

# 페루프 극점의 견실성 해석

이 정 문\* · 남 부 희\*\*

## Robustness Analysis of Closed-Loop Poles

Jung-Moon Lee Boo-Hee Nam

### ABSTRACT

This paper deals with the robustness of closed-loop poles of a linear time-invariant system with uncertain parameters. A new method is presented to calculate the perturbation of a pole-located region due to parameter uncertainties. A method to calculate allowable bounds on parameter uncertainties is also presented to retain closed-loop poles in a specified region. Based on Lyapunov equations and norm operations, they provide useful measures on the robustness of closed-loop poles. An example is given to illustrate proposed methods.

### 1. 序 論

제어 가능한 시스템에서 상태 피드백(state feedback)을 통하여 시스템의 극점(pole)을 원하는 임의의 위치에 놓을 수 있다는 것은 잘 알려진 사실이다<sup>1)</sup>. 따라서 피드백을 이용한 극배치(pole-assignment)는 안정성(stability)이나 그 밖의 동특성(dynamic characteristics)을 만족시키는 제어시스템의 설계에 매우 빈번히 사용되고 있는 방법이다.

그러나 실제의 시스템은 대부분 시변이거나 불확실한 매개변수를 포함하고 있으므로 수학적 모델은 실제의 시스템과 차이가 있다. 이러한 차이로 인하여 시스템 극점의 위치가 변동함으로써 시스템의 성능이 저하되는 결과를 가져올 수 있다. 그러므로 견실성(robust-

ness)의 문제는 불확실성(uncertainty)을 포함하는 제어시스템의 해석과 설계에 있어서 가장 중요하게 다루어져야 할 사항이다<sup>2-6)</sup>.

본 논문에서는 시스템의 불확실성과 이로부터 비롯되는 극점의 위치변동 사이의 관계를 고찰하였다. 먼저 매개변수 행렬의 불확실성에 의하여 극배치 영역의 경계가 변동되는 정도를 해석하는 새로운 방법을 제시하였다. 그리고 여유를 갖는 임의의 영역내에 시스템의 극점이 머무르도록 보장되는 불확실성의 한계를 구하는 방법을 제시하였다. 이들은 Juang<sup>7,8)</sup>의 견실성 해석 방법을 일반화한 것으로서 Lyapunov 방정식과 norm 연산등을 통해서 극배치의 견실성에 관한 유용한 척도(measure)를 제공해 준다.

\* 강원대학교 제어계측공학과 조교수

\*\* 강원대학교 제어계측공학과 부교수

## 2. 극배치 영역의 표현

본 연구에서는 여러가지 형태의 극배치 영역을 복소 반평면들의 공통영역으로 근사화하였다. 이를 위해서 먼저 일반적인 복소 반평면을 다음과 같이 나타내기로 한다. 복소평면상의 직선  $L$ 은 그림 1에 보인 바와 같이 복소평면을 두 개의 반평면  $H(r, \theta)$ 와  $\bar{H}(r, \theta)$ 로 분할한다. 여기서  $r$ 은 원점 "O"가 반평

면  $H$ 의 내부로 들어 온 깊이로서,  $H$ 가 원점을 포함하는 경우에는  $r > 0$ 이고  $H$ 가 원점을 포함하지 않는 경우에는  $r < 0$ 이다. 또  $\theta$ 는 반평면  $H$ 가 좌반평면과 반시계 방향으로 이루고 있는 각으로서  $-\pi < \theta \leq \pi$ 이다. 이러한 정의에 따라  $H(0, 0)$ 은 좌반평면을 나타내고  $H(0, \pi)$ 는 우반평면을 나타낸다. 직선에 의하여 분할된 두 개의 반평면은  $\bar{H}(r, \theta) = H(-r, \theta \pm \pi)$ 의 관계를 만족한다. 또  $r \geq r'$ 일 때

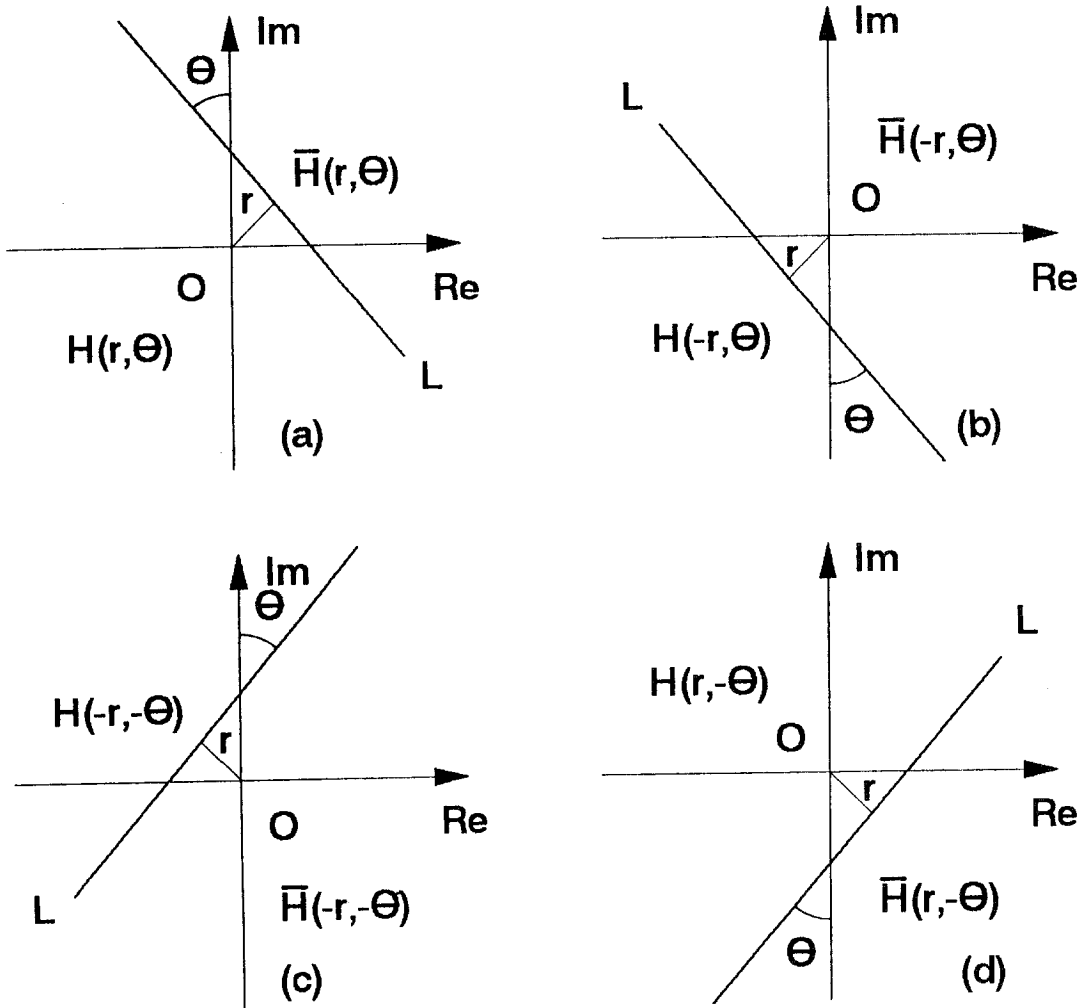


Fig. 1 Bisection of the complex plane by a straight line.

반평면  $H(r, \theta)$ 는 반평면  $H(r', \theta)$ 를 포함한다.

상수행렬  $A \in C^{n \times n}$ 의 고유치를  $\lambda \in C$ 라하면 행렬  $e^{-j\theta}(A - re^{j\theta}I)$ 의 고유치는  $e^{-j\theta}\lambda - r$ 이다. 따라서 행렬  $A$ 의 모든 고유치가 복소 반평면  $H(r, \theta)$ 내에 놓여 있다는 것을 행렬  $e^{-j\theta}(A - re^{j\theta}I)$ 가 안정하다는 것과 같은 의미이다.

이러한 복소 반평면들의 공통 영역  $R$ 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R = \bigcap_{k=1}^p H(r_k, \theta_k) \dots\dots\dots(1)$$

이때  $r_k$ 와  $\theta_k$ 를 적절히 선정함으로써 원하는 형태의 극배치 영역을 근사적으로 나타낼 수 있게 된다.

### 3. 시스템의 불확실성에 따른 극배치 영역의 변동

상태기환 제어에 의해서 원하는 영역 내에 극점이 놓이도록 극배치가 이루어진 불확실한 선형 시불변 시스템의 페루프 상태 방정식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x \dots\dots\dots(2)$$

여기서  $A \in C^{n \times n}$ 는 페루프 시스템 행렬이고  $\Delta A \in C^{n \times n}$ 는 시스템 매개변수의 불확실성을 나타내는 행렬로서  $\Delta A$ 의 요소(element)를  $\Delta a_{ij}$ 라고 할 때 불확실성의 범위는  $|\Delta a_{ij}| \leq \epsilon_{ij}$ 로 제한된다고 가정한다. 이때 다음의 정리가 성립한다.

<정리 1>

상수행렬  $A$ 의 모든 고유치가 복소 반평면  $H(r, \theta)$ 내에 놓여 있을 때

$$\rho = \frac{1}{2} \|P\| \dots\dots\dots(3)$$

이면, 행렬  $A + \Delta A$ 의 모든 고유치는  $r' > r +$

$\rho$ 인 복소 반평면  $H(r', \theta)$ 내에 있게 된다. 이때 행렬  $P$ 는 방정식

$$e^{j\theta}A^*P + e^{-j\theta}PA - 2rP + \mu I = 0 \dots(4)$$

의 유일한 positive definite Hermitian 해이다. 여기서  $\mu = \|E^*E\|$ 이고, 상수행렬  $E \in C^{n \times n}$ 는 불확실성의 한계  $\epsilon_{ij}$ 를 요소로 갖는다.

<증명>

행렬  $A$ 의 고유치가 모두 복소 반평면  $H(r, \theta)$ 내에 있으므로  $e^{j\theta}(A - re^{j\theta}I)$ 는 안정한 행렬이다. 따라서 식(4)와 등가인 다음 방정식

$$[e^{j\theta}(A - re^{j\theta}I)]^*P + P[e^{j\theta}(A - re^{j\theta}I) + \mu I] = 0 \dots\dots\dots(5)$$

은 항상 유일한 positive definite Hermitian 해를 갖는다. 한편 불확실성이 포함된 행렬  $e^{j\theta}(A + \Delta A - r'e^{j\theta}I)$ 의 안정성을 판별하기 위하여 다음과 같은 복소 시스템을 생각해 보자.

$$\dot{x} = e^{-j\theta}(A + \Delta A - r'e^{j\theta}I)x \dots\dots\dots(6)$$

이 시스템에 대한 Lyapunov 함수를  $V = x^*Px$ 로 정의하면 Lyapunov 도함수는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^* \{ [e^{-j\theta}(A + \Delta A - r'e^{j\theta}I)]^*P + P[e^{-j\theta}(A + \Delta A - r'e^{j\theta}I)] \} x \\ &= x^* (e^{j\theta}A^*P + e^{-j\theta}PA - 2r'P + e^{j\theta}\Delta A^*P + e^{-j\theta}P\Delta A)x \\ &< x^* (e^{j\theta}A^*P + e^{-j\theta}PA - 2rP - 2\rho P + e^{j\theta}\Delta A^*P + e^{-j\theta}P\Delta A)x \\ &= x^* (-\mu I - 2\rho P + e^{j\theta}\Delta A^*P + e^{-j\theta}P\Delta A)x \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

그런데 norm의 성질에 의하여 부등식

$$\begin{aligned}
 x^* \Delta A^* \Delta A x &\leq x^* \| \Delta A^* \Delta A \| x \\
 &\leq x^* \| | \Delta A^* | | \Delta A | \| x \\
 &\leq x^* \| E^* E \| x = \mu x^* x \\
 \dots\dots\dots (8)
 \end{aligned}$$

이 성립하므로

$$\begin{aligned}
 x^*(e^{j\theta} \Delta A^* P + e^{-j\theta} P \Delta A)x & \\
 = (e^{-j\theta} \Delta A x)^*(P x) + (P x)^*(e^{-j\theta} \Delta A x) & \\
 \leq x^* \Delta A^* \Delta A x + x^* P^2 x & \\
 \leq x^*(\mu I + P^2)x \dots\dots\dots (9)
 \end{aligned}$$

인 관계가 성립한다. 한편 positive definite Hermitian 행렬 P를 P=S\*S=SS\*로 나타낼 수 있으므로 식(9)를 사용해서 식(7)을 다시 정리해 보면

$$\begin{aligned}
 V &< x^*(-2\rho P + P^2)x \\
 &= x^*(-2\rho S^*S + S^*PS)x \\
 &= x^*S^*(-\|P\|I + P)Sx \dots\dots (10)
 \end{aligned}$$

가 된다. 즉,  $\dot{V} < 0$ 이 되기 때문에 행렬  $e^{-j\theta}(A + \Delta A - r'e^{j\theta}I)$ 은 점근적으로 안정하다. 따라서 행렬 A + ΔA의 모든 고유치는 복소 반평면 H(r', θ)내에 존재함을 알 수 있다.

증명 끝

위의 결과는 다음과 같이 확장될 수 있다. 행렬 A의 고유치가 모두 식(1)과 같은 영역 R 내에 놓여 있을 때

$$\rho_k = \frac{1}{2} \| P_k \| ; \quad k=1, \dots, p \dots\dots (11)$$

이면 행렬 A + ΔA의 모든 고유치는 p개의 반평면 H(r'\_k, θ\_k), k=1, ..., p에 모두 포함되는 공통 영역

$$R' = \bigcap_{k=1}^p H(r'_k, \theta_k) \dots\dots\dots(12)$$

내에 놓이게 된다. 이때  $r'_k > r_k + \rho_k$ , k=1, ..., p이며 P\_k는 방정식

$$\begin{aligned}
 e^{j\theta_k} A^* P_k + e^{-j\theta_k} P_k A - 2r_k P_k + \mu I &= 0 ; \\
 k=1, \dots, p \dots\dots\dots (13)
 \end{aligned}$$

의 유일한 positive definite Hermitian 해이다.

#### 4. 시스템 매개변수 변동의 한계

여기서는 불확실성의 구조에 관한 정보를 알려주는 행렬 E가 주어져 있을 때 페루프 극점이 완화된 극배치 영역(relaxed region of pole assignment) 내에 남아있도록 보장되는 매개변수 변동의 한계

$$\max | \Delta a_{ii} | = \eta e_{ii} \dots\dots\dots (14)$$

를 구해보자. 이는 매개변수의 변동에 따른 극배치 영역의 변동과는 반대의 관점에서 페루프 극점의 건실성을 해석하는 것으로서 상호 보완적인 해석 방법이 된다.

<정 리>

상수행렬 A의 모든 고유치가 복소 반평면 H(r, θ)내에 놓여 있을 때

$$\begin{aligned}
 \frac{| \Delta a_{ii} |}{e_{ii}} \leq \eta = & \\
 & \frac{1}{\| | T^{-*} P | E | T^{-1} | + | T^{-*} | E | P T^{-1} | \|} \\
 \dots\dots\dots (15)
 \end{aligned}$$

이면, 행렬 A + ΔA의 모든 고유치는 ρ만큼 완화된 복소 반평면 H(r', θ)내에 남아있게 된다. 여기서 r' > r + ρ이고, P는 방정식

$$e^{j\theta} A^* P + e^{-j\theta} P A - 2r P + I = 0 \dots\dots (16)$$

의 유일한 positive definite Hermitian 해이

다. 또 T는  $I+2\rho P=T^*T=TT^*$ 를 만족하는 positive definite Hermitian 행렬이다.

<증명>

정리 1에서와 마찬가지로 행렬  $e^{-j\theta}(A+\Delta A-r'e^{j\theta}I)$ 의 안정성을 판별하기 위하여 식(6)과 같은 복소 시스템을 생각해 보자. 이 시스템에 대한 Lyapunov 함수를  $V=x^*Px$ 로 정의하면 Lyapunov 도함수는 다음과 같이 계산된다.

$$\dot{V} < x^*(-I-2\rho P+e^{j\theta}\Delta A^*P+e^{-j\theta}P\Delta A)x \dots\dots\dots (17)$$

식(15)의 조건에 의해서

$$\begin{aligned} 1 &= \eta \| |T^{-*}P|E|T^{-1}| \\ &\quad + |T^{-*}|E|PT^{-1}| \| \\ &= \| |T^{-*}e^{j\theta}P|\eta E|T^{-1}| \\ &\quad + |T^{-*}|\eta E|e^{j\theta}PT^{-1}| \| \\ &\dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

이고,  $|\Delta a_{ij}| \leq \eta e_{ij}$ 이다. 따라서 norm의 성질에 의하여

$$\begin{aligned} &\| T^{-*}e^{-j\theta}P\Delta AT^{-1}+T^{-*}\Delta A^*e^{j\theta}PT^{-1} \| \\ &\leq \| |T^{-*}e^{-j\theta}P| |\Delta AT^{-1}| + \\ &\quad |T^{-*}\Delta A^*| |e^{j\theta}PT^{-1}| \| \\ &\leq \| |T^{-*}e^{-j\theta}P| |\Delta A| |T^{-1}| + \\ &\quad |T^{-*}| |\Delta A^*| |e^{j\theta}PT^{-1}| \| \\ &\leq \| |T^{-*}e^{-j\theta}P|\eta E|T^{-1}| + \\ &\quad |T^{-*}|\eta E|e^{j\theta}PT^{-1}| \| \\ &= 1 \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

이 되며, 이로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &x^*T^*(T^{-*}e^{-j\theta}P\Delta AT^{-1} \\ &\quad +T^{-*}\Delta A^*e^{j\theta}PT^{-1})Tx \\ &\leq x^*T^* \| T^{-*}e^{-j\theta}P\Delta AT^{-1} \\ &\quad +T^{-*}\Delta A^*e^{j\theta}PT^{-1} \| Tx \\ &\leq x^*T^*Tx \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

그런데  $I+2\rho P=T^*T=TT^*$ 이므로 식(20)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} &x^*(e^{-j\theta}P\Delta A+\Delta A^*e^{j\theta}P)x \\ &\leq x^*(I+2\rho P)x \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

식(17)과 (21)에 의해서  $\dot{V} < 0$ 이 만족된다. 그러므로 행렬  $A+\Delta A$ 의 모든 고유치가  $\rho$ 만큼 완화된 복소 반평면  $H(r', \theta)$ 내에 남아 있도록 보장되기 위해서는 시스템 매개변수의 변동이 식(15)의 한계 이내로 제한되어야 한다. 증명 끝

이 정리는 Y. T. Juang<sup>7, 8)</sup>의 결과를 일반화한 것으로서  $\rho=0$ 인 경우에 Y. T. Juang의 결과와 일치한다. 한편, 행렬 A의 고유치가 모두 식(1)과 같은 영역 R내에 놓여 있을 때

$$\frac{|\Delta a_{ij}|}{e_{ij}} \leq \min_{k=1, \dots, p} \{\eta_k\} \dots\dots\dots (22)$$

이면 행렬  $A+\Delta A$ 의 모든 고유치는 각각  $\rho_k$ 만큼 완화된 p개의 반평면  $H(r_k, \theta_k)$ ,  $k=1, \dots, p$ 에 모두 포함되는 공통 영역 R'내에 놓이게 된다. 이때  $r_k' > r_k + \rho_k$ ,  $k=1, \dots, p$ 이며,

$$\begin{aligned} \eta_k &= \frac{1}{\| |T_k^{-*}P_k|E|T_k^{-1}| + |T_k^{-*}|E|P_kT_k^{-1}| \|} \\ &I+2\rho_k P_k=T_k^*T_k=T_kT_k^*; k=1, \dots, p \\ &\dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

이다. 또  $P_k$ 는 방정식

$$\begin{aligned} &e^{j\theta_k}A^*P_k+e^{j\theta_k}P_kA-2r_kP_k+I=0; \\ &k=1, \dots, p \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

의 유일한 positive definite Hermitian 해이다.

## 5. 보 기

다음과 같은 선형 시불변 시스템을 생각해

보자.

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots (25)$$

이 시스템의 페루프 극점을 그림 2에 보인 것처럼 정사각형 영역  $R$ , 즉 반평면  $H_1=H(-4, 0)$ ,  $H_2=H(8, \pi)$ ,  $H_3=H(2, \pi/2)$ ,  $H_4=H(2, -\pi/2)$ 의 공통영역 내에 배치하고자 할 때 영역  $R$ 을 그림 3과 같이 중심이  $-6+j0$ 이고, 반경이 2인 원의 내부로 근사화할 수 있다. 이 원형 영역으로의 극배치를 하기 위한 귀환 행렬을 구해 보면

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -2.4334 & -4.4556 & -0.4058 \\ -31.1394 & 31.1394 & -11.171 \end{pmatrix} \dots\dots (26)$$

이 되고<sup>9)</sup>, 이때 페루프 극점은 영역  $R$ 의 내부인  $\{-5.3439, -5.8274, -5.8887\}$ 에 놓이게

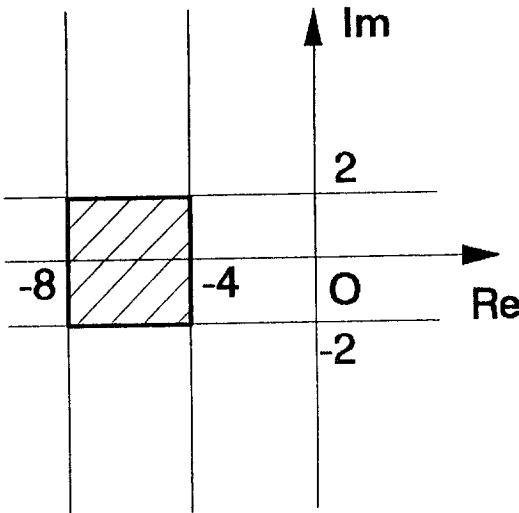


Fig. 2 Region  $R$ .

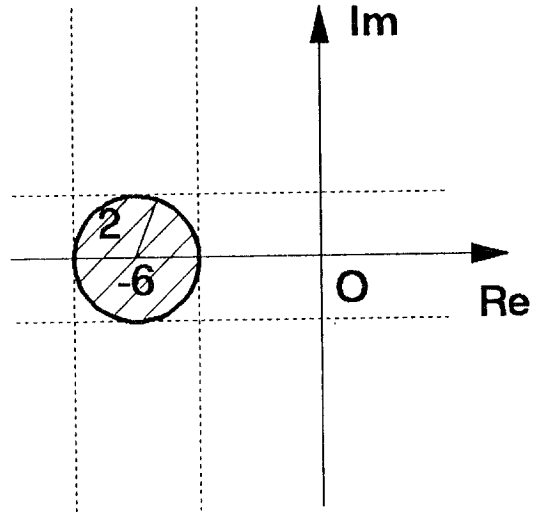


Fig. 3 Approximated circular region.

된다.

시스템의 불확실성이

$$|\Delta a_{ij}| \leq e_{ij}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \dots (27)$$

으로 주어졌을 때, 이로 인한 극배치 영역의 변동은 정리 1에 따라  $\rho_1=10.3279$ ,  $\rho_2=2.9007$ ,  $\rho_3=4.9659$ ,  $\rho_4=4.9659$ 로 계산된다. 이에 해당하는 영역은  $H_1=H(6.3279, 0)$ ,  $H_2=H(10.9007, \pi)$ ,  $H_3=H(6.9659, \pi/2)$ ,  $H_4=H(6.9659, -\pi/2)$ 의 공통 영역으로 그림 4와 같다.

또 영역  $R$ 을  $\rho_1=2$ ,  $\rho_2=2$ ,  $\rho_3=2$ ,  $\rho_4=2$ 만큼 완화된 영역, 즉  $H_1=H(-2, 0)$ ,  $H_2=H(10, \pi)$ ,  $H_3=H(4, \pi/2)$ ,  $H_4=H(4, -\pi/2)$ 의 공통영역 내에 페루프 극점이 머물러 있도록 보장하는 매개변수의 변동 한계는 정리 2에 따라

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta a_{ij}|}{e_{ij}} &\leq \min\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\} \\ &= \min\{0.4183, 0.7551, 0.5904, 0.5904\} \\ &= 0.4183 \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

으로서 이에 해당하는 매개변수의 변동 범위는  $|\Delta a_{ij}| \leq 0.4183e_{ij}$ 가 된다. 즉, 매개변수가 이 한계내에서 변동하면 페루프 극점은 그림 5와 같은 영역을 벗어나지 않는다.

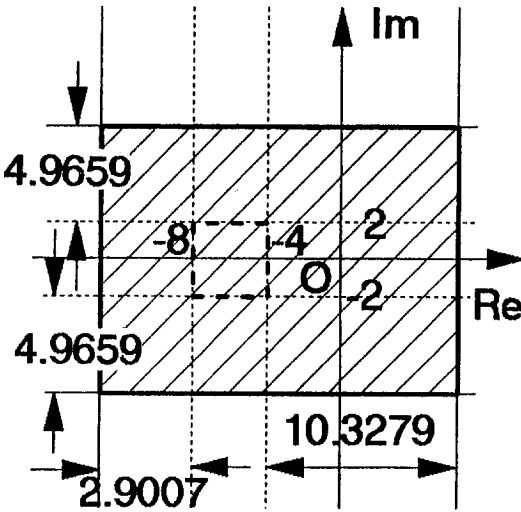


Fig. 4 Perturbation of the pole-located region due to parameter variations.

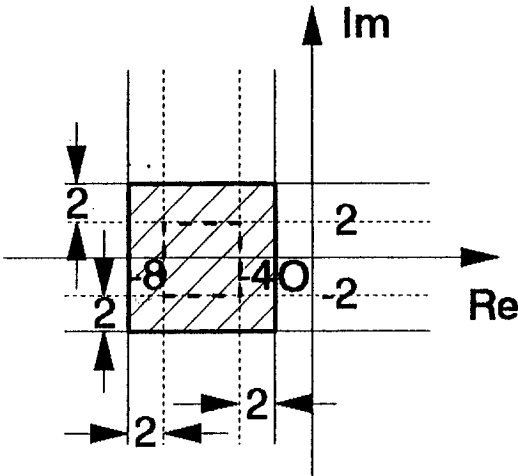


Fig. 5 Relaxed region of pole assignment.

본 논문에서는 시스템의 불확실성과 이로부터 비롯되는 극점의 위치변동 사이의 관계를 조사·분석하여 불확실한 매개변수를 갖는 선형 시불변 시스템의 극배치에 관한 견실성을 해석하였다. 먼저 매개변수 행렬의 불확실성에 의하여 극배치 영역의 경계가 변동되는 정도를 해석하였다. 그리고 완화된 극배치 영역내에 시스템의 극점이 머무르도록 보장되는 불확실성의 한계를 제시하였다. 이들은 Lyapunov 방정식과 norm 연산등을 통해서 극배치의 견실성에 관한 유용한 척도를 제공해 준다.

매개변수의 변동으로 인한 극배치 영역의 변동을 나타내는 수치  $\rho$ 와 페루프 극점이 완화된 극배치 영역내에 머무르도록 보장되는 불확실성의 한계를 나타내는 수치  $\eta$ 는 엄격한 한계치가 아니라 매우 안전한 한계(conservative bound)이다. 따라서  $\rho$ 가 작거나  $\eta$ 가 클 경우에는 견실성이 우수하다고 할 수 있지만 그역이 반드시 성립하는 것은 아니기 때문에 견실성을 더 정확히 해석하기 위해서는 그 밖의 다른 지표들도 함께 고려되어야 할 것이다. 그리고 이 값들은 영역의 경계로부터 극점에 이르는 거리, 즉 상대 안정도와 밀접한 관계가 있기 때문에 견실한 극배치를 할 때 가능한 한 극점이 영역내의 깊숙한 위치에 배치되도록 하는 것이 중요하다고 생각된다.

참 고 문 헌

1. W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control : A Geometric Approach*, 2nd Ed., New York, Springer-Verlag, 1979.
2. J. E. Ackermann, "Parameter space design of robust control systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 25, pp.

- 1058~1072, 1980.
3. B. R. Barmish, "Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 29, pp. 935~936, 1984.
  4. A. Vicino, "Robustness of pole location in perturbed systems", *Automatica*, Vol. 25, pp. 109~113, 1989.
  5. R. K. Yedavalli, "Improved measures of stability robustness of linear state space models", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 30, pp. 577~579, 1985.
  6. K. Zhou and P. P. Khargonekar, "Stability robustness bounds for linear state space models with structured uncertainty", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 32, pp. 621~623, 1987.
  7. Y. T. Juang, Z. C. Hong, and Y. T. Wang, "Lyapunov approach to robust pole-assignment analysis", *Int. J. Contr.*, Vol. 49, pp. 921~927, 1989.
  8. Y. T. Juang, Z. C. Hong, and Y. T. Wang, "Robustness of pole-assignment in a specified region", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 34, pp. 758~760, 1989.
  9. K. Furuta and S. B. Kim, "Pole assignment in a specified disk", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 32, pp. 423~427, 1987.