

水平角觀測에 있어서 求心誤差가 觀測値에 미치는 影響

The Influence of Eccentric Error in Horizontal Angle Measurement

李 啓 鶴*
Lee Kye-Hak

要 旨

水平角 觀測에 있어서 觀測값에 미치는 影響은 偶然誤差인 視準誤差 및 읽기誤差 뿐만 아니라 求心誤差도 이에 隨伴된다. 따라서 本 研究에서는 위의 誤差中 求心誤差가 觀測값에 미치는 影響을 檢討하기 위하여 求心誤差의 理論式 및 評價式을 誘導하고 이를 利用 實際 試驗觀測을 통하여 考察해 보았다.

本 研究結果 求心誤差는 視準距離, 觀測角, 偏心距離 및 偏心角을 算出되고, 3倍角數로 觀測함이 誤差가 작아 實用的이며, 또한 器械의 性能에 따라 視準距離 및 觀測角을 利用하여 그 評價가 可能하다.

ABSTRACT

The accidental errors of horizontal angles are influenced by sighting, reading and eccentric errors etc.

This paper deals with the influence of eccentric error by the formula of theory and evaluation, and actually testing measurement.

The results show that the eccentric error is calculated through the sighting distance, observed angle, eccentric distance and angle.

And then, three repeating method is of practical use, and also, eccentric error is able to evaluate through the sighting distance and observed angle in according to performance of each instrument.

離 및 偏心角을 算出된다.¹⁾

그러나 實際에 있어서 水平角을 觀測할 경우 視準距離 및 觀測角은 測定이 可能하나, 偏心距離 및 偏心角은 測定이 不可能 하므로 이들의 測定 不可로 말미암아 求心誤差는 偶然誤差로 看做할 수 밖에 없다.

本 研究에서는 첫째, 測點과 器械中心의 不一致로 起起되는 水平角 誤差, 즉 求心平均재 算誤差를 理論的으로 求하고 각 要素에 의한 理論的 求心誤差의 變化現象을 數值에 따라 考察해 보았으며,²⁾

둘째, 우선 測定이 不可能한 偏心距離 및 偏

1. 序 論

從來, 水平角을 觀測할 경우 各種 器械誤差를 除去하여도 觀測값에는 항상 偶然誤差가 따르기 마련이다. 여기서 偶然誤差는 視準誤差 및 읽기誤差가 一般的의이라 볼 수 있다.

특히 測點과 器械中心과의 不一致로 發生하는 求心誤差는 器械誤差와 같은 正誤差라 生覺 할 수 있으며, 이는 視準距離, 觀測角, 偏心距

* 湖南大學校 土木工學科 教授

心角을 각각獨立한 確率變數로 보고 求心誤差의 平均제곱을 나타내는 誘導式을 求한 다음, 從來의 視準 및 읽기 誤差를 考慮한 分散式에 새로운 求心誤差의 影響을 考慮한 偶然誤差式으로 부터 試驗觀測값을 利用하여 最小제곱法으로 視準, 읽기 및 求心誤差의 各種 偶然誤差를 求하고 또한 transit 및 theodolite 등 각器械의 性能에 따라 求心誤差의 評價를 考察하였다.³⁾

2. 求心誤差의 誘導式

(1) 求心誤差의 理論式 誘導

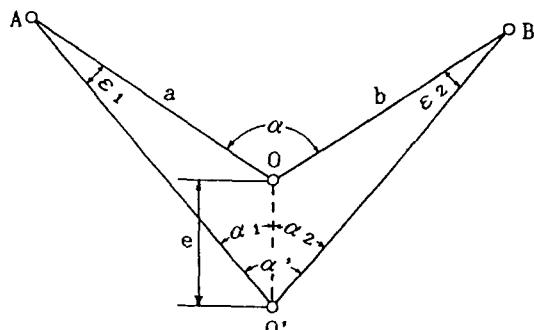


Fig.1 Eccentric Error(1)

Fig. 1에서 O點에 器械를 setting 하여 두 視準點 A, B를 視準하여 α 를 觀測해야 할 것을 偏心距離 e 만큼 떨어진 O'點에 setting하여 α' 를 觀測했다고 假定하면 水平角誤差(求心誤差)는^{4),5)}

$$\epsilon = \alpha - \alpha' = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (1)$$

가 된다.

測點 O에서 A, B 두 視準點까지의 距離를 각각 a, b라 하면 $\triangle AOO'$, $\triangle BOO'$ 에서

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \rho \frac{e}{a} \sin \alpha_1 \\ \epsilon_2 &= \rho \frac{e}{b} \sin \alpha_2 = \rho \frac{e}{b} \sin (\alpha' - \alpha_1) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

가 된다.

式(1)에 式(2)를 代入하면 다음 式을 얻는다.

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \rho e \left[\frac{\sin \alpha_1}{a} + \frac{\sin \alpha_2}{b} \right] \quad (3)$$

여기서 ϵ 은 α_1 , α_2 가 90° 일 때 最大이며 특히 $a=b$ 이면 다음 式으로 表示할 수 있다.

$$\epsilon = \rho \frac{2e}{a} \quad (4)$$

따라서 求心誤差 ϵ 은 偏心距離 e 에 比例하고 視準距離 a 에 反比例하므로, 특히 視準點까지의 距離가 가까운 測角의 경우에는 올바르게 求心시키지 않으면 안된다.

式(5)에서 $a/b=K$ 로 놓으면 다음 式과 같아 된다.

$$\epsilon = \frac{\rho e}{a} \left[\sin \alpha_1 + K \cdot \sin (\alpha' - \alpha_1) \right] \quad (5)$$

이때 O'點의 位置는 測點 O의 周圍에 半徑 e 인 偏心距離로 원주상의 어떤 位置(點)에 있다고 生覺되므로 求心中等誤差 m 은 다음 式으로 表示할 수 있다.^{2),6)}

$$m^2 = \frac{\int_0^{2\pi} \epsilon^2 d\alpha_1}{2\pi} \quad (6)$$

式(5)를 式(6)에 代入하여 이를 O부터 2π 까지 정적분하면

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{\int_0^{2\pi} \epsilon^2 d\alpha_1}{2\pi} = \frac{\rho^2 e^2}{a^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \sin \alpha_1 + K \cdot \sin (\alpha' - \alpha_1) \}^2 d\alpha_1 \\ &= \frac{\rho^2 e^2}{a^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \sin^2 \alpha_1 + 2K \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sin (\alpha' - \alpha_1) + K^2 \cdot \sin^2 (\alpha' - \alpha_1) \} d\alpha_1 \end{aligned} \quad (7)$$

가 되며, 이를 풀어하여 整理하면 다음 式을 얻는다.

$$m^2 = \frac{\rho^2 e^2}{a} \left[\frac{1+K^2}{2} - K \cdot \cos \alpha \right] \quad (8)$$

따라서 偏心距離 e 의 值은 보통 器械를 setting할 때 일어나는 量의 最大값이라 하면 實際 器械中心은 偏心距離 $0 \sim e$ 사이에 있다고 生覺할 수 있으며, 이러한 사항을 考慮하면 다음 式과 같아 된다.²⁾

$$m^2 = \frac{\rho^2 e^2}{3a} \left[\frac{1+K^2}{2} - K \cdot \cos \alpha \right] \quad (9)$$

(2) 各 要素에 의한 理論的 求心誤差의 變化 現象

앞의 式(9)에서 e 의 最大값을 2mm, $\alpha = 120^\circ$ 라 할 때 式(9)로부터 $a=20 \sim 1000$ m, $K=1 \sim 6$ 에서의 求心中等誤差의 值을 구해 보면 Table 1과 같고 이를 圖示하면 Fig. 2와 같다.

Tabel 1 Eccentric Errors by Sighting Distance and K Values

K m(sec) a(m)	1	2	3	4	5	6
20	14.58	22.28	30.36	38.59	46.88	55.22
40	7.29	11.14	15.18	19.29	23.44	27.61
60	4.86	7.43	10.12	12.86	15.63	18.41
80	3.65	5.57	7.59	9.65	11.92	13.80
100	2.91	4.46	6.07	7.72	9.38	11.04
120	2.43	3.71	5.06	6.43	7.81	9.20
140	2.08	3.18	4.34	5.51	6.70	7.89
160	1.82	2.78	3.80	4.82	5.86	6.90
180	1.62	2.48	3.37	4.29	5.21	6.14
200	1.46	2.23	3.04	3.86	4.69	5.52
500	0.58	0.89	1.21	1.54	1.88	2.21
1,000	0.29	0.45	0.61	0.77	0.94	1.10

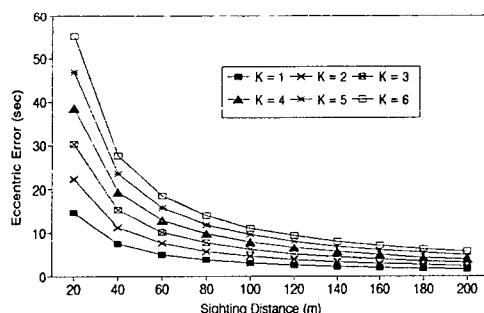


Fig.2 Relationship between Sighting Distance and Eccentric Errors

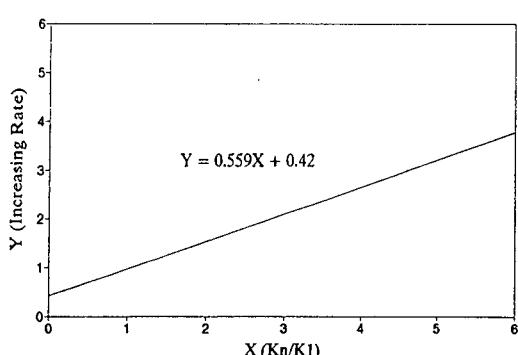


Fig.3 Relationship between $K_n/K_1(X)$ and Increasing Rate(Y) of Eccentric Errors

또한 視準距離 $a=100m$ 에 있어서 (a 가 任意의 距離에도 相關 없음) K_n/K_1 의 比에 對한 求心誤差의 增加率을 計算하여 圖示해 보면 Fig. 3과 같다.

그리고 $a=100m$ 라 할 때 測定角 α 와 K의 變化에 따른 求心中等誤差 m 을 求해보면 Table 2와 같고 이를 圖示하면 다음 Fig. 4와 같다.

Table 2 Variety of Eccentric Errors by Measuring Angles(α) and K Values($a=100m$)

α m(sec) K	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
1	0	0.86	1.68	2.38	2.92	3.26	3.37
2	1.68	2.09	2.92	3.77	4.46	4.90	5.05
3	3.37	3.69	4.46	5.33	6.07	6.57	6.74
4	5.05	5.35	6.07	6.94	7.72	8.24	8.42
5	6.74	7.01	7.72	8.59	9.38	9.92	10.10
6	8.12	8.69	9.38	10.24	11.04	11.59	11.79

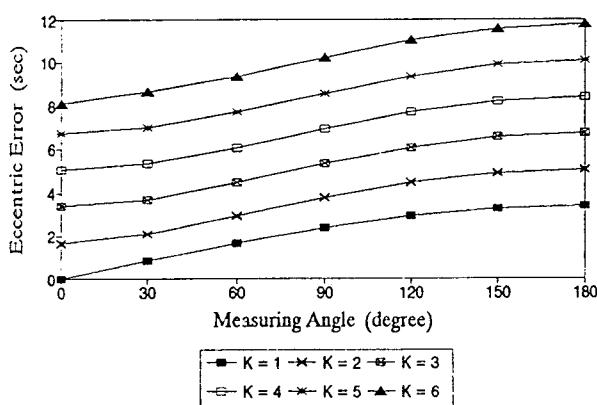


Fig.4 Relationship between Measuring Angle(α) and Eccentric Errors(m)

(3) 求心誤差의 評價式 誘導

Fig. 5에서 求心에 대한 測定中心 O와 器械中心 O'의 불일치 때문에 구하려는 水平角($\angle AOB = \theta$)에 생기는 誤差, 즉 求心誤差를 나타내는 式은 다음 式과 같다.^{3), 7)}

$$\Delta\theta = e \left[-\frac{\sin\phi}{S_1} + \frac{\sin(\phi - \theta')}{S_2} \right] \quad (10)$$

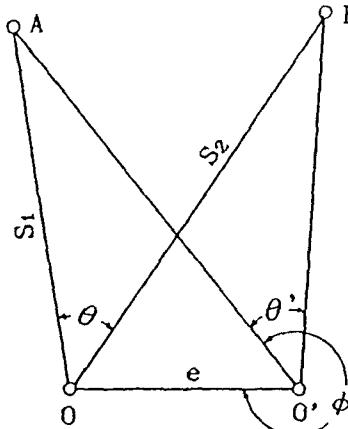


Fig.5 Eccentric Error(2)

여기서, $\Delta\theta$: 求心誤差(radian), e : 偏心距離(m), S_1, S_2 : 視準距離(m), ϕ : 偏心角(器械點으로부터 左側의 視準點에서 右回轉으로 測點까지 之 水平角, $0^\circ \leq \phi < 360^\circ$), θ' : 測定角($0^\circ \leq \theta' < 360^\circ$).

式(10)에서 求心誤差는 e, ϕ, S_1, S_2 및 θ' 에 의하여 變化하며, 이중 e 와 ϕ 는 非測定 값들이다.

지금 e 및 ϕ 를 각각 獨立한 確率變數라 하면, 求心誤差의 平均은 다음 式과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overline{\Delta\theta^2} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \Delta\theta^2 \cdot P(\phi) \cdot P'(e) d\phi de \quad (11)$$

여기서, $P(\phi)$ 및 $P'(e)$ 는 각각 ϕ 및 e 의 確率密度函數를 表示한다.

ϕ 는 그 性質上 一様分布에 따르므로^{7),8)}

$$P(\phi) = \frac{1}{2\pi} [0^\circ \leq \phi < 360^\circ]$$

또, 偏心距離 e 는 항상 (+)이므로 그 分布로써 正規分布의 (+)部分만을 生覺하면,

$$P'(e) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma'} \exp(-e^2/2\sigma'^2) [e \geq 0]$$

단, σ' 는 分布의 形狀을 정하는 parameter로서 σ' 가 작은 값일수록 偏心距離 e 의 分布의 정도가 높다는 것을 의미한다.

한편, 式(10)으로 부터

$$\Delta\theta^2 = e^2 \cdot f(\phi) \quad (12)$$

$$\text{여기서, } f(\phi) = \left[-\frac{\sin\phi}{S_1} + \frac{\sin(\phi - \theta')}{S_2} \right]^2$$

式(12)를 式(11)에 代入하면

$$\overline{\Delta\theta^2} = \int_0^{2\pi} f(\phi) \cdot P(\phi) d\phi \int_0^\infty e^2 \cdot P'(e) de = e^2 \left[\frac{1}{2S_1^2} + \frac{1}{2S_2^2} - \frac{\cos\theta'}{S_1 S_2} \right] \quad (13)$$

그런데

$$\overline{e^2} = \int_0^\infty e^2 P'(e) de = \int_0^\infty e^2 \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma'} \exp(-e^2/2\sigma'^2) de = \sigma'^2 \quad (14)$$

$$\bar{e} = \int_0^\infty e P'(e) de = \int_0^\infty e \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma'} \exp(-e^2/2\sigma'^2) de = 2\sigma'/\sqrt{2\pi} \quad (15)$$

이므로 式(14), (15)로부터 다음 關係가 얻어진다.

$$\sqrt{\overline{e^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \bar{e} \approx 1.25\bar{e} \quad (16)$$

그리고 式(16)을 式(13)에 代入하면 求心誤差는 다음 式(17)과 같이 平均제곱根으로 表示할 수 있다.

$$\sqrt{\overline{\Delta\theta^2}} = \frac{1.25\bar{e}}{2S_1 S_2} \sqrt{2(S_1^2 + S_2^2) - 4S_1 S_2 \cos\theta'} \quad (17)$$

여기서, 偏心距離의 平均值 \bar{e} 는 實驗的 方法에 의해 決定되는 값이다.

지금 視準誤差를 α (정확히 어느 目標를 視準할때의 정도를 標準偏差로 나타낸 값), 읽기오차를 β 로 하고, 倍角法을 利用하여 測定할 때 測定角 w 에 대한 分散 $\sigma_{w,n}^2$ 은一般的으로 다음 式으로 표시된다.^{9),10)}

$$\sigma_{w,n}^2 = \frac{2}{n} (\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n}) \quad (18)$$

또한, 求心誤差는 器械를 움직이지 않는한 倍角數와는 無關하므로 測定값에 대해서 1回만 影響을 미치고, 器械를 움직일 때 偶然性을 띤 變數가 되는 求心誤差 γ 를 考慮해서 測定角에 대한 分散式은 다음과 같이 나타낼 수 있다.^{3),11),12)}

$$\sigma_{w,n}^2 = \frac{2}{n} (\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n}) + \gamma^2 \quad (19)$$

式(19)로부터 算出된 求心誤差 γ 를 平均제곱根誤差와 거의 같다고 하면, 다음과 같이 表

示할 수 있다.

$$\sqrt{\Delta \theta^2} = \frac{1.25\bar{e}}{2S_1 S_2} \sqrt{2(S_1^2 + S_2^2) - 4S_1 S_2 \cos \theta} \\ \approx \gamma \quad (20)$$

따라서, 器械의 求心望遠鏡으로 測點에 求心을 할 경우 測定값에 影響을 미치는 求心誤差는 $\gamma \approx \sqrt{\Delta \theta^2}$ 로 評價할 수 있다.

3. 試驗 觀測

(1) 實測 概要

2點 A, B가 觀測點 O에 미치는 水平角 θ 를 實測할 때 Fig. 6과 같이 視準이 좋은 3點을 택하여 測點을 O, 視準點을 A 및 B라 하고, 各測點에 90x90x500mm의 나무말목을 단단히 박은 다음, 表面에 1.5mm의 十字形 表示를 하여 十字 中心을 求心했으며, 視準點 말목 頂部에는 $\phi 1.5\text{mm}$, 길이 60mm의 transit用調整pin을 垂直으로 세워서 이것을 視準했다.

實測은 Transit 및 Electronic Total Station(Set3)를 사용하였으며, 1991年 4~5月 中 구름낀날을 택하여 倍角法에 의해 다음과 같이 實施하였다.

한번 測點에 setting한 器械(望遠鏡 正)로 倍角數 1부터 6까지 測定을 행하여 各倍角數에 對應하는 値를 읽은 다음, 다시 器械를 setting부터 始作하여 위와 같은 測定을 50회 反復해서 實施하였다.

본 연구에서는 倍角數 3의 測定으로부터 얻

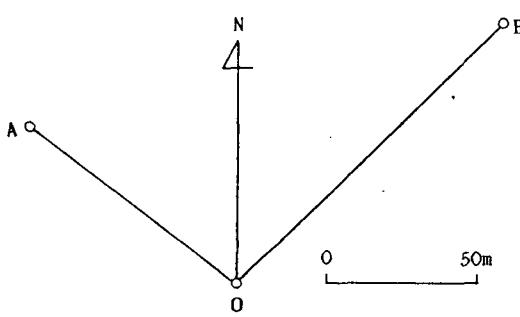


Fig.6 Measuring Station

어지는 $99^\circ 07' 47''$ (θ) 때의 測定값에 대한 偶然誤差; $4.86''$ 및 $1.86''$)를 測定角 θ' 로 하고, 또 Electronic Total Station(Set3)로 測定하여 얻어진 OA, OB의 距離 80.173m 및 120.372m를 각各 視準距離 S_1 과 S_2 로 使用하였다.

(2) 觀測角에 對한 偶然誤差의 變化

測點 O에 있어서 倍角法에 의한 $\angle AOB$ 를 앞에서 언급한 50回의 測定結果로 부터 이 角에 對한 偶然誤差 σ_n 를 倍角數 n ($n=1, 2, 3, \dots, 6$)의 경우에 대해서 求한 結果는 Fig. 7과 같다.

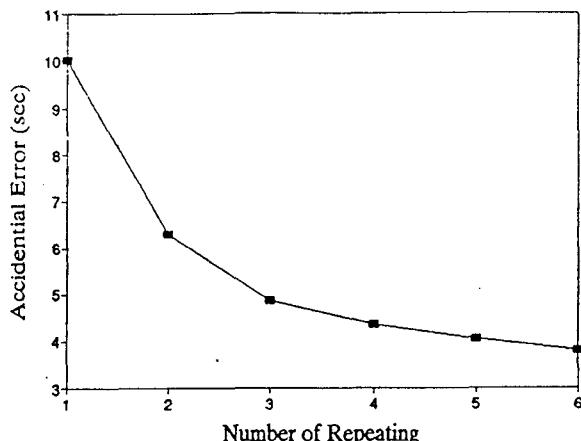


Fig.7 Relationship between Repeating Number(n) and Accidental Error(σ_n)

Fig. 7로부터 다음과 같은 事實을 알 수 있다. 즉 倍角數 n 가 增加함에 따라 觀測角에 對한 偶然誤差는 指數函數의 으로 작게 되며, $n=3$ 에서 그 減少率은 거의 一定하다. 이 事實로 부터 倍角法에 의한 角觀測을 實施할 경우 3倍角을 採用하는 것이 가장 有效하다고 思料된다.^{3), 13), 14)}

(3) \bar{e} 의 決定

앞의 式(19)와 實測에 의하여 얻어진 各倍角數에 對應하는 偶然誤差 $\sigma_{w,n}$ ($n=1, 2, 3, \dots, 6$)의 値으로부터 視準誤差 α , 읽기오차 β 및 求心誤差 γ 의 最確值를 最小제곱法에 의하여

計算한 結果

$\alpha = 3.1''$, $\beta = 6.8''$, $\gamma = 3.6''$ (Transit)
 $\alpha = 1.6''$, $\beta = 1.1''$, $\gamma = 0.6''$ (Electronic Total Stations Set3)

를 얻었다.

算出된 求心誤差($\gamma = 3.6''$, $0.6''$)는 그 平均 제곱根誤差와 거의 같다고 하면, 式(20)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sqrt{\Delta\theta^2} = \frac{0.63\bar{e}}{S_1 S_2} \sqrt{2(S_1^2 + S_2^2) - 4S_1 S_2 \cos\theta'} \approx \gamma = 3.6'', 0.6''$$

윗 式에 $\rho = 206265''$, $S_1 = 80.173m$, $S_2 = 120.372m$, $\theta' = 99^\circ 07' 47''$ 를 代入하여 풀면 $\bar{e} = 0.0012m$, $0.0002m$ 를 얻을 수 있다.

(4) 求心誤差의 評價式

앞의 結果로 부터 求心望遠鏡으로 求心을 할 경우, 測點中心과 器械中心과의 차이, 즉 偏心距離의 平均值는 1.2mm, 0.2mm이며, 測定值에 影響을 미치는 求心誤差는 $\gamma \approx \sqrt{\Delta\theta^2}$ 式으로 評價할 수 있다.

$$\gamma \approx \sqrt{\Delta\theta^2} = \frac{a}{S_1 S_2} \sqrt{2(S_1^2 + S_2^2) - 4S_1 S_2 \cos\theta'} \quad (rad) \quad (21)$$

여기서, $a = 0.63 \cdot e = 7.6 \cdot 10^{-4}$, $1.3 \cdot 10^{-4}$ (m)

또한 求心誤差가 測定值에 미치는 影響은 $\theta' = 180^\circ$ 일 때 最大이며, $S_1 = S_2 = S$ 라 하면 그 最大값은

$$\gamma_{max} = \frac{a}{S^2} \sqrt{8S^2} = \frac{2\sqrt{2}a}{S} \quad (rad) \quad (22)$$

가 되고, 式(22)로 부터 Transit 및 Theodolite의 視準距離를 각각 443m, 76m 以上으로 취하면 求心誤差가 測定值에 미치는 影響은 1'' 以下가 됨을 알 수 있다.

또한 實驗에 의해 Transit의 경우 $\bar{e} = 0.0012m$, Electronic Total Stations(Set3)의 경우 $\bar{e} = 0.0002m$ 로 부터 評價式에 있어서 $S_1 = S_2 = S$ 라 하고 $\bar{e} = 0.0012m$ 및 $\bar{e} = 0.0002m$ 의 각 경우에 對하여 視準距離S, 測定角 θ 및 求心誤差 δ 와의 關係를 求한 結果는 Fig. 8 및 Fig. 9에

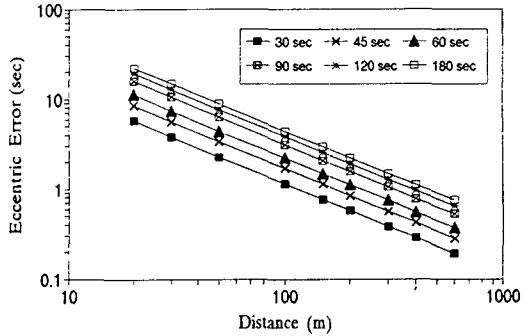


Fig.8 Relationship between Distance(S) and Accidental Error(δ) by Transit

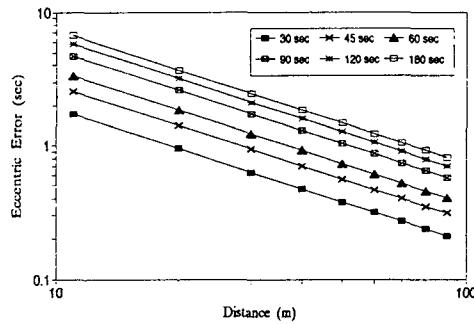


Fig.9 Relationship between Distance(S) and Eccentric Error(δ) by Electronic Total Stations(Set3)

표시한 바와 같다.

Fig. 8 및 Fig. 9로부터 Transit를 使用하는 경우에는 視準距離를 500m 以上, Electronic Total Stations(Set3)를 使用하는 경우에는 視準距離를 80m 以上으로 취하면 測定值에 포함되는 求心誤差의 影響은 모두 1'' 以下로 됨을 알 수 있다.

여기서 測點의 周圍에 몇개의 交角을 形成하는 모든 視準線을 使用하는 求心裝置에 對하여 위에서 구한 視準距離를 취하면, 각 交角에 包含되는 求心誤差의 影響을 무시할 수 있다고思料된다.

따라서 水平角을 觀測할 경우 視準距離를 위의 結果값 以上으로 取하면 觀測角에 미치는 求心誤差의 影響은 微小하므로 無視할 수 있음을 알 수 있다.

4. 結 論

本研究結果로 부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- (1) 求心誤差는 視準距離의 增加에 따라 減少現象을, 그리고 觀測交角 및 視準距離의 比가 클수록 增加 現象을 나타내므로 水平角 觀測에 있어서 交角 邊長의 比가 1에 가깝게 하여 觀測하는 것이 觀測값에 미치는 오차가 작아서 理想的이다.
- (2) 求心誤差의 減少率은 倍角數 3以上에서 거의一定하므로 倍角法에 의한 水平角 觀測은 3倍角法으로 함이 安當하다.
- (3) 求心誤差를 評價한 結果 水平角 觀測의 視準距離를 500m 以上으로 取하면 求心誤差가 觀測값에 미치는 影響은 1"이므로 骨組測量에서 邊長 1km에서는 求心誤差를 考慮할 필요가 없다.
- (4) Transit, Theodolite로 試驗觀測結果, 求心誤差는 각각 3.6", 0.6"로 나타났고, 偏心距離 \bar{e} 의 評價式으로부터 兩視準距離가 같다고 할 때 偏心距離는 각각 0.0012 m, 0.0002m로 算出되었다.

参考 文獻

1. 岡積満 外 1人, 1965, "測量의 視準誤差について", 日本土木學會 學術講演會概要集, pp. 116-1, 2.
2. 李啓鶴, 1977, "水平角 觀測值의 誤差에 關한 考察", 全南大 工技研誌, 第13輯, pp. 113-122.
3. 近津博文, 1981, "觀測角に影響を與える各種 不定誤差とトウハースの同時調整法", 測量, Vol.31, No.9, pp. 28-32.
4. 李啓鶴, 1990, "測角와 測距를 考慮한 閉合트래버스網의 同時調整法", 韓國測地學會誌, 第8卷, 第1號, pp. 51-56.
5. 李啓鶴 外 2人, 1990, "Traverse 測量에 있어서 閉合誤差의 理論的 調整法", 韓國測地學會誌, 第8卷, 第2號, pp. 31-34.
6. 龜田和昭, 1973, "角測定值의 誤差について", 日本大學理工學部 學術講演會論文集, pp. 87-88.
7. 金宇哲 外 7人, 1983, 現代統計學, 英志文化社, pp. 241-283.
8. 安川正彬, 1986, 統計學入門(應用編), 日本經濟新聞社, pp. 107-136.
9. 中村英夫 外 1人, 1977, 測量學, 技報堂, pp. 97-98.
10. 春日屋伸昌, 1978, 測量學 1, 朝倉書店, pp. 103-111.
11. Brinker, P.C. and P.R. Wolf, 1977, Elementary Surveying, 6th edition, Thomas Y. Crowell, pp. 191-192.
12. Kissam, P., 1981, Surveying for Civil Engineers, McGraw-Hill, pp. 108-110.
13. 日本測量協會, 1982, 現代測量學 3(一般測量), pp. 299-302.
14. Davis R.E. et al., 1981, Surveying Theory and Practice, 6th edition, McGraw-Hill, pp. 254-257.