한국수학교육학회지 <수학교육>
1991. 12. 제 30 권 제 3 호 47-69

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1991 : Vol. 30, No. 3 47-69

기하교육과 Van Hiele 이론

한 태 식 (육군사관학교)

I. 서 론

1. 수학의 본질

일반적으로 수학을 계산, 문제풀이, 작도, 또는 증명의 학문정도로 이해하는 경향이 있다. 물론 이것이 그릇된 생각이라고 할 수는 없으나, 수학을 이런 것만을 다루는 학문이라고 한다면 실로 대단히 잘못된 설명이다. 그렇다고는 하지만 대부분의 사람들에게는 국민학교부터 중.고등학교, 대학을 거치면서 수학을 계산이나 증명 이상의 중대한 의미가 있는 것으로 배울 기회가 거의 없었던 것도 사실이다. 오늘날 우리가 배우고 익히는 수학은 결코 계산이나 증명만을 다루는 한정된 성격의 학문은 아닌 것이다. 그러면, 수학의 본질은 무엇인가?

첫째, 수학은 관념적 대상을 다루는 학문이다. 수학은 실제로 존재하는 물리적 대상을 직접적으로 다루지는 않는다. 오히려 수학의 대상이 되는 것은 물리적 대상이 아닌 우리의 마음에 존재하는 모든 관념적 대상인 것이다. 예를 들면, 복소수 체계는 실수의 체계를 확장시킨 관념적인 것이다. 그러나 수학은 물리적 세계와도 밀접한 관계를 가지고 있다. 자연수는 물리적 세계의 대상을 일대일 대응이라는 동치관계에 의하여

분할한 동치류 전체의 집합으로 관념화한 것이다. 따라서, 수학을 이해하기 위해서는 서로 다른 두 개의 세계(물리적 세계와 내면적 세계)의 상호작용을 이해하는 것이 필요하다. 내면적 세계는 더욱 다양하며 추상적이고 창조적이다. 수학은 자연과학이나 사회과학은 물론이고 철학, 사상, 예술등과도 깊은 관계를 가지며, 인류 문화사에 깊은 뿌리를 내리고 있는 학문인 것이다.

둘째, 수학은 추상적인 학문이다. 수학은 그 학문의 체계가 특수하고도 추상적인 요소로 이루어져 있으며, 그 내용은 특수한 체계를 나타내는 명확한 기호에 의하여 논리적으로 구성된 추상적 개념의 체계이다. 여기서 추상이란 개념은 여러 가지 많은 아이디어 중에서 공통되는 속성만을 빼낸 것을 말한다. 프랑스의 수학자 Dieudonne의 주장과 같이 수학의 본질은 추상적인 개념을 창조하여 그에 의해 추론하는 힘에 있으며, 이를 수학적 방법에 따라서 학생의 사고를 정돈하여 명석한 정신과 엄밀한 판단력을 개발하는데 있다. Dieudonne는 대수적 사고의 점진적인 추상화 과정을 다음과 같이 설명하고 있다. 대수적 사고의 발달 과정은 사고 대상의 불확정성과 그 조작 규칙의 중요성에 대한 자각 과정이었다. 오랜 역사적 발달 과정을 거치면서, 산술의 두 가지 기본적인 요소는 조작되는 대상과 조작 규칙으로 되어 있으며 후자가 본질적이라는 사실을 점차 인식하게 되어 산술 조작의 규칙을 추상화하기에 이르렀다. 이와 같이 기계적인 것으로만 여겨지고 있는 간단한 산술적 규칙도 수학적 추상화임을 이해한다면 수학의 추상적 개념은 한층 명백해 질 것이다.

셋째, 수학은 창조적인 학문이다. 수학은 논리적인 학문체계를 창조하여 왔으며 그 학습을 통하여 논리적인 사고와 다양한 창의력을 길러주고 있다. 유클리드의 기하학 원론은 인류가 최초로 창조한 이론적인 학문체계로 인식되고 있으며, 학문적 서술의 본보기가 되어왔다. 우리가 상용하는 십진 기수법도 수학의 창조물이다. 인간에게 수의 개념이 생긴 이래 대부분의 수는 기호로 나타내게 되었으며 이것을 사용하여 계산하는 방법은 어려서부터 익히게 되었다. 또한 국민학교와 중.고등학교, 대학을 거치면서 수 많은 수학적 창조물의 학습을 통하여 수학적 사고의 폭을 넓히게 된다. 다양한 기호법을 대규모로 사용하는 미분적분학의 창조는 시간과 공간, 무한과 연속, 힘과 운동등에 관한 여러가지 문제의 해결을 가능하게 하였으며, 세계관, 우주관의 전환을 초래하였다. 미분적분학의 창조와 발전은 과학 기술의 발전과 그 맥을 같이하며 수학과 과학 기술은 불가분의 관계에 있지만, 과학자나 공학자 가운데는 수학을 단지 과학 기술의 수단으로밖에 여기지 않는 사람도 있는 것 같다.

확률론을 기초로 하는 통계학도 수학의 창조물이며, 오늘날에는 이 통계학이 자연과학은 물론 사회과학에도 지대한 본질적 영향을 미치고 있는 것은 이미 널리 알려진 사실이다. OR, 컴퓨터 과학 등도 수학적 창조물이나, 이들의 중요성이나 유용성에 대해서는 재삼 거론할 필요가 없을 것 같다. 오늘날과 같이 과학 기술의 연구에 수학을 많이 이용하려는 시도는 가히 인류가 창조한 혁명적인 발상이라 하겠다. 수학적 창조는 오늘날에도 왕성히 진행되고 있으며 앞으로도 계속될 것이다.

수학은 인간의 정상적인 창조물로서는 가장 유용하고 매력적인 지식체계인 것이다. 즉, 수학은 우리의 마음속에 존재하는 모든 관념적 대상을 다루는 추상적인 도구로서 인간 사회의 여러 분야에서 인간의 사고를 도우며, 인간이 직면하는 여러 가지 어려운 문제들을 해결할 수 있는 능력을 길러주는 창조적인 학문이다.

2. 수학교육의 필요성

수학은 왜 가르치는가?

첫째, 수학교육은 지적 활동을 강화시킨다. 수학은 일찌기 그리스 시대에 이데아의 세계를 이해하는 영혼의 눈을 뜨게 하는 정신의 도야재로 여겨진 이래 서구 엘리트 교육에서 절대적 우위를 점해 왔으며, 이러한 플라톤적인 전통은 Pestalozzi 이래로 국민 교육적 차원으로 발전되어 수학교육의 이념이 되고 있다. 수학이 단순히 실용적인 수단으로서 가르쳐지거나 배우는 데 이용된다면 정리, 공식, 원리 등을 외워서 철저하게 응용되는 문제를 놓고 반복하는 연습을 하기만 하면 된다. 그러나, 그리스 시대부터 강조했듯이 수학교육은 정신적 훈련을 강화시킴으로서 높은 수준의 지적활동 단계에 이르도록 하는 역할을 담당하고 있는 것이다.

둘째, 수학교육은 수학의 유용성을 인식시킨다. 사회가 과학화되고 산업화됨에 따라 수학은 사람들에게 그 유용성을 인식시켜 주고있다. 산업활동에는 각가지 계산이 뒤따르게 되었으며 항해, 측량술에는 삼각법이 필요하게 되었다. 일찌기 Napoleon 은

황제가 된 이후에도 수학의 유용성을 인식하고 "수학의 신장은 국력에 비례한다."는 신념으로 푸리에, 몽즈, 뽕슬레 등의 위대한 수학자들을 후원하고 측근에서 일하게 하여 프랑스의 과학 발전을 도모하였으며 강대국으로 성장하는 기틀을 다져 나갔다. 미국 해군의 Nimitz 제독도 2차 세계대전이 끝난후 "미국 장병들이 수학의 유용성을 좀더 인식하였더라면 전쟁은 좀더 빨리 끝날 수 있었을 것이다."라고 술회하고 있다. 그 후에도 수학의 유용성을 절실히 인식하지 못한 결과로 강대국 미국은 인공위성 최초 발사의 영광을 소련에게 넘겨 주는 뼈아픈 결과를 감수하게 되었다.

셋째, 수학교육은 심미안을 길러준다. 수학을 배우는 또 하나의 이유는 수학이 아름다움을 만들어내기 때문이다. 영국의 수학자 Hardy는 "수학자들이 만들어낸 패턴은 시인들의 작품과 같이 아름답다. 시인들이 단어를 이용하여 아름다운 시를 만드는 것처럼 수학자들은 수학적인 아이디어를 잘 조화시켜 아름다운 작품을 만들어 낸다."고 하면서 수학의 아름다움을 수학을 배우는 첫째의 이유로 들고 있다. Hardy가 강조하고 있는점은 수학에서만 볼 수 있는 추상화된 아이디어들의 아름다움이며 "$\sqrt{2}$ 는 무리수이다." , "소수는 무한개 있다."등의 명제 증명의 아름다움을 예로 들고 있으나, 눈송이의 모양이 육모꼴이고 벌집 모양이 육각기둥이라든지 그리스 시대 건축물에서 많이 사용한 황금분할의 아이디어 등의 현상적인 아름다움도 첨가할 수 있겠다.

3. 기하교육의 중요성

Euclid 기하는 수학은 물론 학문의 전형으로서 그리스 이래 수학 교육의 근간을 이루어 왔으며, 역사적으로 수학 교육의 개선 노력 역시 기하 교육을 중심으로 하여 이루어져 왔다고 하여도 과언이 아닐 것이다. Platon 의 <대화편> 가운데 하나인 'Menon 편' 에 예시되어 있는 Socrates 의 산파법의 소재는 기하이며, 18 세기에 중등학교 수학 교과서로서 '발생적 원리' 에 입각하여 전개된 최초의 수학 교과서도 기하 교과서이다. 또한 Perry 를 선구자로 하여 전개된 20 세기 초의 수학 교육 근대화 운동의 이념 역시 Euclid 기하 교육의 개선을 주된 내용으로 하고 있으며, 1950 년대 이후의 소위 새수학 운동이 대수학적인 구조적 접근을 골간으로 하고있기는 하지만, "Euclid must go!" 란 슬로건으로 유명한 Dieudonne 의 '학교수학의 신사고'와 그에 대한 Thom 의 반론, 그리고 그 이후의 수학 교육의 사조는 Euclid기하 교육의 중요성을 새롭게 인식하게 해준 계기가 되었다.

오늘날의 기하 교육은, 삼각형의 합동 조건 등을 바탕으로 한 전통적인 Euclid 기하학적인 접근과 Klein 이래 강조되어 온 변환 기하학적 접근, 그리고 현대적인 선형대수학적 접근 등이 복잡하게 얽혀 그 개선 방향이 매우 혼미스러운 상황에 놓여있다. 그러나 Euclid 기하의 교육적 가치는 변하지 않고있다. 기하학적 직관은 현대수학의 모든 분야에 편재하고 수학의 각 분야에는 기하학적인 혼이 깊숙히 스며있으며 기하학적 사고는 현대의 수학적 사고를 지배하고 있다. Klein의 다음과 같은 말은 그 이유를

함축적으로 잘 묘사해 주고 있다. "개념 없는 직관은 공허하며, 직관 없는 개념은 맹목이다." 또한 "Euclid 기하는 수학적 사고 방법의 전형이며, 공리적 방법은 기하에서 비롯되어 수학을 지배하고 있다." Thom이 지적하고 있듯이, 일상적인 사고로부터 형식화된 연역적 사고로 전환되는 수학의 역사 발생적 과정은 Euclid 기하학적 사고를 통해 자연스럽게 발달하였다. 개인의 수학 학습에 있어서도 기하학적 언어는 일상 언어의 형식적인 수학적 언어 사이에서 빠뜨릴 수 없는 자연스러운 중간 과정이며, 인간의 이성적 활동의 정상적인 발달 과정에서 생략할 수 없는 단계이다. 문제는 이와같이 중요한 기하 교육을 어떻게 성공적으로 하느냐 하는 것이다.

II. 본 론

1. Van Hiele 이론

기하 영역의 인지 발달에 관한 Van Hiele 이론은 30 여년전 네델란드의 부부 수학 교사 Dina Van Hiele 과 Pierre Van Hiele 이 1957년 Utrecht 대학에 제출한 학위논문에서 그 골격이 제시된 이래 주로 P. Van Hiele 에 의해 개발되어 온 이론이다. 이 이론은 1960 년대에 소련 수학교육자들의 집중적인 연구와 실험을 통해 그 타당성이 인정되었으며 기하 교육과정에 적용되어 성공적인 결과를 얻고 있다. 미국에서는 1970 년대 후반에 이르러서야 이 이론이 소개되었고, 최근 그 가치가 새롭게 인식되면서 이

와 관련된 다양한 연구가 이루어지고 있다.

Van Hiele 부부는 자신들이 가르쳤던 학생들이 기하학습에 큰 곤란을 겪고 있음에 주목하고 그 원인을 분석한 결과 자신들과 학생들 사이의 사고수준의 차이를 주시하게 되었다. 그들이 통찰한 것은 학문의 연구대상이 사고수준에 따라 전혀 다르다는 사실이며, 따라서 서로 다른 수준에서 생각하고 있는 교사와 학생은 서로 다른 문맥에서 말하게 되어 서로를 이해할 수 없다는 것이다. 즉, 학생들이 기하학습에서 어려움을 겪는 이유는 그들의 사고수준 보다 높은 수준에서 가르쳐지기 때문이라고 가정하였던 것이다. Van Hiele은 학생들의 기하에 대한 사고 수준 (인지 발달단계)을 다음과 같이 구분하였다.

수준 1 (시각적 인식 수준) : 도형을 그 구성 요소에 대한 명확한 고려없이 전체로서 시각적 외관에 의해 판별한다. 이 수준의 학생은 도형의 성질이나 도형 사이의 관계를 알지 못하며 주변의 대상을 단지 모양이라는 수단에 의해 파악하기 때문에, 정사각형 직사각형등의 도형을 인지하면서도 직사각형은 정사각형과는 전혀 다른것으로 인식 한다.

수준 2 (도형의 분석적 수준) : 주변 대상의 정리 수단이던 모양 (도형) 이 연구의 대상이 되어 도형의 구성요소와 성질에 대한 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악한다. 학생은 도형을 형식적으로 정의할 수는 없지만 경험에 의해 도형의 성질을 기술할 수 있고, 이렇게 얻어진 성질들을 수단으로 도형을 파악한다. 그러나 아직 도형의 성

질들을 관련 지우지는 못한다. 즉, 직사각형과 평행사변형 모두 대변의 길이가 서로 같다는 것을 알지만 "직사각형은 평행사변형이다"라는 결론을 내리지는 못한다.

수준 3 (이론적 배열 수준) : 도형의 성질과 도형 사이의 관계가 연구의 대상이 되어 도형의 여러가지 성질 및 관계를 파악하고 정의를 이해 한다. 도형과 그 성질들 사이의 논리적인 관계가 정의를 통해 확립되지만 아직 연역의 완전한 의미를 알지못하며 공리의 역할이나 명제들 사이의 논리적 관계를 이해하지도 못한다. 즉 간단한 연역은 가능하지만 아직 증명은 이해되지 않는다. 예를 들면, 정사각형과 직사각형의 정의를 이해하며 "정사각형은 직사각형이다" 라는 결론을 내릴 수 있다.

수준 4 (연역적 추론 수준) : 명제가 연구의 대상이 되며 명제들 사이의 논리적관계를 통하여 공리, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하며 기하의 연역 체계를 파악한다. 또한 이 수준에 이른 학생도 기하학적인 사고의 전개와 형성의 수단인 연역의 의미를 이해하며, 생소한 정의로부터도 연역적인 사고를 할 수 있다. 예를 들면, "두 쌍의 대변이 서로 평행인 사각형은 평행사변형이다" 라는 정의를 기초로 평행사변형의 성질을 추론할 수 있을 뿐 아니라, "한 쌍의 대변이 평행이고 그 길이가 같은 사각형은 평행사변형이다" 라는 또 다른 정의를 토대로도 평행사변형의 성질을 연역해 낼 수 있다.

수준 5 (기하학의 엄밀화 수준) : 기하학의 체제 그 자체가 연구의 대상이 되어 여러가지 공리 체계를 비교할 수 있다. 이 수준의 학생은 구체적인 대상(도형)이 없어도 이론을 전개해 나갈 수 있을 정도로 사물에 대한 추상화가 발달되어 있다. 형식적인

엄밀성과 고도의 추상 능력으로 특징 지워지는 이 수준의 학생들은 비유클리드 기하를 이해할 수 있다.

학교 기하교육을 통하여 수준 5에 도달하는 학생은 거의 없으며, 이 수준의 측정또한 거의 불가능한 것으로 알려져 있다 (Usiskin, 1982). 일반적으로 중, 고등학교 기하교육의 목표는 학생들이 수준4에 도달하게 하는 것, 즉 증명의 의미를 이해할 수 있도록 하는 것이라고 할 수 있다.

Van Hiele 이론에 의하면 하위 수준을 통과하지 않고 상위 수준에 이를 수는 없으며 모든 학생이 같은 속도로 각 수준을 통과하는 것도 아니다. 또한 수준의 발달은 교재나 교사의 지도에 의해 촉진될 수도 지연될 수도 있으며, 서로 다른 수준의 사람은 서로를 이해할 수 없다. 이 이론의 핵심은 학생들의 발달단계(수준)에 맞는 기하교육 과정과 교재 구성의 요구이다. 즉, 학생들이 기하 (특히 증명)에서 실패하는 가장 큰 이유는 아직 하위 수준에 있는 학생들에게 형식적인 증명 (수준4의 내용)을 가르치기 때문이며, 기하 교육은 학생의 수준 향상에 중점을 두어야 한다는 것이다.

2. Van Hiele 이론의 수학교육학적 의미

Dewey (1933)는 "지식을 모으고 발견하고 창안하는 능동적인 과정은 단순한 지적활동의 산물인 지식의 기록을 수용하는 것과 구별되어야 한다."고 하였고, Bruner(1978) 역시 "어떤 교과를 가르치는 것은 그 교과에 대한 살아 있는 도서관을 만들어 내려는

것이 아니라 스스로 수학적으로 사고하고 역사가가 하듯이 사건을 다루며 지식을 획득하는 과정에 참여하도록 하려는 것이다." 고 하여 과정으로서의 교육의 중요성을 강조하였다. 이러한 바탕 위에 현대 수학 교육의 주 관심은 '사고 교육'이 되고 있다. 수학이 기성의 지식 체계로서가 아닌 학습자의 구성적 활동 및 재발견과정이 되어야 한다는 것은 이미 현대 수학교육의 흐름이자 곧 목표가 되었다.

이러한 목표를 실현하기 위해 지금까지 제시되어온 주목할 만한 이론 중의 하나는 Piaget의 조작적 구성주의 이론이다. Piaget 에 의하면 수학적 사고 활동의 본질은 조작적 schemes이며 이는 행동이나 보다 낮은 차원의 조작에서 반영적 추상화를 통해 질적인 수준의 비약을 반복하면서 재구성된다는 것이다. 이러한 측면에서 보면 수학적 사고 교육은 n-1 수준의 조작적 schemes 이 n 수준의 조작적 schemes 으로 재구성되어 가면서 n-1 수준의 조작이 n 수준의 대상이 되는 나선적 과정이 되풀이 되어야 하며, 결국 과정적 목표를 강조하는 수학의 학습 및 지도는 제수준의 수학화 곧 국소적 조직화의 형태가 되어야 하는 것이다. (우정호, 1985)

또한 활동주의 수학교육자의 한 사람인 Freudental 은 소위 교수학적 현상학을 제기하고 있다. 교수학적 현상학의 핵심은 '현상'과 '본질'이다. 여기서 본질이란 수학적 개념, 수학적 구조등 수학의 연구 대상을 말한다. 인간은 기하학적 도형에 의해서 모양이란 현상의 세계에 질서를 창조하며, 수에 의해서 양의 세계에 질서를 창조한다. 보다 높은 수준에서 인간은 기하학적 작도와 증명에 의해서 기하학적 도형이란 현상에

질서를 창조한다. 또한 십진법에 의하여 자연수라는 현상에 질서를 창조하며 더 나아가 광범한 추상화에 의해 서로 닮은 수학적 현상이 군, 체 등의 개념으로 파악된다. 이와같이 하여 인간은 수학을 발전시켜 간다는 것이다. 여기서 주목할 것은 본질과 현상과의 관계가 절대적이 아닌 상대적이라는 것, 즉 어떤 수준에서 본질이던 것이 그보다 고차의 수준에서는 현상으로 파악된다는 것이다 (우정호, 1984).

Van Hiele 이론은 이러한 조작적 구성주의 및 활동주의 수학과 그 맥을 같이하고 있다. 이 이론에 있어 수학적 사고 활동이란 경험의 세계를 조직화하는 활동이다. 즉, 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 인식되고 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 그 다음 수준으로 비약하는 과정을 반복하는 것이다. 따라서 수학의 학습 및 지도는 이러한 사이클이 형성되도록 하여야 한다는 것이고, 이것이 바로 Van Hiele 이론의 기본적인 아이디어이다.

Van Hiele 은 수학적 사고가 시각적 수준 → 기술적 수준 → 이론적 수준 → 연역체계를 파악하는 수준 → 논리 법칙을 통찰하는 엄밀화 수준으로 발달된다고 하고, 모든 수학 영역에 자신의 이론이 적용된다고 주장하며 수, 함수등의 학습수준을 거론하고 있다 (Van Hiele, 1986 ; Hoffer, 1983). 이러한 Van Hiele 이론을 요약하여 도식화하면 다음과 같다.

Van Hiele 이론의 도식화

단 계	수 준	기 하 이 론	
		대 상	정 리 수 단
1	시각적 수준	주변 사물	도 형
2	기술적 수준	도 형	도형의 성질
3	이론적 수준	도형의 성질	명 제
4	연역적 수준	명 제	명제의 논리적 관계
5	엄밀화 수준	명제의 논리적 관계	추 상 화

3. Van Hiele 이론에 관련된 연구

소련에서는 1960년대에 실험연구를 통하여 Van Hiele 이론의 타당성을 검증하였으며 이 연구를 바탕으로 국민학교 1~4학년의 기하 교육과정을 개발하였다. 이 새로운 교육과정은 1학년에서 수준 1, 2~3학년에서 수준 2에 도달하는 것을 목표로 하며, 수준 3의 기하학적 사고에 대한 학습은 4학년에서 시작하게 되어 있는데, 이는 전통적인 소련 교육과정의 6년 과정과 대등한 것이다. 이 과정의 학습으로 달성한 8학년 학생들의 수준은 전통적인 과정에 따라 학습한 11학년 학생들이 달성한 수준과 비교할 만한 것이라고 하며 Wirszup (1976)은 이를 "거의 1세기 동안의 러시아 수학 교육에서의 가장 획기적인 변화" 라고 지적하고 있다.

Usiskin (1982)의 Chicago Project는 Van Hiele 이론의 각 수준별 행동 양식을 발췌, 분석하여 학생들의 수준을 평가할 수 있는 구체적인 문항을 개발하였다. 이 연구에서는 기하 과정을 시작할 때와 과정이 끝날 무렵에 학생들의 Van Hiele 수준과 기하학적 지식의 성취도를 측정한 결과 다음과 같은 결론을 얻고 있다. 1) 학생들의 과정 시작 및 끝 무렵의 Van Hiele 수준은 기대해던 것보다 낮았으며, 2) 기하 지식의 성취도는 Van Hiele 수준과 관계가 깊었고, 3) 2/3 의 학생은 기하 과정을 통해서 Van Hiele 수준이 1~2 상승했으나 나머지 1/3 의 학생은 그렇지 못했다. 이 연구는 학생들이 기하에서 실패하는 이유를 Van Hiele 이론으로 설명할 수 있다는 것과 고등학교 기하 과정 (10 학년)이 시작되기 전에 체계적인 기하 교육이 이루어져야 한다는 점을 강조하고 있다.

24 명의 대학생을 대상으로 한 Mayberry (1983)의 연구도 Van Hiele 수준 체계의 타당성을 확인하고 있다. 이 연구에 의하면 중, 고등학교의 효과적인 기하교육을 위해서는 기하과정이 시작되기전에 하위의 수준에 해당하는 개념이 먼저 설정되어야 한다는 것이다.

Chicago Project 와 같은 맥락에서 Senk (1985)는 1,520 명의 고등학생을 대상으로 한 연구에서 기하교육을 받은 30 % 정도의 학생이 증명을 전혀 하지 못하며 40 % 의 학생은 약간의 증명능력이 있고, 30 % 의 학생에게만 증명 능력이 있다는 것을 밝히고 있다. 이 연구도 Van Hiele 수준과 증명능력 및 기하 성취도 사이에는 양의 상관 관계

가 있음을 보여주고 있다.

Brooklyn Project (Fuys & Geddes, 1984)는 초, 중등학교 기하 교재를 심도 있게 분석하고 있다. 이 연구의 결과는 교재가 학생들의 Van Hiele 수준 향상에 별 도움을 주지 못하게 구성되어 있다고 밝히고 학생들의 수준을 향상시키기 위한 지도 모델을 제시하고 있다.

Hoffer (1981)는 증명에 못지 않게 중요시 되어야 할 기하의 기본적인 기능이 있다고 주장하고 이를 다섯가지로 구분하고 있다. 시각적 기능, 언어적 기능, 작도기능, 논리적 기능, 적용 기능이 그것인데 Hoffer는 Van Hiele 이론의 각 수준에서 요구되는 이들 기능의 수준을 설정하고 있다. Oregon Project (Burger & Shaughnessy, 1986)는 이러한 Hoffer의 논리를 바탕으로 진행된 연구이다. 이 연구는 대부분의 학교에서 기하가 수준 4에서 지도되지만 대다수의 학생들은 수준 2에서 사고하고 있다고 밝히고 형식적인 공리체계를 가르치기 전에 수준 2와 수준 3에 해당하는 내용이 포함되도록 기하 교과과정을 재편성해야 한다고 제안하고 있다.

한태식 (1986)의 연구는 Van Hiele 이론과 일치하는 기하과정을 이수한 학생들과 전통적인 기하과정을 이수한 학생들의 Van Hiele 수준과 증명능력을 비교하였다. 결과는 두 집단 사이의 Van Hiele 수준과 증명능력에는 차이가 없는 것으로 나타났으나, Van Hiele 이론 자체의 타당성은 다른 연구들의 결과와 일치하고 있었다. 특히, 대상 학생들이 1 년의 기하 과정을 이수하면서 과목에 대한 흥미 정도가 전반적으로 감소하고

있음을 지적하고 있다.

최현호 (1989)의 연구는 우리나라에서 기하의 증명이 도입되는 중학교 2학년 학생과 논증 기하의 전 과정을 마친 고등학교 학생들의 Van Hiele 수준을 비교하고 각 수준에 따른 증명 능력을 살펴보고 있다. 연구 결과를 요약하면 중학교 2학년 학생에게 증명을 도입하는 것은 무리이며 고등학교 1학년 학생들 역시 아직은 완전히 증명을 이해하고 있지는 않다는 것이다. 또한 Van Hiele 수준이 높을수록 대체로 증명 능력이 있음을 확인하고 있으나, 수준 4에 이르러야만 형식적인 증명을 스스로 할 수 있다는 사실을 확인할 수는 없었다.

최혜정 (1989)의 연구 결과도 최현호의 연구 결과와 유사하나, 최혜정은 교과서의 기하 단원을 심층 분석하여 현행 중학교 수학 교과서 중 몇몇 단원은 Van Hiele 이론과 일치하지 않고 있음을 지적하고 있다.

이상의 연구 결과들은 학생들의 기하학적 인지발달 과정을 설명하고 있는 Van Hiele 이론이 유용하다는 것을 지지하고 있다. 또한 학생들의 Van Hiele 수준과 증명능력은 기대 했던 것보다 훨씬 낮고, Van Hiele 수준과 증명능력과의 상관관계는 상당히 높다. 따라서 초, 중등학교의 기하 학습 지도는 Van Hiele 이론에 바탕을 둔 교수-학습 체제가 되어야 한다고 주장하고 있다.

참고적으로 미국의 학생들과 우리나라 학생들을 대상으로 한 몇가지 연구의 결과를 비교해 보면 다음 표와 같다. 이 표에서 Fitter란 Van Hiele 이론을 적용할 수 있었

던 학생을 말한다.

대표적 연구결과 비교표

나 라	미 국		한 국		비 고
연 구 자	Usiskin	Han	최 현 호	최 혜 정	
Fitters (%)	92	83	86	82	4/5 기준
Level 3 (%)	29	40	55	52	"
Level 4 (%)	6	9	6	8	"
Level 3,4(%)	35	49	61	60	"

* Level 측정을 위한 5문항중 4문항 이상의 정답을 기준으로 하였음.

III. 결 론

1. 연구 결과의 시사점

Van Hiele 의 수학 학습 수준 이론, 특히 기하의 학습 수준에 대한 이론은 기하학적 사고의 발생적 단계에 대한 깊은 통찰을 바탕으로 전개된 이론으로, 국소적 수학화를 통한 Euclid 기하의 학습 지도를 시도한 이론이다. 특히 사고 수준의 차이가 학습지도

를 어렵게 만드는 요인이라는 점에 주목하고 수학적 사고 수준을 시각적 수준, 기술적 수준, 국소적인 논리적인 관계를 파악하는 이론적 수준, 형식적인 연역체계를 파악하는 수준, 논리적 법칙의 본질을 통찰하는 수준으로 구분하고 있음은 매우 흥미로운 점이다. 이 이론은 앞에서 지적한 Euclid 기하의 중요성에 비추어, 그리고 발생적 원리의 구현을 통한 수학적 사고 교육이란 점에 비추어, 앞으로 기하교육 개선에 크게 기여할 잠재적 가치를 지닌 이론으로 세계적인 관심의 대상이 되고 있으며, 이와 관련된 많은 연구가 이루어지고 있다. 특히 소련에서는 이 이론에 대한 실증적 연구는 물론 기하 교육 과정의 구성 원리로 이 이론을 받아들여 교육 과정 개발에 이용하고 있으며, 미국에서도 최근 그 교육적 가치가 인식되어 많은 연구가 이루어지고 있음은 주목해야 할 사실이다.

행동주의에 입각한 교육 연구는 통계적 방법을 통해 심리학적인 교육학적인 원리를 규명해 내려는 시도를 중시하고 있다. 이러한 견지에서, 예를 들어, Piaget 가 주장하고 있는 형식적 조작기가 11 - 12 세에 달성되기는 커녕 대학생들 가운데에도 상당수가 구체적 조작기에 머물고 있다는 이해하기 어려운 연구 결과가 발표되고 있기도하다. 이러한 연구 결과의 차이는 철학의 차이는 물론이고 연구 방법에서 비롯되는 연구 결과의 차이로, 그 심각성을 잘 말해주고 있다고 본다. 이러한 상황은 Van Hiele 의 수학 학습 수준 이론에 대한 연구도 통계적 방법과 함께 임상적 방법을 통한 심층적인 분석 방법을 함께 동원함으로서 보다 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 있을 것임을 강력하

게 시사하고 있다고 생각된다.

2. 제 언

Van Hiele 이론이 아직도 생소한 우리나라 수학 교육계에서도 이 이론의 긍정적인 측면을 수용하고 우리의 실정에 알맞은 다양한 연구가 정착되기를 기대하면서, 몇가지 제언을 덧붙이고자 한다.

우선 Van Hiele 이론에 대한 더욱 심도 깊은 연구가 필요할 것이다. 동구권 지역에서는 이미 이론에 대한 체계적인 연구의 결과를 학교 수학교육에 적응하여 큰 성과를 거둔 바가 있고 최근에는 미국등의 서구 지역에서도 이 이론에 관련된 다양한 연구가 진행되고 있다. 우리나라의 경우에는 우선 학생들의 Van Hiele 수준과 증명능력을 파악하는 기초적인 현장연구와 더불어 이 이론 자체에 대한 세분화된 연구가 필요할 것이다. Van Hiele 이론이 내포할 수 있는 취약점을 감안한 더욱 현실성 있는 연구가 계속 진행되어야 할 것이다.

다음에는 증명을 도입하기 이전에 효과적인 기하교육 프로그램이 개발되어야 할 것이다. 도형에 대한 명확한 인식도 없는 상태에서 학생들에게 증명을 도입하는 것은 무리인 것이다. 증명 도입 이전에 다음과 같은 두 가지의 선행 교육과정이 요구된다. 그 하나는 도형의 성질등 증명할 내용에 대한 이해이며, 다른 하나는 연역적 사고체제에 대한 인식이다. 이러한 준비없이 행하여 지는 증명교육은 공허한 메아리에 불과하다고 할 수 있을 것이다.

마지막으로 기하교육을 효과적으로 수행해 나갈 수 있도록 하기위한 교사교육 프로그램이 병행되어야 할 것이다. 기하 영역의 증명은 그 체계가 연역적이기는 하지만 그 도입에 있어서는 귀납적인 접근이 필요하다. 기하학이 공리를 바탕으로 하는 연역체계인 것은 틀림이 없으나 학생들의 연역 체계 이해에는 많은 어려움이 따를 것이다. 앞서 언급한 연구의 결과가 말해 주듯이 논증 기하의 과정을 모두 마친 학생들중 극소수만이 기하학의 연역체계를 이해할 수 있을 뿐인 것이 현실이다. 교사들도 학생들의 사고수준을 주시하고 도형에 대한 다양한 예를 통하여 기본적인 성질을 철저히 재음미하도록 하여야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. 우정호, Piaget 론의 수학교육에의 적용은 수학적, 교육학적, 심리학적 오류인가? 수학교육, 1984, Vol.22, No.3, pp.1-13.

2. ______, 조작적 수학교육 프로그램, 서울사대논총, 1985, Vol. 31, pp. 161-181.

3. ______, Van Hiele의 수학 학습수준 이론에 대한 소고, 서울사대논총, 1986, Vol. 33, pp. 85-103.

4. 최현호, Van Hiele 기하 인지발달 이론과 증명능력에 관한 기초연구, 연세대학교, 석사학위 논문, 1990.

5. 최혜정, Van Hiele 이론을 통한 기하학의 개념 이해 및 문제풀이 연구, 이화여자 대학교, 석사학위 논문, 1990.

6. Burger, William & Shaugnessy, Michael. Characterizing the Van Hiele levels of development in gometry. Journal for Research in Mathematics Education, 1986, Vol. 17, pp. 31-48.

7. Fuys, David & Geddes, Dorothy. An investigation of Van Hiele levels of thinking in geometry among sixth and ninth graders: Research findings and implications. Paper presented at American Education Research Association,

New Orleans, April, 1984.

8. Han, Tae-Sik. The Effects on achievement and attitude of a standard geometry textbook and a textbook consistent with the Van Hiele theory. Ph.D. Thesis, The University of Iowa, 1986.

9. Hoffer, Alan. Van Hiele - based research. In R. Lesh & M. Landau(Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Academic Press, 1983.

10. Mayberry, JoAnne. The Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. Journal for Research in Mathematics Education, 1983, Vol. 14, pp. 58-69.

11. Piaget, Jean. Comments on mathematical education. In A. G. Howson(Eds.), Developments in mathematical education. London: Cambridge University Press, 1973.

12. Usiskin, Zalman. Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project. Chicago: University of Chicago, 1982.

13. Van Hiele, P. M. Structure and insight: A theory of mathematics education.

Orlando, Florida: Academic Press, 1986.

14. Van Hiele, P. M. & Van Hield - Geldof, D. A method of intuition into geometry at secondary school. In H. Freudental(Ed.), Report on Methods of Intutition into Geometry(No. III). Groningen, Holland: J. B. Wolters, 1958.

15. Wirszup, Izaak. Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. In Space and geometry: Papers from a research workshop. Columbus, Ohio: The Ohio State University, 1976.