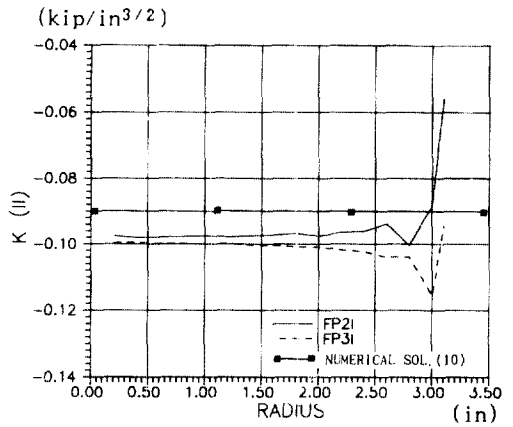


그림 17. FP2I, FP3I

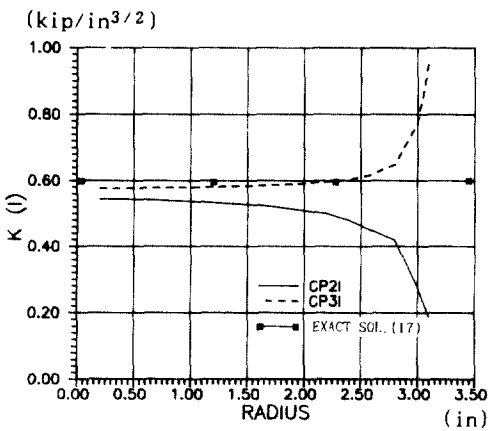


그림 15. CP2I, CP3I

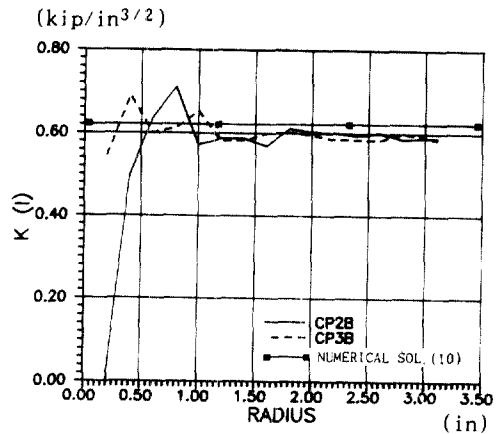


그림 18. CP2B, CP3B



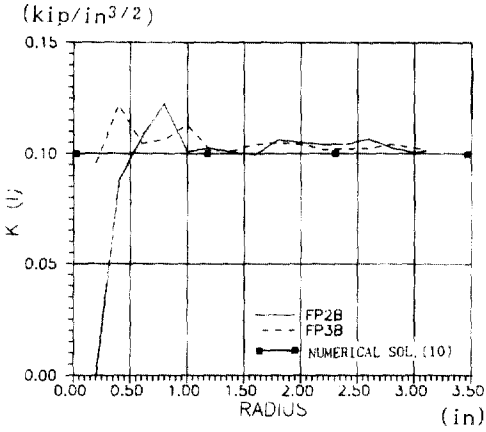


그림 19. FP2B, FP3B

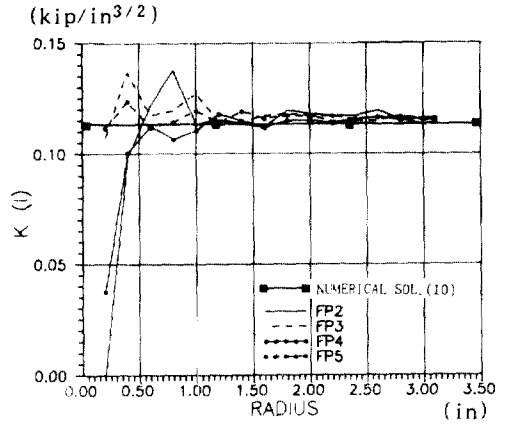


그림 22. FP2, FP3, FP4, FP5

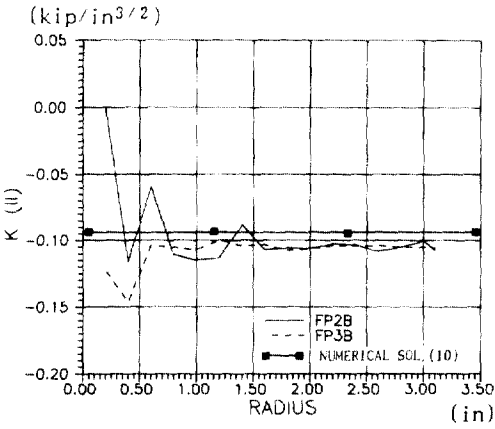


그림 20. FP2B, FP3B

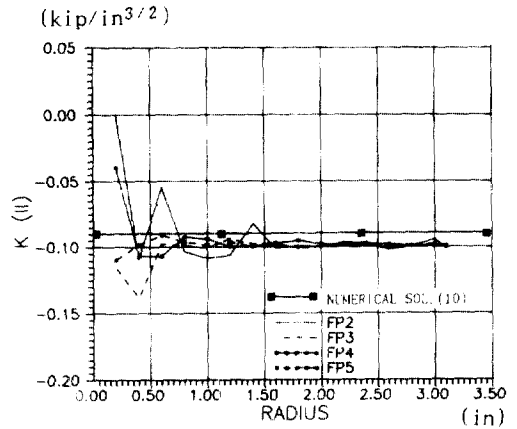


그림 23. FP2, FP3, FP4, FP5

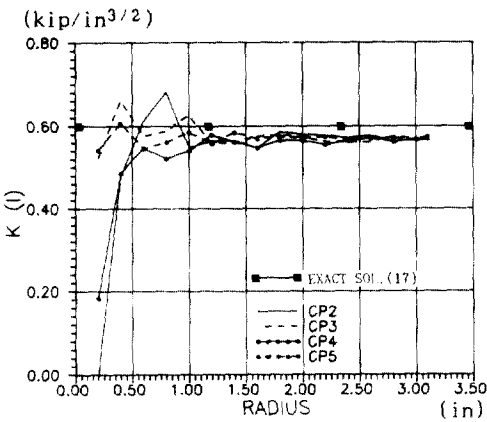


그림 21. CP2, CP3, CP4, CP5

터 요소망이 세밀할수록 또한  $2 \times 2$  적분 보다도  $3 \times 3$  적분의 결과가 우수함을 알 수 있었다.

그림 15~그림 17은 함수에서 외측반경을 균열길이와 같게 되도록 하고, 내측반경을 0에서 점차 증가시켜 계산한 것이다. 처음에는 거의 일정한 값을 유지하다가 내측반경이 외측반경에 근접 할때 발산해버리는 것을 알 수 있었다. 이것은 적분영역이 좁아 적분점 수가 표면적분의 특성을 나타낼 만큼 많지 않기 때문인 것으로 생각된다.

또 물체력( $0.839 \times 10^{-4} \text{kip/in}^3$ )을 고려한 경우를 조사하였다. 본 예제에 대한 수치해는 모드 I에서  $K_I = 0.6181 \text{kip/in}^{3/2}$  혼합모드에서는  $K_{II} = 0.1006 \text{kip/in}^{3/2}$ ,  $K_{III} = -0.0940 \text{kip/in}^{3/2}$ 이었다. 그림 18~그림 20에 그

결과를 나타내었는데 수렴정도가 더 양호하였다.

그림 21~그림 23은 동일한 모델에서 2×2, 3×3, 4×4, 5×5적분을 수행한 결과이다. 여기서 4×4적분 이상의 것은 3×3적분에 비하여 큰 차이가 없음을 알 수 있었다.

본 논문에서는 지면관계로 게재하지 않으나 Droz<sup>(16)</sup>의 결과와 비교하기 위하여 한 방향에 노치가 있는 인장판의 경우도 해석하였다. 비교를 해본즉, Droz의 결과는 해석해와 수치해에 대하여 오차가 매우커서 본 연구의 결과가 더 우수함을 알 수 있었다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 LEFM의 응력확대계수를 쉽게 결정하기 위하여 먼저 표면적분을 유도하고 이를 수치연산 할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 작성하였다. 본 프로그램에서는 균열선단에서 특이요소와 같은 특수요소를 사용하지 않는 통상의 유한요소(8절점 등매계수변수 요소)해석 결과를 입력 변수로 받아들여 표면적분을 행하고 있다. 또한 포물선 형태의 평활곡선함수를 사용하였으며 물체력을 포함하는 문제도 해석할 수 있도록 하였다.

본 연구에서 제안한 함수를 이용한 결과, 형상비(요소길이/균열길이)가 약 25%정도인 요소망에서  $1/3Re_{max} \sim Re_{max}$  구간 사이에서 외측적분반경을 취할 때, 해석해나 수치해에 매우 가까운 응력확대계수를 추출할 수 있었다.

외측적분반경을 일정하게 하고 내측적분반경을 변화시킬 때 내측반경이 외측반경에 접근하면 적분영역이 좁아져서 발산하게 되는 것을 알 수 있었다.

수치적분에서 2×2적분보다는 3×3적분이 우수한 결과를 나타내나, 그 이상의 적분은 별로 효과가 없음을 알 수 있었다.

#### 감사의 말

본 연구는 1989년도 한국과학재단 기초연구비지원에 의하여 수행된 연구의 일부이며, 본 연구를 위하여 지원해 주신 재단측에 심심한 사의를 표하는 바이다.

#### 참 고 문 헌

1. Mindess, S., "The Cracking and Fracture of Concrete : An Annotated Bibliography 1928-

1981", *Fracture Mechanics of Concrete* (Wittmann F.H. Ed.) Elsevier, 1983, pp.539~661.

2. Neville, A.M., "Some Aspects of the Strength of Concrete", *Civil Engineering part I: 54, 1959, pp.1153~1156.*

3. Kaplan, M.F., "Crack Propagation and the Fracture of Concrete," *Journal of the American Concrete Institute*, 58, 1961, pp.591~610.

4. Kesier, C.E., Naus, D.J. and Lott, J.L., "Fracture mechanics-Its Applicability to Concrete, in Mechanical Behaviour of Materials", *The Society of Materials Science*, Vol. . Japan, 1972, pp.113~124.

5. Saouma, V.E., Ingraffea, A.R. and Catalano, D. M., "Fracture Toughness of Concrete :  $K_{Ic}$  Revisited", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 108, 1982, pp.1152~1166.

6. 剛村弘之, 線形破壊力學 入門, 培風館, 1976, pp.1-14, 178~222.

7. 白鳥正樹, 三好俊郎, 松下久雄, 數値破壊力學, 實教出版社, 1980, pp.1~7, 48~66.

8. Barsour, R.S., "On the use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.10, 1976, pp.25~37.

9. Owen, D.R.J. and Fawkes, A.J., "Engineering Fracture Mechanics", Pineridge Press Ltd. 1983, pp.1~305.

10. 진치섭, 장희석, 최현태, 엄장섭, "콘크리트구조물의 혼합모드 균열전파모델(제 1보)", *부산대학교 공과대학 연구보고 제38집*, 1989, pp.83~91.

11. Parks, D.M., "A Stiffness Derivative Finite Element Technique for Determination of Crack Tip Stress Intensity Factors", *International Journal of Fracture*, Vol. 10, No.4, 1974, pp.487~502.

12. Hellen, T.K., "On the Method of Virtual Crack Extensions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, 1975, pp.187~207.

13. Rice, J.R., "A path Independent Integral and

- the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks”, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 1968, pp.379~386.
14. Babuska, I. and Miller, A., “The Post-Processing Approach in the Finite Element Method –Part 1 : Calculation of Displacements, Stresses and Other Higher Derivatives of the Displacements”, *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, Vol. 20, 1984, pp.1085~1109.
  15. Babuska, I. and Miller, A., “The Post-Processing Approach in the Finite Element Method –Part 2 : The Calculation of Stress Intensity Factors”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1984, pp.1111~1129.
  16. Droz, p. : *Modele numerique du comportement non –lineaire douvrages massifs en beton non arme*, pour l’obtention du grade de docteur es sciences techniques, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 1987, pp.1~148.
  17. Ewalds, H.L. and Wanhill, R.J.H., “*Fracture Mechanics*”, Edward Arnold Ltd, 1984, pp.97
  18. Ingraffea, A.R. and Saouma, V.E.; “*Numerical modeling of discrete crack Propagation in reinforced and plain concrete*”, *Fracture Mechanics of Concrete* (Sih, G.C. and DiTommaso, A. Ed.), Martinus Nijhoff Publishers, 1985, pp.171~225.
  19. Carpinteri, A.; “Scale effects in fracture of plain and reinforced concrete structures”, ‘*Fracture mechanics of concrete*’ (Sih, G. C. and DiTommaso, A.Ed.), Martinus Nijhoff Publishers, 1985, pp.95~140.
  20. Hillerborg, A.; “Numerical methods to simulate softening and fracture of concrete”, ‘*Fracture mechnics of concrete*’ (Sih, G.C. and DiTommaso, A. Ed.), Martinus Nijhoff Publishers, 1985, pp. 141~170.
  21. Sih, G.C.; “Mechanics of Material damage in concrete”, *Fracture mechanics of concrete* (A.Carpinteri and A.R. Ingreffea, Ed.), Martinus Nijhoff Publishers, 1984 pp.1~28.
  22. Atluri, S.N. “Path independent integrals in finite elasticity and inelasticity, with body forces, inertia and arbitrary crack force conditions”, *Eng.Fract.Mech.*, Vol.16, No.3, 1982, pp.341~364.
  23. Kishimoto, K., Aoki, S. and Sakata, N.; “On the Path Independent Integral- $J$ ”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.13, 1980, pp.841~850.

(接受：1990. 9. 18)