

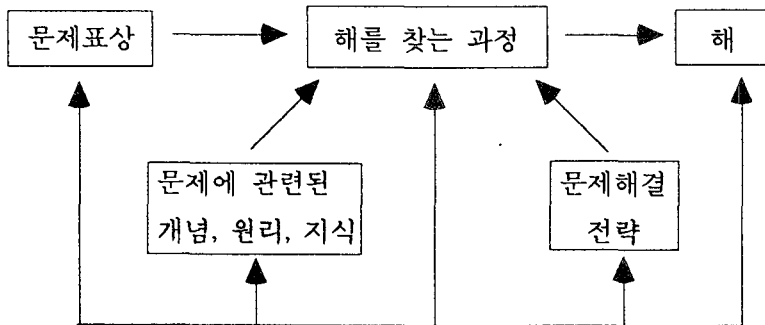
문제표상과 효율적인 문장제 지도방안 연구

양 순열 (교육부 교육방송편성심의관실)

I. 문제 제기

본고에서는 문제를 해결하는 과정, 인지과학적 입장에서 보는 문장제 (word problem) 문제 해결 지도를 위한 이론적 패러다임을 탐색, 정리해 보고자 한다.

문제 (problem)란 현재 주어진 문제상황 (what it is)과 해 (solution)의 상태와의 격차 (gab)로 보는 입장이다 (Mayer 1983, 김 동식 1990). 그러므로 문제해결 (problem solving)이란 그 해의 상태를 찾기위한 방법을 적용해서 해 (solution)에 이르는 과정으로 설명될 수 있다. 이때 주어진 문제가 무엇인지 (what it is)를 이해하는 과정은 Polya의 4단계 이론에서도 시사하고 있는 바와 같이 매우 중요한 과정이라고 할 수 있다. 그러나 최근 인공지능이론가들과 수학교육자들 사이에서는 이를 문제표상 (problem representation for understanding)이라는 새로운 분야로 발전시키고 있다. 문제의 올바른 이해 (Solver's problem definition)의 바탕위에 solving에서는 올바른 (correct) 문제해결의 행로 (paths)를 찾기위한 문제해결전략 (problem solving strategy)이 이 과정에서 핵심적 역할을 한다 (Gagné 1985, 김 동식 1990).



초인지 (meta cognition)

[그림 1] 문제해결학습의 패러다임.

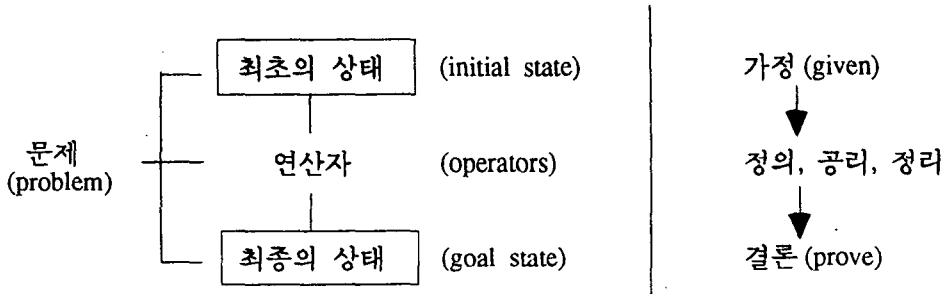
이런 논의에서 잠재적으로 시사하는 문제해결학습의 패러다임은 [그림 1] 과 같다. 이런 입장은 수학교육학자들 사이에서 굉장히 설득력있게 제안되고 있다. 이와같은 맥락에서 본고에서는 문제해결을 위한 표상의 개념, 그리고 표상이 수학과와 교수-학습에서 어떻게 적용가능한지를 살펴보고자 한다.

II. 표상

표상 과정 (representation process) 과 문제 이해 (problem understanding)

모든 지식들은 궁극적으로 우리의 중추신경조직의 어느 부위에서 화학적 및 전기적 활동의 형태로 기록되어 있으리라는 것이 일반적인 생각이다. 이와같이 어떤 지식이 인간의 기억 구조에 기록되는 것을 지식의 표상이라고 보는 것이다.

표상에 대한 논의는 Newell 과 Simon (1972) 의 정보처리모형 (Information processing model) 에서도 잘 제시되고 있다.



[그림 2] Newell 과 Simon 의 정보처리 모형

인지심리학자들은 이해 (understanding) 는 문제를 해결하는 사람의 문제에 대한 내면적인 표상과 밀접하게 연결된다고 주장한다. Greeno (1978) 는 '이해' 를 문제에 의해서 주어진 어떤 정보의 표상을 구성하는 과정으로 본다. 그는 또한 문제를 이해한 결과는 이해되어질 문제의 요소들 사이의 관계가 표상된 하나의 구조라고 주장한다. 이러한 문제의 표상은 장기기억 (long term memory) 내에 있는 지식을 활성화하여 주기 때문에 문제해결 활동에 있어서 가장 결정적인 것이 된다. Greeno (1978) 에 따르면 문제 해결자는 기억속에서 주어진 문제를 개념들에 관하여 적절한 표상을 가져야하며 주어진 문제를 어떻게 표상하느냐에 따라 연산자와 전략적 지식 (strategic knowledge) 의 선택을 결정하게 된다고 하였다. 이러한 표상에 대한 중요성은 여러학자들 (Gagné (1985), Pdy (1957), Anderson (1985)) 에 의해서도 강조되어 왔으며 여러가지 실험과 검정이 시도되고 있다.

표상의 개념을 명확히 하기 위해서 표상의 내용, 표현양식, 표상매체라는 개념을 중심으로

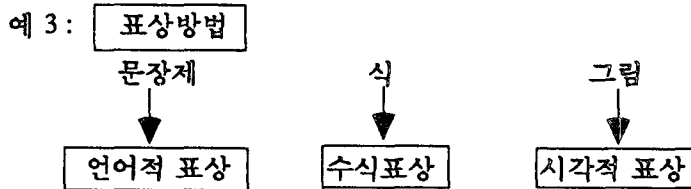
살펴보자(라 동진, 1984).

예 1 :	동물이라는 개념표상	표현양식
	닭	한글
	hen, cock	영어
	닭의 그림	그림
	Morse 부호	부호

예 2 : 표현양식의 유용성

구 : 공의모양 연상, $4/3\pi r^3$ (체적계산)

문제는 조건과 과정과 목표에 관련되는 정보를 가지고 있다. 그러므로 문제해결에서 최초의 기본적인 단계는 기호적이거나 도식적인 형태로 정보를 표상하여야 한다. 즉 기호적 형태는 단어, 문자, 수, 수학적기호, 기호논리학의 기호 등으로 표상하는 것에 관계되며 도식적 형태는 선분, 각도, 도형, 직선 (vector), 행렬, 함수의 표시, 그래프 등과 같이 정보를 여러가지 방법으로 표상이 가능하고 그 표상방법에 따라 문제해결이 쉬워지기도 하고 어렵게 되기도 한다.



표상과 문제 해결

아동들이 문장제를 해결하려는 데는 어떤 어려움이 있을까? Mayer (1983) 는 문장제를 해결하기 위해서는 다음과 같은 지식을 필요로 한다고 주장한다.

- 언어적 지식 : 문장 독해를 할 수 있는 단어에 대한 지식
- 어의적 지식 : 수학적 사실에 대한 지식
- 도식적 지식 : 문제의 형태나 구조에 대한 지식
- 절차적 지식 : 연산을 순서적으로 수행할 수 있는 지식
- 전략적 지식 : 문제해결을 위하여 여러 형태의 유용한 지식을 어떻게 활용할까에 대한 기술

한편 Riley 등은 문제해결에 필요한 세 가지 형태의 지식을 가정하였다. 첫째, 문제속의 집합들간의 다양한 구조를 이해하기 위한 문제도식, 둘째, 문제해결에 관여되는 행위(action)에 관한 지식인 행위도식, 셋째, 문제해결을 계획하기 위해 필요한 전략적 지식이다. 아동이 문장제 해결에서 실패하는 것은 그들이 문제해결 과정의 한 요소인 행위도식이 부족한 것에 기인하는 것이 아니라 문제이해에 필요한 문제도식의 결여에 기인한다는 선행연구 결과(Dean 1981, Markman 1973, Trabasso 1978, Hudson 1980)를 Riley의 이론은 기본 가정으로 하고 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 문장제에서는 언어적 지식과 아울러 수학적 사실에 대한 지식도 매우 필요함을 알 수 있다.

그러면 이와 같은 지식이 우리의 기억속에 어떻게 저장되어 있는가를 살펴보자. 우리들이 가지고 있는 모든 지적 기능들은 기억속에 저장된 지식과 어떤 식으로든 관련되어 있다고 보는 것이다. 우리의 기억속에 있는 지식들은 일정한 체계를 갖추고 조직화되어 있을 것이라고 인지심리학자들은 가정하고 그 조직의 법칙을 발견하고자 한다. 즉 지식의 구조는 우리가 어떤 사물을 알아보고 기억하고 문제를 해결하는데 절대적인 영향을 미친다. 기억의 과정은 크게 어떤 정보가 주어지면 그것을 인입(encoding)하는 단계, 그것을 저장하고 다시 인출(retrieval)해서 사용하는 단계로 구분할 수 있다. 인입, 저장, 인출의 세 가지 과정이 비교적 뚜렷하게 구분되는 독립적 과정인 것처럼 보이지만 사실은 명백하게 구분되지 않는다. 여기에서는 이런 구분에 따르지 않고 이 세 과정이 거의 복합적으로 작용한다고 생각되는 새로운 지식의 표상과정이다. 인지발달 이론에 의하면 인지구조는 우리의 기억속에 들어있는 일반적 지식들을 표상하기 위한 구조이다. 기억속에 표상된 지식이 구조화되어 있다고 보는 것이다. 이러한 지식의 구조에 대한 연구중에서 가장 기초적인 것은 여러가지 개념을 표상하는 개개 단어들의 의미가 어떻게 조직되어 있는가 하는 것이다. 좀 더 나아가면 이러한 개념들이 하나의 명제를 구성하기 위해 어떻게 연결되느냐 하느냐 하는 것이 문제가 될 것이며 최종적인 단계에서는 명제와 명제의 연결이 문제가 될 것이다.

Kintsch(1985) 등이 제시한 모델은 지식구조와 문제표상 및 문제해결 과정에서 이 지식구조를 사용하기 위한 일군의 전략들을 포함하였다. 문제표상은 집합과 집합간의 관계를 나타내는 글기반(text base)으로부터 이루어지며 다른 하나는 글기반으로부터 문제 관련 정보를 포함하는 문제모델과 일치되는 추상적인 형태의 문제표상을 통해 이루어진다. 이해전략(comprehension strategy)은 문제표상을 가능케하는 전략으로 이 전략에는 집합구성전략(make-set strategy), 변화집합전략(transfer set strategy), 차이집합전략(difference set strategy), 상위집합전략(super set strategy)이 있다.

Kintsch 등은 문제의 표상과 해결에 사용되는 세 가지의 지식구조를 제안하였다.

첫째, 문장을 명제로 전환하는 과정에서 사용되는 명제적틀이다.

둘째, 집합의 특징과 관계에 관한 도식이다.

셋째, 셈하기와 수학적 연산을 나타내 주는 도식이다.

그는 다양한 형태의 덧셈, 뺄셈 문장제 해결에서 나타나는 상이한 수준의 곤란도를 아동이 각 문제를 해결하기 위해 단기기억 (short-term memory) 에 보유해야 할 명제의 수 및 기억 부담률의 측면에서 분석하고 있다. 즉 문제가 복잡하여 마지막 질문이 제시되는 순간까지 아동이 기억속에 보유해야 할 양이 많아서 기억 부담이 커지는 문제와 문제를 잘 이해하기 위해서 추론해야 할 정보가 많은 문제들의 성공률은 그렇지 않은 문제들에 비해 비교적 저조하게 된다고 주장하였다.

III. TAPS (Training Arithmetic Problem-solving Skills) 모형

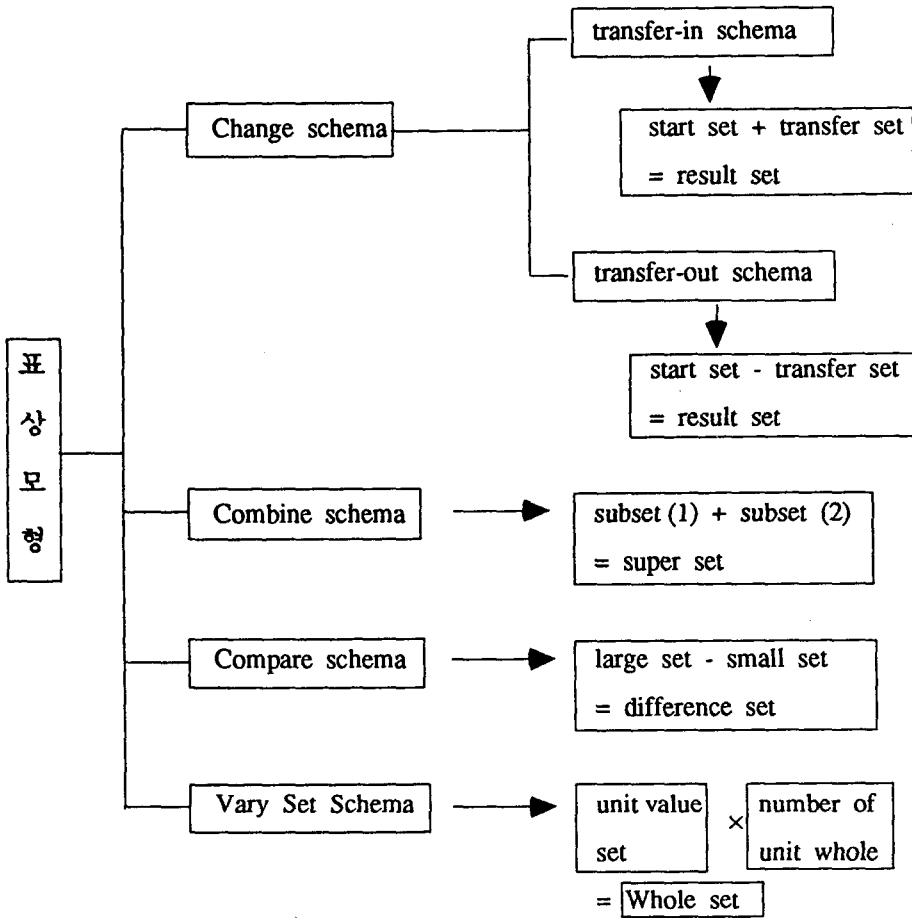
Derry (1987) 는 Greeno 의 표상이론 (1985) 을 발전시켜서 TAPS 모형을 제시했다. 그는 TAPS 에서 국민학생들이 흔히 부딪히는 문장제를 어떻게 표상하는가를 4개의 schema 로 설명하고 있다. 여기서 schema 란 표상의 한 구조를 칭한다. 종전까지의 문제해결 모형은 주로 단일단계모형 (one-relation-model) 에 의존하고 있었다. Kintsch-Greeno (1985) 에 의하면 ;

철수는 15개의 구슬을 갖고 있다. 영희가 철수에게 구슬 3개를 주었다. 철수는 모두 몇 개의 구슬을 갖고 있는가?

이러한 문제에서 문제해결자는 주로 세 가지 종류의 set 로 구성된 표상 (representation relation) 을 하므로서 주어진 문제에서 힌트를 받는데 이 예에서 본다면 하나의 change schema 로 표상을 한다. 즉,

- start set : 철수가 처음에 갖고 있던 15개의 구슬
- a transfer in set : 영희가 준 구슬 3개
- a result set : transfer 가 된 후에 합쳐진 구슬의 수

이것이 종래의 대표적인 단일단계 모형이다. 그런데 TAPS 에서는 Set 란 Schema 의 표상 단위 (representation unit) 를 사용하여 단일단계 모형을 확장하여 제시하였다.



TAPS에서는 이와 같은 표상구조이론에 터하여 복잡하고 어려운 문장제를 전문가로부터 문제해결 전략 사용과정 뿐 아니라 표상방법을 알아내기 위하여 talk aloud method에 의한 protocol analysis를 하여 컴퓨터 교수 프로그램을 개발하였다. TAPS는 본래 인공지능공학을 활용하여 복잡한 문장제를 가르치기 위한 훈련 프로그램이다. 이 프로그램의 몇 가지 특징을 살펴보면 첫째로 문제해결 전략을 충분히 이용하고 있다. 이를 테면 문제목표탐색(goal seeking behavior)을 어떻게 계열화 시키느냐에 따라 문제해결 활동을 기술하고 있고 그 다음에 수단-성과분석(Means-ends Analysis) 즉 하나의 문제를 해결 가능한 하위 문제 목표로 분류하는 방법을 활용하고 있다. 두번째 특징으로는 전략적 문제해결계획(strategy planning), checking 그리고 self-monitoring, long-term memory, short-term memory, 상황기억(contextual-memory)을 활용하고 있고, 특징적으로 extented memory를 유효 적절히 활용하고 있는 점이다. 문제해결에 있어서 핵심이 되는 것을 학습자로 하여금 diagram으로 그리게 해서 표상하게 하던지, 또는 단순화된 학습자 나름대로 말로 기술하게 해서 학습자들이 문제의 표상을

도록 하였다.

IV. 문장제와 연관된 선행연구 고찰

문장제의 유형

Carpenter 와 Moser (1982) 는 선행연구들을 종합하여 이제까지 연구된 문장제의 분류 방식 다음과 같이 구분하고 있다.

첫번째의 분류방식은 구문, 어휘수준, 문제를 구성하는 단어수의 측면으로 분류하는 것이 (Jerman 1973). 두번째의 분류방식은 문장제가 표상되는 순서에 따른 수식의 유형에 의해 류하는 것이다 (Lindvall 1980, Rosenthal 1974). 세번째의 분류방식은 문장제의 의미구조에 한 분류로서 다른 말로는 문제의 구조에 의한 분류라고 할 수 있다 (Nesher 1977, Verganaud 82). 서로 다른 의미구조의 문장제가 동일한 형태의 수식으로 표현될 수 있다는 점에서 볼 문장제의 의미구조에 의한 분류방식이 수식의 유형에 의한 분류방식보다 아동의 문장제에 한 개념적 이해와 문제해결 과정에 대한 절차적 지식을 밝혀 주는데 있어서 더욱 바람직한 것으로 간주된다. 문장제의 의미구조에 의한 분류방식을 취했던 선행 연구들이 사용한 명칭을 종합적으로 제시하면 다음과 같다.

<표 1> 문장제의 의미구조에 의한 분류방식

의미구조	특 성	예	선행연구
결 합 (combine)	두 집합의 통합된 관계를 포함	3명의 소년과 4명의 소녀가 있다. 모두 몇 명인가?	결합: Greeno (1980) Riley (1981)
변 화 (change)	원래의 상태에서부터 최종상태를 산출하기 위해 원래의 상태에서 증가 또는 감소	철수는 6개의 바둑알 중 2개를 잃어버렸다. 남은 것은?	변화: Greeno (1980) 첨가또는 분리: Carpenter 와 Moser
비 교 (compare)	두 집합간의 차이	철수는 6개 영희는 4개의 연필을 갖고 있다. 누가 몇 개를 더 갖고 있는가?	비교 (compare): Greeno (1980) Carpenter 와 Moser (1981)

표상과 관련된 선행 실험연구

Quintero (1983) 는 two-step 문장제에서 아동들의 문제 표상 방법을 분석하였는데 아동들의 주된 오류는 주어진 문제에서 기술되어진 주요 개념과 그 관계를 제대로 표상하지 못하는 데 기인한다고 밝혔다.

한편, De Corte (1984) 등은 국민학교 1, 2 학년 173 명에게 change schema, combine schema, compare schema 에 의해서 표상해야 되는 문제를 주고 한 집단은 그대로 풀게하고 다른 집단은 Rewording 해서 문제를 표상하고 풀게 하였더니 Rewording 한 집단이 성취도가 높았다. 복잡한 대수 문제에서 오류의 원인을 Greeno (1985) 는 구조적인 정보의 역할로 보았다. 즉, 표상구조로 보는 것인데 문제해결자가 그 문제의 계수, 변인, 용어, 연산 등의 구조의 특징을 알아야 한다고 하였다. 예를 들어, $3x(5y - 2y) + 27z$ 에서 계수, 변수, +, -, 연산 이와 같은 것들을 재조직 (parsing) 할 수 있는 지식이 오류의 관건이 되고있다고 보았다.

Lochhead (1985) 의 다른 실증적인 연구에서 살펴보면 문제가 주어졌을 때 표상구조의 subset 를 잘못 해석하는 것이 문제해결 오류의 근본 원인이 된다고 한다. 즉 오류는 양적인 관계를 제대로 표상하지 못하는 것으로 나타났다. 아울러 Freeman (1985) 은 정형문제 (canonical problem) 에서 비정형문제 (noncanonical problem) 로 지도의 과정을 거쳐야 한다고 주장하였다.

이상의 실증적 연구들을 종합해보면 문장제에서 기술되어진 개념과 그 관계들의 표상이 교수 학습 과정에서 강조되어야함을 알 수 있다. 아울러서 문제에 주어진 단어들의 연결관계를 수학적 문장으로 번역하는 일과 도식적 지식 (schema knowledge) 이 매우 중요함을 알 수 있다.

V. 제 언

표상에 대한 연구는 인지심리학 분야에서 많이 소개되어 있으나 우리나라 수학교육 분야에 있어서는 아직 그 태동기라 할 수 있다. 특히 인지심리학자들이 유아나 국민학교 저학년의 문장제에 대한 연구가 매우 활발하나 수학교육 분야에서 표상구조에 의한 연구는 아직 미흡하다고 할 수 있다. 더우기 복잡한 의미적 구조를 포함하는 문제에 대한 표상형태는 어떠한고, 또 그것이 문제해결에 어떠한 의미를 부여하는지 정교한 실험 연구와 검정이 뒤따라야 할 것이다. 그리고 이러한 표상구조 이론에 기초한 문장제 지도방법과 아울러 교수과정, 자료개발 등이 이루어져야 할 것이다.

참고 문헌

1. 김 동식, 1990, Causal Analysis of Problem Solving Performance, The Florida State University, College of Education, 박사학위 논문.
2. 고 종걸, 1989, 의미적 구조의 표상이 문제해결에 미치는 영향, 한국교원대학교 석사 학위논문.
3. 라 동진, 1984, 교육심리학, 서울 : 배영사.
4. 전 평국, 문제해결의 의미와 지도 방향, 제 11 회 초등수학연구회 세미나집.
5. _____, 수학적 사고와 문제해결, 제 13 회 초등수학연구회 세미나집.
6. 한국교육개발원, 1985, 수학과 문제해결력 향상을 위한 수업방법 개선 연구, RR 85-9 서울 : 한국교육개발원.
7. 현 주, 1990, 아동의 산수문장제 해결능력 발달에 관한 연구, 이화여자대학교 박사 학위논문.
8. Anderson, J. R., 1985, Cognitive Psychology and Its Implications (2nd ed), New York : W. H. Freeman and Company.
9. Carpenter, T. P. & Moser., 1985, The Representation of Basic Addition and Subtraction Word Problems, Paper Presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, Illinois.
10. De corte, Erik : The Influence of Rewording Verbal Problems on Children's Problem Representation and Solutions, Paper Presented at the Annual Meeting of the American Education (68th, Neworleans, LA, April 23-27, 1984).
11. Freeman, Ruth H. : Text Structure and Reading Comprehension : The Development of Five Structure Models and Issues in Comprehension of Expository Prose, Information Analyses (1987).
12. Gagné, E. D., 1985, The Cognitive Psychology of School Learning, Boston : Little, Brown and Company.
13. Greeno, J. G., 1978, Understanding Procedural Knowledge in Mathematics Instruction, Educational Psychologist, 12, 262-283.
14. Greeno, J. G., Investigations of a Cognitive Skill, Pittsburgh Univ. Pa Learning Research and Development Center, Reports-research.
15. Kintsch, Greeno, J. G., 1985, Understanding and Solving Arithmetic Word Problems, Psychological Review, 9, 109-129.
16. Lochhead, Jack : Representation of Mathematical Relationships in Four Countries : A

- Study of College Students Mathematical Fluency. EXXON Education Foundation, New York : Reports-research. (1985, 1).
17. Mayer, R. E., 1983, Thinking Problem Solving, San Francisco : Freeman.
 18. Newell, A. & Simon, A., 1972, Human Problem Solving, Englewood Cliffs NJ : Prentice-Hall.
 19. Polya, G., 1957, How to Solve It (2nd ed.), New York : Doubleday.
[한글 번역판 : 우 정호 역, 어떻게 문제를 풀것인가, 서울 : 천재교육, 1985]
 20. Quintero, The Role of Conceptual Understanding in Solving Word Problem : Two Step Problems, Paper Presented at the Meeting of the Educational Research Association (Montreal, Canada, April, 1983).
 21. Riley, M. S. Greeno, & J. G. Heller, T. I., Development of Children's Problem Solving Ability in Arithmetic, In H. Ginberg (Ed), The Development of Mathematical Thinking, NY. Academic Press, 153-196.
 22. Sharon, J. Derry., A Theory for Remediation Problem-solving Skills of Older Children and Adults, Educational Psychologist, 22 (1), 55-87.
 23. Wickelgren, 1974, How to Solve Problems, W. H. Freeman and Company.