Lyapunov 함수에 의한 대규모 열차 시스템의 안정화

남 부 희*

Stabilization of Multilocomotive Powered Train System Using Lyapunov Functions

Boo-Hee Nam

ABSTRACT

Using the Brayton and Tong's computer-generated Lyapunov functions, we stabilize the multilocomotive train system so that the system is globally asymptotically stable. We decompose an interconnected system into the second order subsystems.

Lyapunov functions of the free subystems are constructed using the Brayton and Tong's algorithm. An aggregated test matrix is determined in terms of the qualitative properties of the free subsystems and the interconnecting structures. State feedback is used for stabilizing the entire system.

I. 서 론

Brayton-Tong[1][2]은 동특성시스템의 완전점근 안정도를 해석하는 데 필요한 Lyapunov함수를 컴퓨터발생시키는 알고리즘을 개발하였다.

본 연구에서는 높은 차수의 연속시간 대규모 시스템을 2계의 subsystem으로 분해하여, 상호 연결함수를 제거한 자유시스템의 안정척도와 안정영역을 구하는데 Brayton-Tong의 컴퓨터발생 Lyapunov함수를 이용한다. 자유시스템의 Lyapunov함수로 상호연결함수의 안정도 매개변수를 추정한 후, 전체시스템의 안정도를 판별하기 위하여 시험행렬을 만들어 이 행렬이 M-행렬[3](Minkowski 행렬)이면, 전체시스템의 점근안정은 보장되며, 이를 전체시스템의 안정구역을 구하는 데 이용한다.

* 강원대학교 제어계측공학과 부교수

II. Brayton-Tong의 컴퓨터발생 Lyapunov 함수

Brayton-Tong[1, 2]는 다음 형태의 연속시간 시스템의 안정도를 판별하는 알고리즘을 개발하였다.

$$\dot{x} = f(x) \quad \cdots\cdots\cdots (E)$$

시스템(E)를 다음과 같이 바꾸어 표시한다.

$$\dot{x} = M(x)x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (E')$$

여기서 $M(x)$는 모든 $x \in R^n$에 대하여 $M(x)x=f(x)$가 되도록 선택되며, (E')에 Euler공식을 적용하면 $x_k+1=x_k+h_k \cdot M(x_k)x_k$가 되고, 여기서 $h_k=t_{k+1}-t_k$, $k=0, 1, 2, \cdots$이다. $x_k \in R^n$의 모든 값을 변화시켜 얻은 $M(x_k)$의 행렬집합을 S라 하면, 시스템(E)와 등가인 이산시간 시스템(1)을 얻는다.

$$x_k+1=(I_n+h_kM_k)x_k,\ M_k \in S \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

여기서 I_n은 $n \times n$ 단위행렬이다.

[1]과 [2]에서, 만일 시스템(1)의 평형점 $x=0$가 모든 $\{h_k\}$, $0 < h_k < h'$, 에 대하여 안정(완전점근안정)하면, 시스템(E)의 평형점 $x=0$도 안정(완전점근안정)함이 증명되었다. 이것은 행렬집합의 안정성을 이용하여 다음과 같이 말할 수 있다. 모든 $n \times n$ 실수 행렬 M의 집합을 S라 할 때, 다음 집합

$$A=\{I_n+hS\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

가 어떤 $n > 0$에 대하여 행렬안정(행렬점근안정)하면, 시스템(E)의 평형점 $x=0$는 안정(완전점근안정)하다.

원점 포함한 임의의 영역 $U \subset R^n$에 대하여 $MV \subseteq U$가 모든 $M \in A'$(여기서 A'은 A에 의해 발생되는 multiplicative semigroup)에 대하여 성립할 때, 행렬집합 A를 행렬 안정하다라고 한다. A가 행렬안정하면 모든 $M \in A$에 대하여 $MW \subseteq W$가 성립하는 원점 포함하는 유한영역 $W \subset R^n$가 존재하고, W는 원점대칭인 볼록집합(convex set)으로 선택될 수 있으며, 또한, 모든 $M \in A$와 $x \in R^n$에 대하여 $\|Mx\|w \le \|x\|w$가 성립하는 vector norm $\|\cdot\|w$가 존재한다. 따라서 $\|x\|w=\inf\{\alpha : \alpha \ge 0,\ x \in \alpha W\}$가 되어, $\|x\|w$는 행렬집합 A의 Lyapunov함수가 된다. 즉, 모든 $M \in A$, $x \in R^n$에 대하여 $v(Mx) \le v(x)$의 성질을 갖는 Lyapunov함수 $v(x)=\|x\|w$가 된다.

$\rho > 1$에 대하여 ρA가 행렬안정하면, A를 행렬 점근안정하다고 정의한다. 따라서 A가 안정하면, $0<r<1$에서 rA는 점근안정하다. 또한, 행렬A가 점근안정하면, 모든 $M \in A'$에 대하여 고유치 절대값 $|\lambda(M)| \le k < 1$되는 k가 존재한다.

$n \times n$실수의 행렬집합 $A=\{M_0, \cdots, M_{m-1}\}$의 안정 여부를 판별하기 위하여, 원점포함한 초기의 대칭 볼록영역 W_0에서 부터 W_{k+1}을 다음과 같이 구한다.

$$W_{k+1}=H[\bigcup_{j=0}^{\infty} M_{k'}W_k],\ K'=(k-1) \bmod m$$

여기서 $H[W]$는 W의 convex hull이다. 이때 행렬 A가 안정하기 위한 필요충분조건은

$$W^*=\bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$$

가 유한한 것이다.

Ⅲ. 연속시간 대규모 시스템의 안정도

Brayton-Tong의 알고리즘을 고차의 시스템에 직접 적용하기는 어려우므로 [3]의 분해-합성법을 이용하여 다음 형태로 주어지는 대규모 시스템의 안정도를 해석하고 안정영역을 구한다.

$$\dot{z}_i=F_i(z_i)+G_i(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\textstyle\sum i)$$

여기서 $i=1, \cdots, m$, $z_i \in R^{n_i}$, $x \in R^{n_i}$, $x \in R^n$,

$$n=\sum_{i=1}^{m} n_i,\ x^T=(z_1^T, \cdots, z_m^T),$$

$F_i(0)=0$, $G_i(0)=0$이다. $F(x)^T=[F_1(z_1)^T,$

$\cdots, F_m^T(z_m)], G(x)^T=[G_1(x),\cdots,G_m(x)^T]$라 놓으면 ($\Sigma$i)는 등가로 다음과 같이 표시된다.

$$\dot{x}=F(x)+G(x)=H(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (S)$$

다음의 자유 시스템(Si)에 대하여

$$\dot{z}=F_i(z_i) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (S_i)$$

$F_i(z_i)=M_i(z_i)z_i$가 성립하는 행렬 $M_i(z_i)$가 존재할 때, 여기에 Euler공식을 적용하면

$$z_i(k+1)=[In_i+h_kM_i(z_i(k))]z_i(k)\cdots(3)$$

가 된다. $S_i=\{M_i(z_i)\in R^{ni*ni},\ zi\in R^{ni}\}$의 행렬 집합에 대하여, 집합 $A_i=\{In_i+h_iS_i\}$가 행렬 점근안정하게 hi>0가 선정되면, ρiAi가 행렬 안정한 ρi>1가 존재한다. 따라서 행렬 A_i에 Brayton-Tong의 알고리즘을 적용하여 볼록 영역 W_i*를 구하면, (S_i)에 대한 Lyapunov 함수는 $v_i(z_i)=\|z_i\|_i=\|z_i\|w_i{*}$가 된다. W_i*의 경제집합, ∂W_i*는 $\partial W_i{*}=\{z_i\in R^{ni}: \|z_i\|_i=1\}$이 되며, $v_i(z_i)=\|z_i\|_i$는 Lipschitz상수가 1인 연속 함수 임에 유의할 필요가 있다.

정리1[4] : 시스템(E) : $\dot{x}=f(x)=M(x)x$에 대하여, 집합

$$\{\rho(I+h_iM(x)) : x\in R^n\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

이 안정하도록 h_i>0와 ρ>1이 존재한다고 가정한다.

집합(4)에 대하여 Brayton-Tong 알고리즘에 의해 발생된 볼록 대칭집합을 W*라 하고, $v(x)=\|x\|w*$를 이에 상응하는 Lyapunov함수라고 하면, (E)의 해를 따라 다음이 성립한다.

$$D_{v(E)}(x)=\lim_{h\to 0+}\sup \frac{v[x+hf(x)]-v(x)}{h}$$

$$\le -\mu v(x)$$

여기서 $\mu=(1-1/\rho)(1/h_i)$이며, 안정척도가 된다.

정리2[4] : 대규모 시스템

$$\dot{z}_i=F_i(z_i)+G_i(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (\Sigma i)$$

에 대하여, 평형점 x=0는 다음 조건이 만족될 때 점근안정하다.

(A−1)자유시스템(Si) : $\dot{z}_i=F_i(z_i)$가 정리1을 만족시킨다. 즉, (S_i)의 Lyapunov함수 $v_i(z_i)=\|z_i\|_i$에 대하여 $Dv_i(s_i)(z_i)\le-\mu_iv_i(z_i)$가 되는 μ_i>0가 존재한다.

(A−2)연결함수에 대하여, $\|G_i(x)\|_i\le \sum_{j=1}^{m} g_{ij}\|z_i\|_j$, $x\in R^n$가 되는 $g_{ij}\ge0$가 존재한다.

(A−3)m×m행렬 $D=[d_{ij}]$가 M−행렬이다. 여기서

$$d_{ij}=\begin{cases}\mu_i g_{ii}, & i=j\\ -g_{ij}, & i\ne j\end{cases}$$

시스템(Σ_i)가 특히 선형구조 $G_i(x)=\sum_{j=1}^{m}A_{ij}z_j$를 가질 경우 $g_{ij}=\|A_{ij}\|_{ij}$가 된다. W_i*에 의하여 유도된 norm $\|\cdot\|_i$와 $\|\cdot\|_i$ 그리고 경계집합 ∂W_i*와 ∂W_i*에 대하여 $\|A_{ij}\|_{ij}$는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\|A_{ij}\|_{ij}=\sup_{\|z_{ij}\|_j=1}\|A_{ij}z_j\|_i$$

$$=\sup_{z_j\in\partial W_j}\|A_{ij}z_j\|_i$$

Ⅳ 열차 시스템의 안정화

수십~수백개의 동일한 화차를 끄는 긴열차는 많은 화물을 운반하는데 사용된다. 이러한 기차는 질량-스프링-대쉬폿(spring-dashpot)의 비선형 모델로 근사화 되며[5], 일부 모델이 그림 1에 있다. [6]과 같이 간략화 가정을 한다:

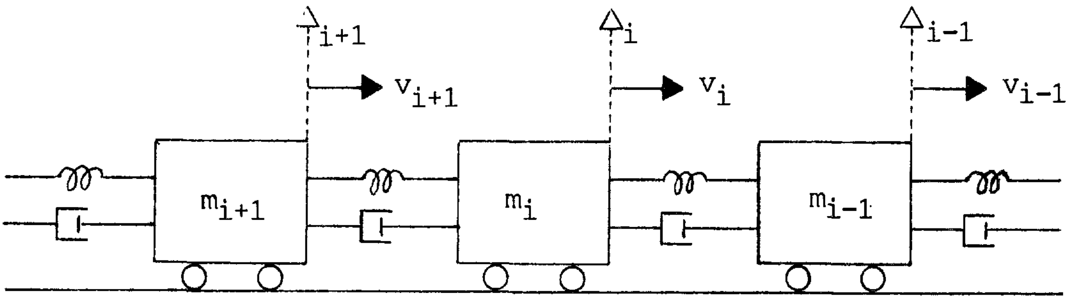


Fig. 1. String of modeled train vehicles.

(1) 일정 속도 범위내에서 선형 시불변으로 간주한다.
(2) 열차는 앞뒤 대칭으로, 원동차는 앞뒤와 가운데 있다.
(3) 연결부는 스프링상수 k와 감쇄계수(화차는 C_C, 기관차는 C_L)로 모델링되고, dead zone은 무시된다.
(4) 브레이크와 가속장치의 힘의 크기의 제한은 없는 것으로 한다.

$\underline{v}$를 실제 속도 벡터 $\underline{f}$를 실제 가속 및 제동력 벡터라 하면 공칭치와의 편차는

$$\delta \underline{v}=\underline{v}-\underline{v}^0,\ \delta \underline{f}=\underline{f}-\underline{f}^0$$

가 된다. 여기서 $\underline{v}^0$는 $\underline{f}^0$에 의해 결정되며, $\underline{f}^0$는 저항과 중력의 합과 같다. 그 선형 모델은 다음과 같다[6]:

$$m_i \delta \dot{v}_i = k(\Delta_i-\Delta_{i+1}) + c_i(\delta v_{i-1}-2\delta v_i+\delta v_{i+1})+\delta f_i \cdots (5)$$
$$i=1, \cdots, n$$
$$\dot{\Delta}_i=\delta v_{i-1}-\delta v_i$$
$$i=2, \cdots, n$$

여기서 Δi : 공칭 위치와의 변위($\Delta_1=\Delta_{n+1}=0$)

δv_i : 속도 편차($\delta v_0=\delta v_{n+1}=0$)
δf_i : 피이드백 입력
m_i : 기관차 및 탄차의 질량
$i=1, m, n$: 기관차의 위치
$m_i=m_L,\ c_i=c_L,\ i=1, m, n$
$mi=m_C, c_i c_C, i=2, \cdots m-1, m+1, \cdots, n-1$

$x_i=\Delta_{i+1}, i=1, \cdots, n-1, yi=\delta v_i, i=1, \cdots, n$ 으로 정의하면, 식(5)(6)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(\Pi_i) : \dot{z}_i=A_i z_i+A_{i,i-1} z_{i-1}+A_{i,i+1} z_{i+1} + U_i \quad \cdots\cdots (7)$$
$$i=1, \cdots, n$$

여기서 $z_i^T=(x_i\ y_i),\ i=1, \cdots, n-1$
$z_n^T=z_n=y_n$
$A_{1,0}=A_{n,n+1}=0,\ B^T=(0\ 1)$
$U_i=B\delta f_i$

또한 $x^T=(z_1^T, \cdots, z_n^T)$로 하면, (II_i)는

$$\dot{x}=Ax+U,\ U^T=(U_1^T, \cdots, U_n^T) \quad \cdots\cdots (8)$$

가 되고, 여기서 A는 $(2n-1)\times(2n-1)$행렬 :

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_2 & A_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & & A_{n-1,n} & A_n \end{bmatrix}$$

가 된다.

선형 피이백 행렬 K를 $U=Kx$의 형태로 하면 $\dot{x}=(A+k)x$가 점근 안정 하도록 해야 한다. [7]에서 3개의 차량이 있는 경우 최적 선형 피이드백을 구했으며, [6]에서는 63개의 차량을 가진 기차에 대하여 차선의 최적 스위칭 시이퀀스를 구했으나, 전체 시스템의 안정도를 해석적으로 판별하지는 못하였다.

(7)에서 상태변수 z_i가 제어 가능하다고 가정하여 $U_i=K_iz_i$ 형태의 피이드백을 하면, 피이드백 행렬 K는

$$K=\begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & K_n \end{bmatrix}$$

가 될 것이고, [6]에서 제안한 방법 즉, 정리 2를 사용하여 전체 시스템이 완전 안정하도록 K를 다음에 구한다.

문제를 간단히 하기위하여, 3개의 기관차와 4개의 차량이 있는 짧은 기차를 가정한다. 긴 기차의 경우에도 방법은 같기 때문이다. [7]과 같이 다음의 수치를 가정한다.

기관차 질량 $m_L=2$
차량 질량 $m_C=1$
감쇄 계수 $c_L=c_C=1$
스프링 상수 $k=1$

그러면 다음의 시스템이 된다.

$$\dot{z}_i=A_iz_i+A_{i,i-1}z_{i-1}+A_{i,i+1}z_{i+1}+U_i,\ U_i=K_iz_i$$

$i=1, 2, 3, 4, 5, 6,$

$$\dot{z}_7=a_7z_7+b^Tz_6+U_7,\ U_7=K_7z_7$$

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad A_{12}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$A_2=A_3=A_5=A_6=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}=A_{32}=A_{54}A_{65}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{23}=A_{34}=A_{56}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & +1 \end{bmatrix},\ A_{43}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$A_{45}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},\ A_{67}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ A_{10}=0$$

$a_7=-0.5,\ b^T=(0.5\ 0.5)$

ζ_i : $\dot{z}_i=A_iz_i+K_iz_i=J_iz_i$

$(i=1, \cdots, 6)$

를 (II_i)의 자유 시스템이라고 하고

$$A_i=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{i1} & -a_{i2} \end{bmatrix},a_{i1}>0,\ a_{i2}>0$$

$$J_i=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_i & -\beta_i \end{bmatrix},\alpha_i>0,\ \beta_i>0$$

$$K_i=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_{i1} & -k_{i2} \end{bmatrix},k_{i1}>0,\ k_{i2}>0 \quad \begin{matrix} k_{i1}=\alpha_i-a_{i1} \\ k_{i2}=\beta_i-a_{i2} \end{matrix}$$

의 형태라 가정하면, J_i의 α_i와 β_i는 피이드백 이득 k_{i1}과 k_{i2}가 가능한 한 작게하면서 동시에 정리 2의 시험 행렬이 M-행렬이 되도록 선택되어야 한다. (ζ_i)가 점근 안정 하려면 $\lambda(J_i)$의 실수부가 (-)이어야 한다 :

$$\lambda(J_i)=\frac{-\beta_i\pm\sqrt{\beta_i^2-4\alpha_i}}{2}$$

$M_i=I+h_iJ_i$에서, $h_i>0$는 M_i가 점근 안정하도록, 즉, $|\lambda(M_i)|<1$이 되도록 선정되어야 하며,

$\lambda(M_i)=1+h_i\lambda(J_i)$의 관계가 있다.

자유 시스템(ζ_i)의 안정도 척도 μ_i는 β_i에 의존하며, h_i의 선정에 의존한다. β_i는 2계 시스템 방정식 $\ddot{y}+\beta_i\dot{y}+\alpha_i y=0$의 감쇄계수에 상응하며, μ_i는 $\beta_i/2$보다 작음이 다음 정리 3에 나타나 있다.

정리 3. 다음 시스템에 대하여

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix} x=Jx$$

$$x^T=(x_1\ x_2),\ J=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix},\ a>0,\ b>0$$

$M=1+hJ$의 고유치가 $|\lambda(M)|<k<1$이 되는 $k>0$, $h>0$가 존재하면, $\mu=(1-1/\rho)(1/h)$, $\rho>1$,는 다음의 상한을 갖는다.

$$0<\alpha<\frac{\beta^2}{4},\ \mu\leqq\frac{\beta}{2}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha}}{2}$$

$$\alpha>\frac{\beta^2}{4},\ \mu<\frac{\beta}{2}$$

증명 : M이 점근 안정하므로, ρM이 안정하도록 $\rho>1$이 존재한다.

$$\rho M=\rho[I+hJ]=\rho\begin{bmatrix} 1 & h \\ -ah & 1-bh \end{bmatrix}$$

에서 $\lambda(\rho M)=\rho\lambda(M)=\rho[I+h\lambda(J)]$, $\lambda(J)$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a}}{2}$$

(1) $b^2-4a>0$인 경우 : $a>0$, $b>0$이므로 $|\lambda(M)|<1$이 되는 $h>0$에 대하여 항상 $\lambda(M)>0$이므로 M의 고유치의 최대치를 r이라 하면

$$0<r=1+\frac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2}<1$$

$\rho>1$은 $\rho\ r\leq1$이 되도록 선택하므로,

$$\rho r=\rho\left(1+h\frac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2}\right)\leq1$$

$$1-1/\rho\leq-h\cdot\frac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2}$$

따라서, $\mu=(1-1/\rho)(1/h)\leq b/2$

$$-\frac{\sqrt{b^2-4a}}{2}<b/2$$

(2) $b^2-4a=0$ 즉, $\lambda(M)=1-h/2$(중근)의 경우:

$\rho>1$는 $|\lambda(\rho M)|<1$이 되도록 선택된다. $\lambda(M)>0$이므로,

$$1-1/\rho<1-(1-hb/2)=hb/2$$

따라서, $\mu=(1-1/\rho)(1/h)<b/2$

(3) $b^2-4a<0$의 경우:

$$\lambda(M)=1+h\frac{-b\pm j\sqrt{4a-b^2}}{2},\ j=\sqrt{-1}$$

$|\lambda(M)|\leq k<1$, $k>0$이므로, $|\lambda(\rho M)|=\rho|\lambda(M)|\leq1$이 되도록 $\rho>1$가 선택된다. 따라서

$$\begin{aligned}\mu&=(1-1/\rho)(1/h)\\&\leq(1-|\lambda(M)|)(1/h)\end{aligned}$$

$$=1/h-(1/h)\left|1+h\cdot\frac{-b\pm j\sqrt{4a-b^2}}{2}\right|$$

$=1/h-(1/h)|1-bh/2\pm jh\cdot\frac{\sqrt{4a-b^2}}{2}|$

$=1/h-(1/h)(1-bh/2)$

$=b/2$ $(1-bh/2>0$이 되도록 $h>0$가 선택될 수 있다.)

수치 결과를 보면 μ_i의 값은 $\beta_i^2-4\alpha_i\leq 0$의 경우가 $\beta_i^2-4\alpha_i>0$의 경우보다 크다. β_i가 결정되면 최초의 피이드백 이득과 최대의 μ_i를 위하여 $\alpha_i=\beta_i^2/4$로 계산한다. 시스템을 안정화 시키는 절차는 다음과 같다.:

단계 1 : $\beta_i>0$의 초기치를 설정한다.

단계 2 : $\alpha_i=\beta_i^2/4$를 계산한다.

단계 3 : $|\lambda(M_i)|<1$이 되는 $h_i>0$를 선정하고 $\rho_i M_i$가 안정하도록 $\rho_i>1$을 선정한다.

단계 4 : W_i^*를 프로그램으로 구하고, $v_i(z_i)=\| z_i \|_i$를 ζ_i의 Lyapunov함수로 한다.

단계 5 : $\mu_i=(1-1/\rho_i)(1/h_i)$와 $g_{ij}=\| A_{ij} \|_{ij}$를 계산한다.

단계 6 : 시험 행렬 $D=[d_{ij}]$가 다음을 만족하는가 판별한다.

$$d_{ii}<\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}|d_{ij}|,\quad d_{ii}=\mu_i,\ d_{ij}=-g_{ij}<0,\ i\neq j$$

i번째의 자유시스템은 (i-1)와 (i+1)번째의 자유시스템의 상태변수의 영향을 받으므로, 위의 과정은 시행오차에 의한 방법을 피하기 어렵다. 마지막 시스템 (II_7):

$\dot{z}_7=az_7+b^Tz_6$, $a=a_7+k_7<0$, $k_7\leq 0$, $b^T=(0.5\ 0.5)$에서는 $v_7(z_7)=z_7$을 자유시스템 (ζ_7)의 Lyapunov함수로 하면,

$$D_{v7(s7)}(z_7)=a\cdot|z_7|$$

가 되어, $\mu_7=-a$, $g_{76}=\| b^T \| =\max\{b^Tz_6 : z_6\in E(W_i^*)\}$

로 계산되고, $\mu_7>g_{76}$조건이 판별된다. 결과적인 수치 데이타는 표 1과 같다.

Table. 1 안정도 특성 계수

	(ζ_1)	$(\zeta_i)\ i=2,3,5,6$	ζ_4
β_i	3	5	4.4
α_i	2.25	6.25	4.84
h_i	0.2	0.2	0.25
ρ_i	1.42	1.9	2.22
μ_i	1.478	2.368	2.198
M_i	$\begin{bmatrix}1 & 0.2\\ -0.45 & 0.4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0.2\\ -1.25 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0.25\\ -1.21 & -0.1\end{bmatrix}$

II 절의 W_i^*, $i=1, \cdots, 6$을 구하기 위하여 초기 볼록 집합

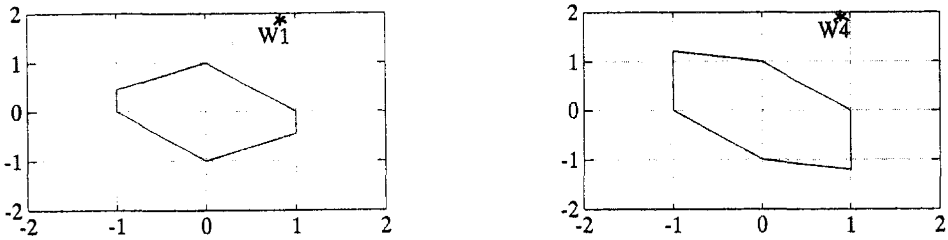
$$W_{0i}=\{z_i^T=(x_i\ y_i) : |x_i|+|y_i|\leq 1\}$$

을 선정하고, (ζ_i)의 Lyapunov함수 $v_i(z_i)=\| z_i \|_i$는 W_i^*에 의해 결정된다. W_i^*의 그래프는 그림 2에 있다. 정리 2의 시험 행렬 D는 다음과 같이 구하여지므로 전체 시스템은 완전 안정하다:

$$D=\begin{array}{c|ccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ \hline 1 & 1.478 & -1.454 & & & & & 0\\ 2 & -1 & 2.368 & -1.25 & & & & \\ 3 & & -1 & 2.368 & -1.21 & & & \\ 4 & & & -0.5 & 2.198 & -1.25 & & \\ 5 & & & & -1 & 2.368 & -1.25 & -1\\ 6 & & & & & -1 & 2.368 & 0.6\\ 7 & 0 & & & & & -0.5 & \\ \hline \end{array}$$

그 피이드백 행렬 k는 다음과 같다.

$$K=\begin{bmatrix}K_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & K_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & K_7\end{bmatrix}$$



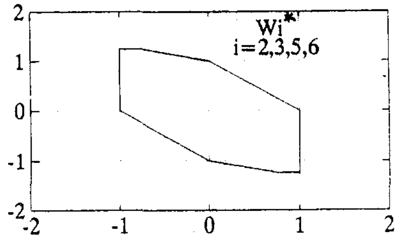


Fig. 2. The final convex setx Wi* of the train system

$$K_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.75 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$K_2=K_3=K_5=K_6=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5.25 & -3 \end{bmatrix}$$

$$K_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4.34 & -3.4 \end{bmatrix},\ K_7=-0.1$$

따라서 열차 시스템은, Lyapunov함수 방법에 의하여, 그 전체 시스템이 완전 안정하도록 안정화 되었다.

V. 결론

Brayton-Tong이 개발한 컴퓨터 발생 Lyapunov함수를 이용하여 대규모 열차 시스템의 안정도 해석을 하였다.

차수가 높은 대규모 시스템을 여러개의 2차 시스템으로 분할하여 2차의 자유 시스템에 대한 Lyapunov함수를 구한 후, 그 자유 시스템과 상호 연결함수에 대한 안정도 특성계수를 구하여, 안정도 판별을 위한 행렬을 구하였다. 상태변수 피드백을 이용하여 전체 시스템이 완전 점근안정되도록 안정화 시켰다.

참 고 문 헌

1) Brayton, R. K. and Tong, C. H. "Stability of Dynamical Systems : A Constructive Approach," IEEE Transactions on Circuits and Systems 26 (April 1979): 224～234.
2) Brayton, R. K. and Tong, C. H. "Constructive Stability and Asymptotic Stability of Dynamical System," IEEE Transactions on Circuits and Systems 27 (November 1980): 1121～1130.
3) Michel, A. N. and Miller, R. K. Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems. New York: Academic Press, 1977.
4) Michel, A. N.: Miller, R. K.: and Nam, B. H. "Stability analysis of Interconnected Systems Using Computer Generated

Lyapunov Functions," IEEE Transactions on circuits and Systems 29, No. 7 (July 1982): 431~440.

5) McLane, P. J. : Peppard, L. E.: and Sundareswaran, K. K. "Decentralized Feedback Control for the Brakeless Operation of Multilocomotive Powered Trains." IEEE Transactions on Automatic Control 21 (June 1976): 358~368.

6) P. Gurber and M. M. Bayoumi, "Suboptimal control strategies for multilocomotive powered trains," IEEE /trans. Automat. contr., Vol. AC-27, No. 3, pp. 536~546, June 1982.

7. Levine, W. and Athans, M. "On the Optimal Error Regulation of String of Moving Vehicles." IEEE Transactions on Automatic Control 11(July 1966): 355~361.