

## 음향 재료의 복소수 모듈러스 추출에 관한 연구

# A Study on Determining Complex Young's Modulus of Acoustic Materials

김 인 수\*, 이 효 근\*, 김 성 희\*

(In-Su Kim, Hyo-Keun Lee, Sung-Hee Kim)

### 요 약

음향 재료의 복소수 모듈러스(Complex Young's modulus)는 정적하중하에서 주파수에 따라 변하므로 재료의 동특성 규명을 위해 손실을 가지는 rod로 모델링 된 원통형 시편을 사용, 한쪽 끝은 가진기로 축방향 조화가진을 하고, 타단에서는 부가 질량체를 부착시켜 이의 전달 함수를 구한다.

전달 함수 방법은 축방향으로 가진된 rod로 모델링하여 가진기의 주파수 범위인 50~20000Hz에서 이론 및 실험적으로 해석된다. 또한 발생가능한 오차의 원인을 규명하고자 시편이가지는 포아송비(Poisson's ratio)에 기인한 측면운동, 끝단 효과(End Effect), 손실계수가 작은 경우의 측정오차 및 시편 끝단의 접착제 효과를 분석하였으며 형상계수의 도입에 의해 측면운동에 의한 오차를 보상하였다.

### ABSTRACT

Since the Complex Young's Modulus of acoustic materials is a function of frequency under a static load, a cylindrical specimen modelled by rod-like one with losses is used to determine the dynamic characteristics of materials.

The specimen is excited into longitudinal vibration at its one end by shaker and at the other end, loaded by a mass corresponding to the desired static load and thus the transfer function of specimen is measured.

This transfer function method is analyzed theoretically and experimentally over a frequency range of 50 Hz to 20 KHz.

The analysis includes the measurability of the transfer function, the frequency range of the method and lateral motion effect.

### 1. 서 론

날로 증가하고 있는 진동/소음 문제를 해결하고

감쇄 재료 개발 및 이를 이용한 설계기술이 개발되고 있다. 그 중 보편적으로 가장 많이 사용되고 있는 재료의 특성추출 기법으로 전달 함수법<sup>1,2)</sup>(Transfer Function Method: TFM)이 있다. 이 기법을 사용하여 감쇄 재료의 동적 Young 계수 및 손실 계수를 구할 수 있다.

\* 국방과학연구소

복소수 모듈러스는 저장계수(Storage Modulus)와 손실계수(Loss Factor)항으로 구성되며, 작용하는 정적하중에 따른 주파수의 함수로 표현된다.

현재까지 TFM을 원통형 혹은 사각 기둥형으로 가공된 긴 시편에 적용하여 복소수 모듈러스(Complex Young's Modulus)를 측정하였으나 주파수 범위 제한 및 측정오차 한계에 대해 명확한 해석이 이루어지지 않았다.

본 연구에서는 각종 엔지니어링 플라스틱 시편을 축방향으로 정현파 가진함으로, 주파수 50~20000 Hz 영역에서 시편 양 끝단의 진동변위 및 위상지면을 측정하였다. 복소수 모듈러스의 함수로 표현되는 이론적 전달함수와 측정된 전달함수의 오차를 Newton Raphson방법을 사용하여 최소화 함으로 주파수에 따라 변동하는 저장계수 및 손실계수를 구하였다. 부가적으로 구한 손실 계수를 3dB down point에서 구한 손실계수와 비교하였다.

끝단효과(End Effect) 및 측면운동의 영향을 고려하고, 시편 및 센서 부착부분의 접촉 불량에 의한 신호 왜곡을 방지 하였으며 시편이 비선형특성을 가지지 않도록 가진진폭을 조절하였다.

## II. 이론 해석

### II-1. 지배방정식

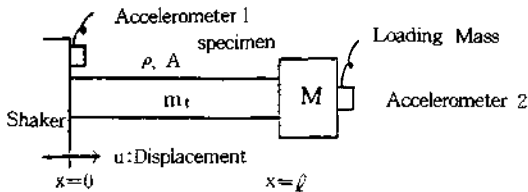


Fig. 1. Schematic diagram of experimental configuration

Fig. 1은 한쪽끝은 부가질량체에 의해, 타단은 가진기에 의해 길이 방향으로 가진되고 있는 원통형 시편을 나타내고 있다. 이론적 모델은 시편의 단면적이 일정하고, 균질하며, 선형 응력-변형도 관계를 가지는 것으로 지배방정식은

$$E^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

여기서  $E^*$ 는 복소수 모듈러스 ( $E^*=E_d(1+i\eta)$ )  $m$ 은 시편의 질량( $\rho A l$ ),  $\rho$ 는 시편의 밀도,  $A$ 는 시편의 단면적,  $e$ 는 시편의 길이이고,  $M$ 은 부가질량이다.

변위  $u$ 는 시간과 공간의 함수이므로

$$u(x, t) = u(x)e^{-j\omega t} \quad (2)$$

여기서  $\omega$ 는  $2\pi f$ ( $f$ 는 가진 주파수)이다.

식 (2)를 식 (1)에 대입하면

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \kappa^2 u = 0 \quad (3.1)$$

$$\kappa^2 = \rho \omega^2 / E^* = -\gamma^2 \quad (\kappa = j\gamma) \quad (3.2)$$

여기서  $\gamma$ 는 전파상수(Propagation Constant)

식 (3)의 일반해를  $u(x)$ 라 가정하면

$$u(x) = C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x \quad (4)$$

로 표현된다.

시편 양 끝단의 경계조건은

$$x=0 : u(0) = u_0 = C_1 \quad (5.1)$$

$$x=l : M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -AE^* \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.2)$$

여기서  $u_0$ 는  $x=0$ 에서의 진동변위이다.

경계조건 (5.1) (5.2)을 식(4)에 적용하여  $C_1$ 과  $C_2$ 를 구하면

$$C_1 = u_0 \quad (6.1)$$

$$C_2 = \frac{AE^* \kappa u_0 \sin \kappa l + M \omega^2 u_0 \cos \kappa l}{AE^* \cos \kappa l - M \omega^2 \sin \kappa l} \quad (6.2)$$

따라서 시편 양 끝단의 진동변위의 비를 구하면

$$\frac{u_0}{u(l)} = \cos \kappa l - \frac{M \omega^2}{AE^* \kappa} \sin \kappa l \quad (7)$$

같이 하고  $y$ 를 구할지언

$$\begin{aligned} \frac{u(0)}{u(\ell)} &= \cos(j\gamma\ell) - \frac{M\omega^2}{AE'(j\gamma)} \sin(j\gamma\ell) \\ &= \cosh\gamma\ell + M/m \gamma\ell \sinh\gamma\ell \\ &= T' = T^{-1} \exp(-j\phi) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $T$ 는 전달 함수,  $T'$ 는 전달 함수전복,  $\phi$ 는 전달 함수 위상이다.

전파상수  $\gamma$ 는 감쇄 상수(Attenuation Const. :  $\alpha$ )와 위상 상수(Phase Const. :  $\beta$ )로 구성되므로<sup>10)</sup>

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (9)$$

복소수 모듈러스는 아래식으로 표현되며

$$E_d' = E_d + jE'' = E_d(1 + j\eta) \quad (10)$$

여기서  $E_d$  : 저장 계수 (Storage Modulus)

$\eta$  : 손실 계수 (Loss Factor)이다.

식 (10)을 식(3.2)에 대입하여 실수부  $\alpha$ 와 허수부  $\beta$ 로 구성하면

$$\alpha = \beta_0 \sqrt{D-1} / \sqrt{2D}, \quad (11.1)$$

$$\beta = \beta_0 \sqrt{D+1} / \sqrt{2D}, \quad (11.2)$$

여기서  $\beta_0 = \omega \sqrt{\rho/E_d}$ ,  $D = \sqrt{1 + \eta^2}$

따라서 식(8)에 전파 상수를 대입하여 실수부와 허수부로 분리 전개하면

$$|T'| \cos \phi = \text{ch}\alpha\ell \text{cose}\beta\ell + (M/m) (\alpha\ell \text{sh}\alpha\ell \cos\beta\ell - \beta\ell \text{ch}\alpha\ell \sin\beta\ell) \quad (12.1)$$

$$-|T'| \sin \phi = \text{sh}\alpha\ell \sin\beta\ell + (M/m) (\alpha\ell \text{ch}\alpha\ell \sin\beta\ell - \beta\ell \text{sh}\alpha\ell \cos\beta\ell) \quad (12.2)$$

여기서  $\text{ch}$ 는  $\cosh$ ,  $\text{sh}$ 는  $\sinh$ 이다.

결론적으로 구하고자 하는 복소 모듈러스는 측정된 전달 함수 값 ( $|T'|$ ,  $\phi$ )을 식(12.1), (12.2)에 대입하여 Newton-Raphson방법에 의해  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 구한다

따라서 앞에서 구한  $\alpha$ ,  $\beta$ 를 식(11)에 대입하여 저장계수  $E_d$ 와 손실 계수  $\eta$ 를 구한다.

$$E_d = \rho \left( \frac{\omega}{\beta} \right)^2 \frac{1-d^2}{(1+d^2)^2} \quad (13.1)$$

$$\eta = \frac{2d}{1-d^2} \quad (13.2)$$

여기서  $d = \frac{\alpha}{\beta}$ 이다.

### II-2. 측면 운동 (Lateral motion)의 보상<sup>12)</sup>

앞절 (II-1)에서 구한  $E_d$ 와  $\eta$ 는 측면 운동에 의한 영향을 무시한 결과이므로 측면운동에 의한 보상을 해주어야 된다. 그러므로 식(1)의 파동 방정식을 수정하면

$$E' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\nu^* r_g)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right] \quad (14)$$

여기서  $\nu^*$  = Complex Poisson's ratio

$$= \nu_d(1 + j\eta_\nu)$$

$r_g$  = 시편의 축방향에 대한 회전반경 (Radius of Gyration) 이며

- 원통형 시편 일때 :  $r_g = a / 2\sqrt{2}$  ( $a$  : 직경)
- 정사각 기둥 일때 :  $r_g = b / \sqrt{6}$  ( $b$  : 한변의 길이)이다.

$\eta_\nu = 0$ 이라고 가정 할 때

$$E_d = E_d' \left[ 1 + 4\pi^2 \nu_d^2 \left( \frac{r_g}{\lambda_f} \right)^2 (1 - \eta_\nu^2) \right] \quad (15.1)$$

$$\eta_E = \eta' / \left[ 1 + 4\pi^2 \nu_d^2 \left( \frac{r_g}{\lambda_f} \right)^2 (1 - \eta_\nu^2 - 2\eta_\nu / \eta) \right] \quad (15.2)$$

여기서  $E_d'$  : 측면운동을 고려하지 않고 구한 저장 계수

$\eta'$  : 측면운동을 고려하지 않고 구한 손실 계수

$E_d$ 는 실저장 계수,  $\eta$ 는 실손실 계수

$$\lambda_f = \frac{1}{f} \left( \frac{E_d'}{\rho} \right)^{1/2} \quad (15.3)$$

따라서 식(15)에 의하여 실제의 저장계수  $E_d$ 와 손실 계수  $\eta$ 를 구한다.

### III. 실험 및 결과 분석

#### III-1. 실험 방법

복소수 모듈러스를 구하기 위한 실험장치도는 Fig. 2와 같다. 실험때의 온도는 25°C, 비교실험을 행하기 위해 감쇄가 큰 재질 PU를, 작은재질로 Acetal 을 사용하였고, 이의 중간특성을 갖는 재질로 MC Nylon을 사용하였다. 실험시편의 질량, 직경 및 길이는 Table 1.에 나타나 있다.

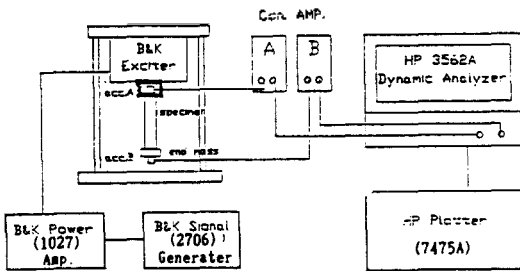


Fig. 2. Block diagram for Complex Young's Modulus Measurements

Table 1. Mass, density, diameter and length of specimen

	mass (g)	density (g/cm <sup>3</sup> )	diameter (mm)	length (mm)
PU	12.6	1.337	10.8	120
Acetal	9.04	1.410	8	120
MC Nylon	12.14	1.115	10.75	120

시편의 한쪽끝에는 부가질량을 부착시켰고, 나머지 한쪽끝은 작은 차구(stir-up)를 사용하여 가속도계를 가진기(Exciter)에 고정하였다. 가진기는 B & K 신호 발생기(Signal Generator)에 의해 정현파 가진을 시키고, 측정된 전달 함수는 HP Dynamic Analyzer로 10KHz까지 관찰하였다. 또한 시편의 전달 함수를 구하기 전에 실험에 사용되는 두 가속도계 사이의 위상 오차를 조사해 보면, 거의 20KHz까지는 관찰하였다. 또한 시편의 전달 함수를 구하기 전에 실험에 사용되는 두 가속도계 사이의 위상 오차를 조사해 보면, 거의 20KHz까지는 위상의 왜곡 없이

사용할 수 있음을 알 수 있다.(Fig. 3)

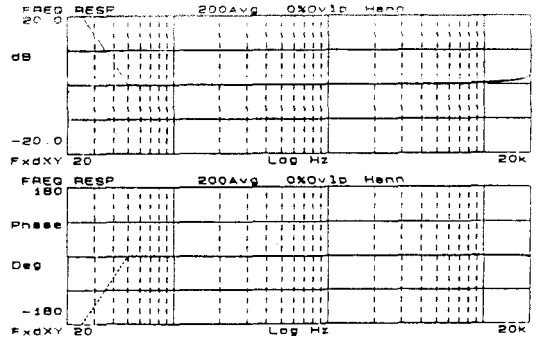


Fig. 3. Transfer Function of two Accelerometers in measurement system.

측정된 전달함수의 진폭과 위상 데이터를 대입하여 오차를 최소화 하는 복소수 모듈러스를 구하였다. 복소수 모듈러스를 구하는 과정에서 측정된 전달함수의 복소수 모듈러스의 함수로 표현되는 이문직 전달함수의 차를 최소화하는 과정에서 Newton Raphson Method를 사용, 그 오차를  $10^{-9} \sim 10^{-11}$ 까지 감소시켰다.

#### III-2. 결과 분석

실험의 일반적인 경향은 저장계수 및 손실 계수가 주파수의 증가에 따라 증가하는 경향을 보였다.

측정주파수 범위는 50Hz에서 10KHz였으며, Fig. 4와 5은 시편이 PU인 경우의 전달 함수와 주파수에 따른 저장 계수 및 손실 계수의 변화를 나타내고 있다.

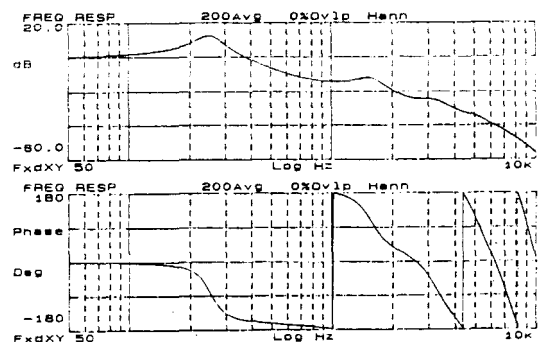


Fig. 4. Transfer Function of PU

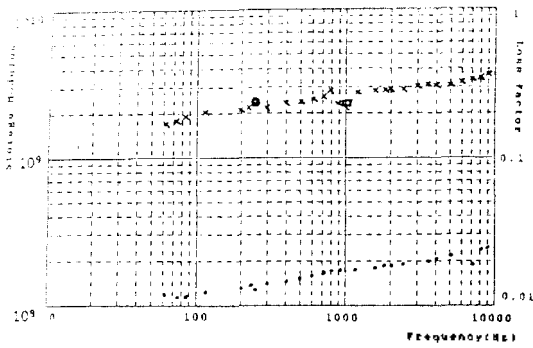


Fig. 5. Complex Young's Modulus of PU  
 (♦ : storage modulus, x : loss factor)  
 (○ : loss factor by 3dB down point)  
 (□ : Other result,  $\rho=1.16 \text{ g/cm}^3$ ,  $T=10^\circ\text{C}$ ,  $f=1 \text{ KHz}$ )

또한 공진 주파수(237Hz)에서 계산된 손실 계수값(0.228)을 3dB down point에 의해 구해진 손실 계수값(0.254)과 비교해 보면 거의 유사한 결과를 얻을 수 있었다.

또한 밀도  $1.16 \text{ g/cm}^3$  인 상용 PU를 사용하고 온도  $10^\circ\text{C}$ , 주파수 1KHz에서의 타 실험결과와의 손실 계수값을 비교해 보면 본 연구의 결과(0.229)와 유사한 값(0.24)을 나타내고 있다.<sup>14)</sup>

Fig. 6와 7은 시편이 Acetal인 경우의 전달 함수와 주파수에 따른 저장계수 및 손실계수의 변화를 나타내고 있다. 공진주파수(1010Hz)에서 계산된 손실계수값(0.0209)과 3dB down point에 의해 얻은값(0.0194)과 유사한 결과를 얻었다.

Fig. 8은 시편이 MC Nylon인 경우의 주파수에 따른 저장 계수 및 손실 계수의 변화를 나타내고 있다. 공진 주파수(1194Hz)에서 계산된 손실 계수값(0.061)과 3dB down point에 의해 얻은값(0.0582)과 유사한 결과를 얻을 수 있었다.

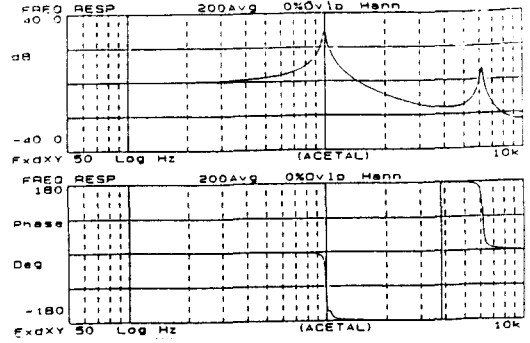


Fig. 6. Transfer Function of Acetal

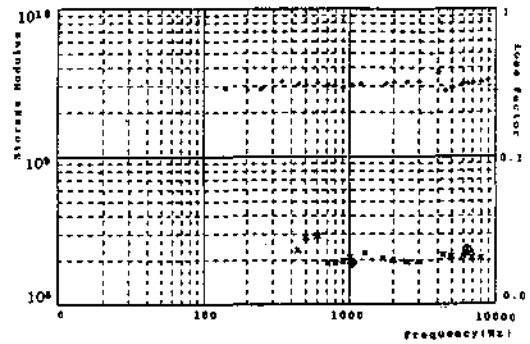


Fig. 7. Complex Young's Modulus of Acetal  
 (♦ : storage modulus, x : loss factor)  
 (○ : loss factor by 3dB down point)

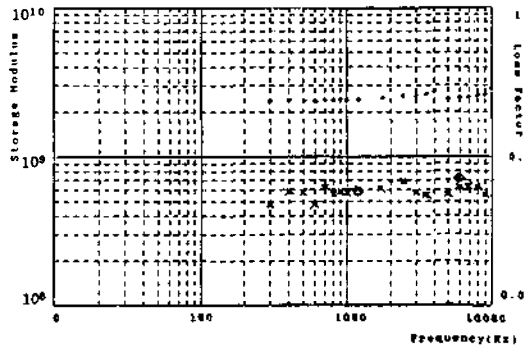


Fig. 8. Complex Young's Modulus of MC Nylon  
 (♦ : storage modulus, x : loss factor)  
 (○ : loss factor by 3dB down point)

Table 2. Complex Young's Modulus of Experimental specimens

material	Storage Modulus (N/m²)	Loss factor	R.F. (1st) & L.F.	R.F. (2nd) & L.F.
PU	$1.181 \times 10^8 \sim 2.6 \times 10^8$	0.163 ~ 0.365	248 (Hz) (0.254)	—
MC Nylon	$2.438 \times 10^8 \sim 2.94 \times 10^9$	0.0488 ~ 0.07	1194 (Hz) (0.0582)	6710 (Hz) (0.075)
Acetal	$2.88 \times 10^8 \sim 3.684 \times 10^9$	0.0116 ~ 0.0328	1010 (Hz) (0.0194)	6300 (Hz) (0.0252)

Table 2은 각 시편의 저장 계수 및 손실 계수의 변화 구간을 나타낸다

계수로 오차를 보정하여 타실험과 유사한 결과를 얻었다.

### IV. 결 론

### 참 고 문 헌

본 연구에서 TFM을 PC, MC Nylon 및 Acetal 에 적용하여 복소수 모듈러스를 구한결과, 아래의 결론을 얻을 수 있었다.

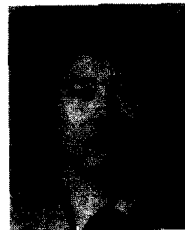
1. PRITZ, T. Transfer Function Method for Investigating the Complex Modulus of Acoustic Materials : spring like specimen, Jour. of Sound and Vibration 72(3), 1980, pp.317-341.
2. PRITZ, T. Transfer Function Method for Investigating the Complex Modulus of Acoustic Materials : Rod like specimen, Jour. of Sound and Vibration 81(3), 1982, pp.359-376
3. J.C. SNOWDON, Vibration and shock in Damped Mechanical Systems, John Wiley and Sons, 1968, pp. 134~138.
4. Rodger N. Capps, Dynamic Young's moduli of some commercially available polyurethanes, JASA 73(6), 1983, pp.2000-2005.
5. A.E. Semple, Improvements to the Transfer Function Method for Determining the Complex Dynamic Modulus of polymer Composites, Applied Research Laboratory, No 85-138, 1985, pp.1-20.
6. PRITZ, T. Apparent Complex Young's Modulus of A Longitudinally Vibrating Viscoelastic Rod, Jour. of Sound and Vibration 77(1), 1981, pp.93-100.

- 1) 손실계수가 0.1보다 큰 시편의 복소수 모듈러스는 측정된 전달함수의 오차기 작으므로 특성치 불 용이하게 구할 수 있다.
- 2) 손실계수가 0.1보다 작은 시편은 저주파에서 위상 지연의 측정오차가 크고 이로 인한 손실 계수의 오차도 크므로 가속도계 및 시편부착이 선고하여야 한다.
- 3) 측정하한 주파수 범위의 확장 및 끝단효과를 줄이기 위해  $M/m$ 의 비를 적당히 조절해야 한다.
- 4) 하한 주파수 측정범위는 복소수 모듈러스의 오차를 10%로 하였을때 첫 공진주파수의 0.2~0.5배 정도이다.
- 5) 상한 주파수 측정범위는 시편의 측면운동에 의한 제한을 받으며, Love 이론<sup>6)</sup> 의한 형상

▲김 인 수(비회원) 1965년 11월 17일생  
 1988년 2월 : 한양대학교  
 기계공학과 졸업  
 (공학사)  
 1990년 2월 : 한양대학교 공과  
 대학원  
 정밀기계공학과 졸업  
 (공학석사)

▲이 효 칸(정회원) 1956년 9월 19일생  
 1979년 2월 : 서울대학교  
 원자핵공학과 졸업  
 (공학사)  
 1988년 2월 : 한국과학기술원  
 기계공학과 졸업  
 (공학석사)  
 1979년 3월~현재 : 국방과학연  
 구소  
 선임연구원

1990년 3월~현재 : 국방과학연구소  
연구원



▲김 경 회(정회원)



1944년 3월 1일생  
1971년 2월 : 서울대학교  
물리학과 졸업  
1976년 5월~현재 :  
국방과학연구소  
연구실장