

鉛直 2次元 廻折 및 放射問題 解析을 위한 無限要素 Infinite Elements for Analysis of Diffraction and Radiation Problems in the Vertical Plane

朴佑善* · 李達秀* · 吳榮敏* · 鄭遠武**

Woo Sun Park*, Dal Soo Lee*, Young Min Oh* and Weon Mu Jeong**

要 旨: 本 論文에서는 鉛直 2次元 波浪의 廻折 및 放射問題를 효율적으로 解析할 수 있는 無限要素 開發에 대해서 研究하였다. 물체 주변의 内部領域은 通常의 有限要素로 模型化하였으며, 外部領域은 本 研究에서 提案한 無限要素로 模型化하였다. 이 無限要素의 形狀函數는 外部領域의 散亂波의 擧動을 固有函數의 級數解로 표시하였을 때 나타나는 進行波 項과 첫번째 散亂波 項을 사용하여 결정하였으며, 數值解析上의 효율을 增加시키기 위하여 無限要素의 要素行列 構成時 나타나게 되는 無限方向으로의 積分을 解析의 으로 수행하였다. 本 無限要素의 效率性을 立證하기 위하여, 斷面이 直四角形인 경우와 半圓形인 浮體를 대상으로 例題 解析을 수행하였다. 또한, 解析의 效率性 및 解의 正確度에 직접적으로 影響을 미치는 無限要素 位置의 基準 設定을 위한 數值實驗도 수행하였다.

Abstract □ This paper is concerned with developing infinite elements which are applicable to wave diffraction and radiation problems in the vertical plane. The near field region surrounding the solid body is modeled using conventional finite elements, but the far field region is represented using the infinite elements developed in this study. The shape functions for the infinite elements are derived from the analytical eigenseries solution of the scattered waves in the far field region. The system matrices of the elements are constructed by performing the integration in the infinite direction analytically to achieve computational efficiency. Numerical analysis is carried out for two floating bodies with different cross-sectional shapes to prove the efficiency and validity of the elements. Numerical experiments are also performed to determine the suitable location of the infinite elements which directly affect accuracy and efficiency of the solution.

1. 緒 論

一般的으로 大型 海岸 및 海洋構造物에 작용하는 動流體力은 線形廻折理論에 의해서 산정된다. 이와 같은 境界值 問題를 풀어 動流體力을 算定하는 技法으로는 여러 가지를 들 수 있으나 많이 사용하는 것으로는 領域分割法, 境界積分方程式法, 有限要素法을 들 수 있다.

領域分割法은 波動場을 몇 개의 領域으로 분할하고, 各 領域에서의 速度포텐셜을 解析의 固有函數의 無限級數解로 표시한 후, 各 영역의 接合面에서의 連續條件을 도입하여 문제를 푸는 방법이다. 이 방법은

固有函數展開法 또는 各 領域內的 速度포텐셜을 領域境界面에서 접속시키기 때문에 速度포텐셜 接續法이라고도 부른다. 이 方法의 長點은 다른 方法에 비하여 計算時間이 적게 든다는 점이다. 그러나, 이 方法은 構造物의 形狀이 복잡한 경우에는 數式化 過程이 복잡하여 實際 適用이 거의 불가능하여 비교적 단순한 形狀의 構造物에 制限되는 短點이 있다.

境界積分方程式은 Green 函數를 이용하는 方法과 單純 特異點을 이용하는 方法으로 구분할 수 있다. Green 函數를 이용하는 方法은 積分方程式의 核函數로 支配方程式 및 物體表面에서의 境界條件을 제외한 境界條件을 만족하는 Green 函數를 사용하며,

*韓國海洋研究所 海洋工學研究室(Ocean Engineering Laboratory, Korea Ocean Research and Development Institute, P.O. Box 29, Ansan 425-600, Korea)

**韓國海洋研究所 沿岸工學研究室(Coastal Engineering Laboratory, Korea Ocean Research and Development Institute, P.O. Box 29, Ansan 425-600, Korea)

單純 特異點을 이용하는 方法에서는 支配方程式만을 만족하는 函數를 사용한다. 일반적으로 이 두 方法을 動流體力 算定問題에 적용할 경우, 前者는 模型化해야 할 領域이 物體表面으로 局限된다는 長點은 있으나 海底地形이 不規則한 境遇에는 核函數인 Green 函數를 구하는 것이 거의 불가능하다는 問題點이 있으며, 後者는 模型化할 領域이 너무 넓다는 問題가 있다. 따라서, 實際 本 研究에서와 같은 動流體力 算定問題에서는 核函數로서 Green 函數를 이용하는 方法이 주로 사용된다. 그러나, 이 方法은 앞에 언급한 問題이외에도 水面에 떠 있는 構造物인 境遇 唯一한 解가 존재하지 않는 特異振動數가 존재하며(John, 1950), 날카로운 모서리를 갖는 構造物을 模型化하는 데 어려움이 있다는 問題가 있다. 반면에 有限要素法에 起礎한 解析技法에는 이와 같은 問題點이 없다.

動流體力 算定問題에의 有限要素法의 適用技法은 無限境界面에서의 放射條件의 模型化 技法에 따라 주로 다음의 4가지 方法으로 分離할 수 있다. 첫째로, 가장 간편하다고 할 수 있는 物體로부터 有限한 거리에 直接 또는 修正된 放射 境界條件을 適用하는 方法(Bai, 1972 ; Huang *et al.*, 1985a, 1985b ; Sharan, 1986, 1989), 둘째로, 波動場을 둘로 분리하여 物體를 포함하는 内部領域은 有限要素로 模型化하고 外部領域은 解析的 固有函數의 級數解로 나타내어 두 領域의 接合面에서의 境界條件을 도입하여 問題를 해결하는 方法(Bai and Yeung, 1974 ; Chen and Mei, 1974 ; Yue *et al.*, 1976, 1978 ; Taylor and Zietsman, 1981 ; 李 等, 1990), 셋째로, 두번째 方法에서 解析的 固有函數의 級數解 대신에 外部領域을 Green 函數로 나타내는 方法(Bai and Yeung, 1974 ; Zienkiewicz *et al.*, 1977 ; Taylor and Zietsman, 1981), 넷째로, 外部領域을 無限要素로 模型化하는 方法(Bettess and Zienkiewicz, 1977 ; Zienkiewicz *et al.*, 1985 ; Lau and Ji, 1989 ; 朴 等, 1989 ; 朴, 1991) 등이다. 本 論文에서는 無限要素를 이용하는 方法에 대해서 研究하였다.

Bettess와 Zienkiewicz(1977), Zienkiewicz 등(1985)은 無限要素를 水平 2次元 波浪問題에 사용하였으며, Lau와 Ji(1989)는 3次元 廻折問題 解析에 適用하였다. 朴 等(1989), 朴(1991)은 3次元 廻折 및

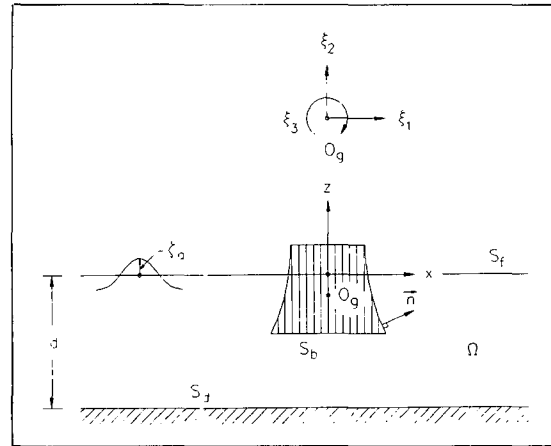


Fig. 1. Definition sketch for analysis of a floating body.

放射問題에 無限要素를 적용하여 效率性 및 妥當性을 立證하였다.

本 研究에서는 鉛直 2次元 廻折 및 放射問題를 효율적으로 解析할 수 있는 새로운 無限要素를 提案하였다. 無限要素의 形狀函數는 실제 散亂波의 擧動을 보다 잘 나타낼 수 있도록 하기 위하여 그 거동을 固有函數의 級數解로 표시했을 때 나타나는 進行波項과 첫번째 散亂波項을 사용하여 決定하였다. 또한, 無限要素의 要素行列을 解析的으로 積分하여 구성함으로써 계산의 效率性을 증가시켰다.

本 研究에서 개발한 無限要素의 效率性 및 妥當性을 입증하기 위하여 數值解析을 수행하였다. 먼저, 解析의 效率性和 解의 正確度에 직접적으로 영향을 주는 無限要素 위치의 基準 設定을 위한 數值實驗을 수행하였으며, 이 결과를 바탕으로 直四角形 및 半圓形 浮體에 대한 解析을 실시하여 他 文獻의 결과와 비교하였다.

2. 問題의 數式化

2.1 支配方程式 및 境界條件

振幅이 ζ_0 이고 振動數가 ω 인 規則波가 水深 d 에 위치한 構造物에 入射할 경우의 動流體力 算定問題를 數式化하기 위하여, Fig. 1에 나타낸 바와 같이 原點이 靜水面에 위치한 直交座標系를 사용하였다. 流體를 非壓縮性, 非粘性, 非回轉流라는 假定을 하게 되는 線形波 理論을 사용하면, 流動場은 다음과 같이

Laplace 方程式을 만족하는 速度포텐셜, Φ 로 나타낼 수 있다.

$$\nabla^2 \Phi(x, z; t) = 0 \quad (1)$$

여기서, $\nabla^2(\cdot) = \partial^2(\cdot)/\partial x^2 + \partial^2(\cdot)/\partial z^2$ 이다. 入射波高 및 構造物의 舉動이 微小하다는 假定을 하면, 靜水面 (S_f) 및 流動場의 바닥면(S_d), 物體의 表面(S_b)에서의 境界條件은 다음과 같이 線形으로 나타내진다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \Phi \quad \text{on } S_f \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } S_d \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = V_n \quad \text{on } S_b \quad (4)$$

여기서, V_n 은 物體表面에서 流體領域으로 향하는 水粒子의 法線 速度成分을 의미하며, g 는 重力加速度를 나타낸다.

構造物의 運動은 Fig. 1에 정의된 바와 같이 左右運動(Sway), 上下運動(Heave) 및 橫動搖(Roll) 등 세 방향의 調和運動으로 나타낼 수 있다. 各方向의 運動을 下添子 1, 2, 3으로 표시하였을 때, V_n 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_n = \text{Re} \left[\sum_{j=1}^3 -i\omega n_j \xi_j e^{-i\omega t} \right] \quad (5)$$

여기서, $\text{Re}(\cdot)$ 는 實數部를 의미하며, ξ_j 는 j -方向運動의 複素振幅을 나타낸다. n_j 는 物體表面에서 流體領域으로 향하는 法線벡터의 各方向成分과 관련된 값으로, Fig. 1과 같이 法線벡터, \vec{n} 을 정의하면 다음과 같이 표시된다.

$$n_1 = n_x \quad (6a)$$

$$n_2 = n_z \quad (6b)$$

$$n_3 = -(z - z_g)n_x + (x - x_g)n_z \quad (6c)$$

여기서, n_x, n_z 는 \vec{n} 의 x 및 z 방향의 成分을 나타내며, (x_g, z_g) 는 物體의 運動中心(O_g : 무게중심)의 좌표이다.

速度포텐셜, Φ 는 아래와 같이 各成分別 波浪의

포텐셜의 疊으로 나타낼 수 있다.

$$\Phi = \text{Re} \left[\left(\phi_0 + \phi_4 + \sum_{j=1}^3 \phi_j \xi_j \right) e^{-i\omega t} \right] \quad (7)$$

여기서, ϕ_0 는 入射波에 의한 成分, ϕ_4 는 廻折波에 의한 成分, ϕ_j 는 j -방향운동에 관련된 放射波에 의한 成分을 나타낸다. 이중, 廻折波 및 放射波에 의한 포텐셜은 無限境界面(S_r)에서 다음의 放射 境界條件을 만족하여야 한다(Sommerfeld, 1949).

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial r} - i k_0 \phi_j \right) = 0 \quad \text{for } j=1, 2, 3, 4 \quad (8)$$

여기서, k_0 는 入射波의 波數를 의미하며, $r = |x|$, $i = \sqrt{-1}$ 이다.

線形 廻折理論에 의하면 式 (1)-(4) 및 (8)로 주어진 境界值 問題는 ϕ_0 와 ϕ_4 가 관련된 廻折問題와 ϕ_j ($j=1, 2, 3$)가 관련된 放射問題로 분리하여 解析할 수 있다. 따라서, 式 (5)와 (6)을 式 (4)에 代入한 후, 廻折問題와 放射問題로 분리하면 物體 表面에서의 境界條件은 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = \begin{cases} -i\omega n_j & \text{for } j=1, 2, 3 \\ -\frac{\partial \phi_0}{\partial x} n_x - \frac{\partial \phi_0}{\partial z} n_z & \text{for } j=4 \end{cases} \quad (9)$$

여기서, ϕ_0 는 入射波의 포텐셜로 다음과 같이 나타내진다.

$$\phi_0 = -i \frac{g \zeta_a}{\omega} \frac{\cosh[k_0(z+d)]}{\cosh(k_0 d)} e^{ik_0 x} \quad (10)$$

2.2 動壓力 및 全波力

物體 表面 및 流體場 任意的 위치에서의 動壓力, $p(x, z; t)$ 는 線形화된 Bernoulli 方程式으로부터 다음과 같이 구할 수 있으며,

$$p(x, z; t) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{Re} \left[i\omega \rho \left(\phi_0 + \phi_4 + \sum_{j=1}^3 \phi_j \xi_j \right) e^{-i\omega t} \right] \quad (11)$$

構造物에 작용하는 全波力은 物體 表面에서의 壓力을 積分함으로써 구할 수 있다. 水平, 垂直 및 運動中心에

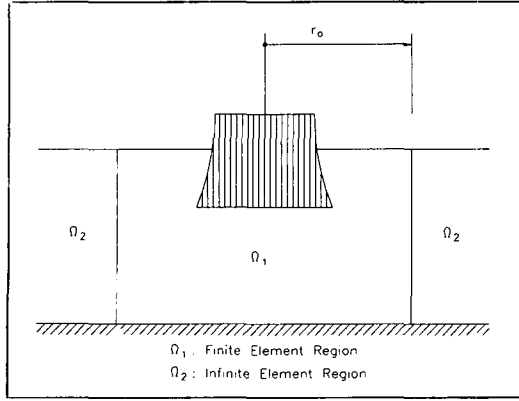


Fig. 2. Division of fluid domain.

대한 回轉方向의 全波力은 다음과 같이 표시된다.

$$F_j = - \int_{S_b} p(x, z; t) n_j dS_b$$

$$= \text{Re} \left[\left(F_j^r + \sum_{k=1}^3 F_{jk}^r \right) e^{-i\omega t} \right] \quad \text{for } j=1, 2, 3 \quad (12)$$

여기서, F_j^r 는 $\phi_0 + \phi_4$ 에 관련된 波浪 強制力이며, F_{jk}^r 은 放射포텐셜, ϕ_k 에 관련된 項으로 附加質量係數, μ_{jk} 와 波浪減衰係數, λ_{jk} 로 나타낼 수 있다.

$$F_j^r = -i\omega\rho \int_{S_b} (\phi_0 + \phi_4) n_j dS_b \quad (13)$$

$$F_{jk}^r = -i\omega\rho \int_{S_b} \phi_k n_j dS_b$$

$$= -\omega^2 \mu_{jk} - i\omega\lambda_{jk} \quad (14)$$

여기서, μ_{jk} 와 λ_{jk} 는 아래와 같이 나타내지며,

$$\mu_{jk} = -\frac{1}{\omega^2} \text{Re} \left(F_{jk}^r \right) \quad (15a)$$

$$\lambda_{jk} = -\frac{1}{\omega} \text{Im} \left(F_{jk}^r \right) \quad (15b)$$

$\text{Re}(\cdot)$ 와 $\text{Im}(\cdot)$ 은 각각 實數部와 虛數部를 의미한다.

3. 有限要素法에 의한 解의 導出

3.1 凡函數

有限要素法을 사용하여, 式 (1)-(4)와 (8)을 만족

하는 速度포텐셜을 구하기 위하여, Fig. 2와 같이 流體領域을 분리하여 物體를 포함하는 領域, Ω_1 은 통상의 有限要素로 模型化하였으며 外部領域, Ω_2 는 본 研究에서 提案된 無限要素로 模型化하였다.

變分法을 이용하면, 式 (1)-(4)와 (8)을 만족하는 速度포텐셜을 이에 관련된 凡函數, $\Pi(\phi_j)$ 를 最小化함으로써 구할 수 있다.

$$\Pi(\phi_j) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega$$

$$- \int_{S_f} \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} \phi_j^2 dS_f$$

$$+ \int_{S_b} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \phi_j dS_b$$

$$- \int_{S_r} \frac{1}{2} ik_0 \phi_j^2 dS_r \quad (16)$$

여기서, Ω 는 流體領域, S_f 는 靜水面, S_b 는 物體表面, S_r 는 無限遠方의 境界面을 의미한다. 위 式에서 各項을 에너지의 觀點에서 살펴보면, 支配方程式에 관련된 첫번째 項은 運動에너지로 볼 수 있으며, 靜水面 및 放射 境界條件에 관련된 두번째와 네번째 項은 스트레인 에너지로 생각할 수 있다. 또, 物體 表面에서의 境界條件에 관련된 세번째 項은 外部에서 가해진 일 또는 위치에너지로 볼 수 있다.

3.2 流體領域의 模型化

有限要素法에 의해 流體領域을 模型化하기 위해서는 분할된 各 要素內의 포텐셜, ϕ_j 를 節點포텐셜, $\{\phi_j^s\}$ 와 形狀函數, $\{N^s\}$ 로 나타내어야 한다.

$$\phi_j = \{N^s\}^T \{\phi_j^s\} \quad (17)$$

이를 式 (16)의 凡函數에 代入한 후, 各 要素의 節點포텐셜, $\{\phi_j^s\}$ 에 대해서 最小化하고, 이들을 조합하면 다음과 같은 線形 對數方程式을 얻게 된다.

$$\sum_s \left(\frac{\partial \Pi(\{\phi_j^s\})}{\partial \{\phi_j^s\}} \right) = \sum_s \left([K_j^s] \{\phi_j^s\} - \{P_j^s\} \right) = \{0\} \quad (18)$$

여기서, $[K_j^s]$ 는 各 要素의 要素行列, $\{P_j^s\}$ 는 荷重벡터로 다음과 같이 나타내진다.

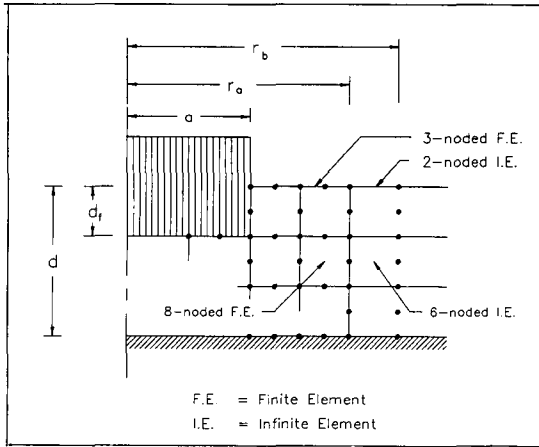


Fig. 3. Modeling of fluid region.

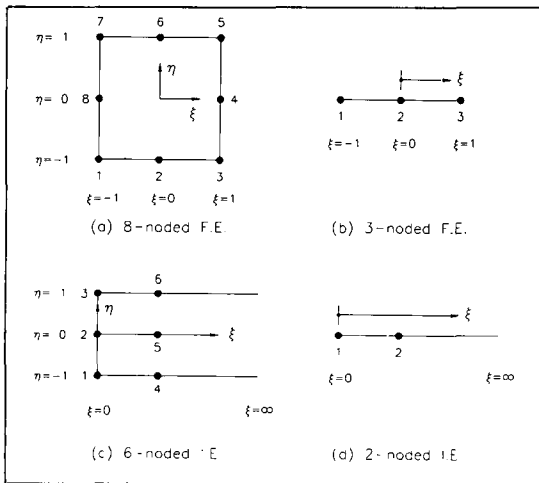


Fig. 4. Definition of element coordinate systems.

$$[K_{\xi}^e] = \int_{\Omega^e} \left(\left\{ \frac{\partial N^e}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial z} \right\}^T \right) d\Omega^e - \int_{S_f^e} \frac{\omega^2}{g} \{N^e\} \{N^e\}^T dS_{\xi} \quad (19)$$

$$\{P_{\eta}^e\} = - \int_{S_b^e} \frac{\partial \phi}{\partial n} \{N^e\} dS_{\eta} \quad (20)$$

式 (18)은 線形 對數方程式이므로 Gauss 消去法 등의 技法을 사용하면 쉽게 풀 수 있다. 특히, 各 要素 行列이 조합된 全體 行列이 對稱性을 지닌 時 行列로 構成되므로 컴퓨터의 記憶容量 및 計算上의 效率面에 있어서 상당히 유리하게 된다.

3.2.1 有限要素領域

內部領域, Ω_1 은 Fig. 3에 보인 바와 같이 靜水面 및 流體領域을 各 各 2次 形狀函數를 갖는 3節點 및 8節點 等媒介變數要素(Isoparametric element)를 사용하여 模型化하였다. 兩 要素의 座標系를 Fig. 4와 같이 정의하였을 때 各 各의 形狀函數는 다음과 같이 주어진다 (Dhatt and Touzot, 1984).

— 8節點 有限要素 ($-1 \leq \xi, \eta \leq 1$):

$$\{N^e\} = \begin{Bmatrix} -(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)/4 \\ (1-\xi^2)(1-\eta)/2 \\ -(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)/4 \\ (1+\xi)(1-\eta^2)/2 \\ -(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)/4 \\ (1-\xi^2)(1+\eta)/2 \\ -(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)/4 \\ (1-\xi^2)(1-\eta)/2 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

— 3節點 有限要素 ($-1 \leq \xi \leq 1$):

$$\{N^e\} = \begin{Bmatrix} -\xi(1-\xi)/2 \\ (1-\xi^2) \\ \xi(1+\xi)/2 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

式 (19)와 (20)의 各 要素行列은 Gauss 積分公式를 사용하여 構成하였다(Dhatt and Touzot, 1984).

3.2.2 無限要素領域

無限遠方의 放射條件을 포함하는 外部領域, Ω_2 는 式 (8)의 放射 境界條件을 만족하는 形狀函數를 갖는 6節點 및 2節點 無限要素로 模型化하였다(Fig. 4 참조). 本 研究에서 提案한 無限要素의 形狀函數는 外部領域의 解를 固有函數의 級數解로 나타내었을 때 나타나는 進行波項과 첫번째 散亂波項을 사용하여 決定한 것으로 아래와 같이 표시된다.

— 6節點 無限要素 ($0 \leq \xi < \infty, -1 \leq \eta \leq 1$):

$$\{N^e\} = \begin{Bmatrix} M_a(\xi) \{ \bar{N}(\eta) \} \\ M_b(\xi) \{ \bar{N}(\eta) \} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

— 2節點 無限要素 ($0 \leq \xi < \infty$):

$$\{N^e\} = \begin{Bmatrix} M_a(\xi) \\ M_b(\xi) \end{Bmatrix} \quad (24)$$

여기서, $\{\bar{N}(\eta)\}$ 는 Lagrange 形狀函數벡터로 다음과 같이 정의되며,

$$\{\bar{N}(\eta)\} = \begin{Bmatrix} -\eta(1-\eta)/2 \\ (1-\eta^2) \\ \eta(1+\eta)/2 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$M_a(\xi)$ 와 $M_b(\xi)$ 는 포텐셜의 水平方向 擧動을 나타내는 函數로 進行波를 나타내는 $f_0(\xi)$ 와 첫번째 散亂波項을 나타내는 $f_1(\xi)$ 의 函數로 표시된다.

$$\begin{Bmatrix} M_a(\xi) \\ M_b(\xi) \end{Bmatrix} = [F]^T \begin{Bmatrix} f_0(\xi) \\ f_1(\xi) \end{Bmatrix} \quad (26)$$

여기서,

$$f_0(\xi) = e^{ik_0(\xi+r_a) - \epsilon\xi} \quad (27a)$$

$$f_1(\xi) = e^{-k_1(\xi+r_a)} \quad (27b)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} e^{ik_0r_a} & e^{-k_1r_a} \\ e^{ik_0r_b} & e^{-k_1r_b} \end{bmatrix}^{-1} \quad (27c)$$

여기서, r_a , r_b 는 Fig. 3에 나타난 바와 같이 各各 無限要素의 節點中 内部領域과 外部領域의 接合面에 있는 節點까지의 거리와 그 外部에 있는 節點까지의 거리이다. ϵ 은 解析的으로 無限要素의 시스템 行列을 구성할 때 發生하는 문제를 解決하기 위하여 導入한 것으로(이를 도입하지 않으면 ξ -方向의 積分値가 存在하지 않음), 陽(+)의 아주 작은 實數값($\epsilon \ll k_0$)을 갖게 되며, 最終的인 無限要素의 시스템 行列에는 나타나지 않게 된다. k_0 와 k_1 은 各各 다음의 分散方程式으로부터 구할 수 있는데,

$$k_0 \tanh(k_0 d) = \frac{\omega^2}{g} \quad (28a)$$

$$k_1 \tan(k_1 d) = -\frac{\omega^2}{g} \quad (28b)$$

여기서, k_1 은 式 (28b)의 첫번째 해를 의미한다.

式 (26)의 $M_a(\xi)$ 와 $M_b(\xi)$ 는 外部領域의 포텐셜의 擧動을 다음과 같이 固有函數의 級數解로 나타내었을 때의 水平方向의 擧動을 사용하여 구한 것이다.

$$\begin{aligned} \phi_j &= A_0 \cosh[k_0(z+d)]e^{ik_0r} \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} A_l \cos[k_l(z+d)]e^{-k_lr} \end{aligned} \quad (29)$$

즉, 外部領域에서 포텐셜의 水平方向의 擧動은 이들의 여러 項中 進行波項과 첫번째 散亂波項을 사용하여 다음과 같이 近似的으로 나타낼 수 있다.

$$\phi_j \approx a_0 e^{ik_0r} + a_1 e^{-k_1r} \quad (30)$$

여기서, A_0 , A_l , a_0 , a_1 은 未知의 係數이다.

無限要素의 形狀을 Fig. 4에 보인 바와 같이 開放된 直四角形으로 제한시켜, 要素行列을 ξ -方向에 대해서는 解析的으로, η -方向에 대해서는 Gauss 積分公式를 사용하여 아래와 같이 構成하였다.

-6節點 無限要素 :

$$\begin{aligned} [K_j^e] &= \int_{\Omega_j^e} \left(\left\{ \frac{\partial N^e}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N^e}{\partial z} \right\}^T \right) d\Omega_j^e \\ &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}[K_\eta] & \bar{A}_{12}[K_\eta] \\ \bar{A}_{12}[K_\eta] & \bar{A}_{22}[K_\eta] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{11}[K_{\eta'}] & \bar{B}_{12}[K_{\eta'}] \\ \bar{B}_{12}[K_{\eta'}] & \bar{B}_{22}[K_{\eta'}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

-2節點 無限要素 :

$$\begin{aligned} [K_j^s] &= -\int_{S_j^s} \frac{\omega^2}{g} \{N^s\} \{N^s\}^T dS_j^s \\ &= -\frac{\omega^2}{g} \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} \\ \bar{B}_{12} & \bar{B}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

여기서, \bar{A}_{ij} , \bar{B}_{ij} 와 \bar{C}_{ij} 는 ξ -方向 積分과 관련된 複素係數로 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = [F]^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} [F] \quad (33a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} \\ \bar{B}_{12} & \bar{B}_{22} \end{bmatrix} = [F]^T \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} [F] \quad (33b)$$

여기서,

$$A_{11} = -i \frac{k_0}{2} e^{2ik_0r_a} \quad (34a)$$

$$A_{12} = -i \frac{k_0 k_1}{ik_0 - k_1} e^{(ik_0 - k_1)r_a} \quad (34b)$$

$$A_{22} = \frac{k_1}{2} e^{-2k_1r_a} \quad (34c)$$

$$B_{11} = \frac{i}{k_0} e^{2ik_0 r_a} \quad (34d)$$

$$B_{12} = -\frac{1}{ik_0 - k_1} e^{(ik_0 - k_1)r_a} \quad (34e)$$

$$B_{22} = \frac{1}{2k_1} e^{-2k_1 r_a} \quad (34f)$$

[K_η]와 [$K_{\eta'}$]은 η -方向的의 積分에 관련된 行列로 다음과 같이 나타내지며,

$$[K_\eta] = \int_{z'} \{ \bar{N}^e \} \{ \bar{N}^e \}^T dz' \quad (35a)$$

$$[K_{\eta'}] = \int_{z'} \left\{ \frac{\partial \bar{N}^e}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial \bar{N}^e}{\partial z} \right\}^T dz' \quad (35b)$$

이들의 積分값은 Gauss 積分公式에 의해서 계산하였다.

4. 數值解析 및 結果分析

本 研究에서 提案된 無限要素를 이용한 波浪荷重算定技法의 妥當性 및 效率性을 立證하기 위하여 數值解析을 수행하였다. 먼저, 數值解析의 效率性 및 解析結果의 正確度에 직접적으로 영향을 주는 無限要素의 位置決定을 위한 數值實驗을 수행하였으며, 이로부터 얻어진 基準을 이용하여 例題 解析을 수행하였다. 數值解析時 有限要素의 크기는 一般的으로 잘 알려진 入射波長의 1/4보다는 작아야 한다는 條件 (Smith, 1974 ; Huang *et al.*, 1985 ; 朴 等 1989 ; 朴, 1991)을 충족시켰다.

4.1 無限要素의 位置

효율적으로 解析을 수행하기 위해서는 통상의 有限要素로 模型化하게 되는 内部領域의 크기를 작게 하면 할수록 좋다. 그러나, 無限要素를 物體로부터 너무 가까이 位置시키면 解의 正確度가 떨어지게 되는 문제가 있다. 따라서, 타당하면서도 효율적으로 解析할 수 있는 적절한 無限要素의 위치를 결정하기 위하여, 浮體 吃水(d_f)對 幅($2a$)의 比($d_f/2a$)가 0.5인 直四角形 浮體를 數值實驗 對象構造物로 하여 Fig. 5에 보인 바와 같이 5가지 水深條件에 대해서 解析을 수행하였다. 有限要素의 크기는 吃水深의 0.5배로 固

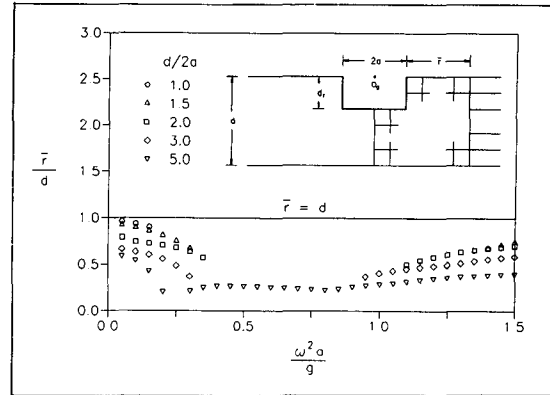


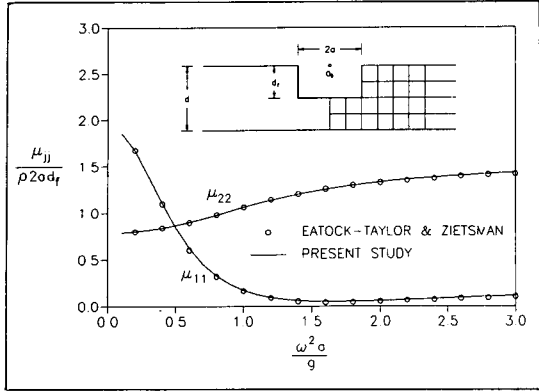
Fig. 5. Minimum distance to the infinite elements to have less than 1.0% relative errors compared with the results for $\bar{r}=10d_f$.

定시키고 無限要素의 위치를 浮體表面으로부터 吃水深의 1.0배에서 10배 까지 변화시켜 가며 해석을 하였으며 그 結果를 Fig. 5에 나타내었다. 이 그림은 無限要素를 吃水深의 10배에 위치시켰을 때의 결과에 대한 相對誤差가 1.0% 이내인 位置를 水深에 대한 比로 나타낸 것이다. 이를 살펴보면 無限要素를 物體表面으로부터 水深만큼 떨어진 곳에 위치시키면 타당한 結果를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 또한, 水深이 깊어질수록 그 位置(\bar{r}/d)가 점차 줄어드는 現象을 볼 수 있다.

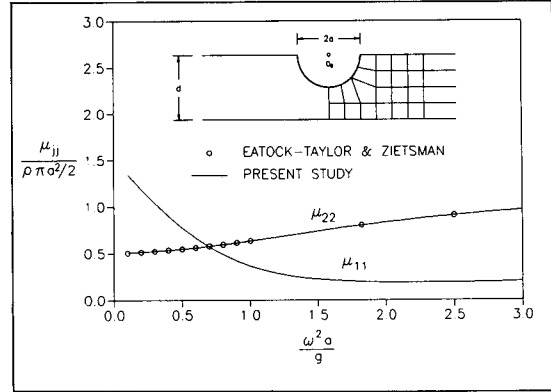
4.2 例題 解析

本 研究에서 提案한 無限要素의 適用性을 알아보기 위하여 斷面이 直四角形인 浮體와 半圓形인 浮體에 대한 例題 解析을 수행하여 他 文獻의 결과와 비교하였다. 數值解析時 無限要素는 物體表面으로부터 水深만큼 떨어진 곳에 위치시켰다.

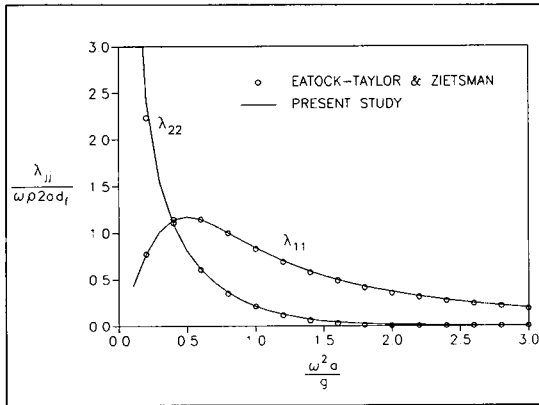
直四角形 浮體 : Fig. 6은 浮體의 幅($2a$)對 水深(d)의 比가 1.0, 吃水(d_f)가 水深의 0.5배이며, 무게중심이 水面에 위치한 直四角形 浮體에 대한 解析結果를 나타낸 것이다. Fig. 6(a)에는 數值解析時 사용한 有限要素 格子網과 함께 水平 및 鉛直方向 運動의 附加質量係數(μ_{ij})를 나타내었으며, Fig. 6(b)에는 波浪減衰係數(λ_{ij})를 나타내었다. 비교한 Eatock-Taylor와 Zietsman(1981)의 결과는 流體領域을 物體를 포함하는 内部領域과 外部領域으로 분리하여 内部領域은 有限要素로 模型化하고, 外部領域은 解析의 級數解로



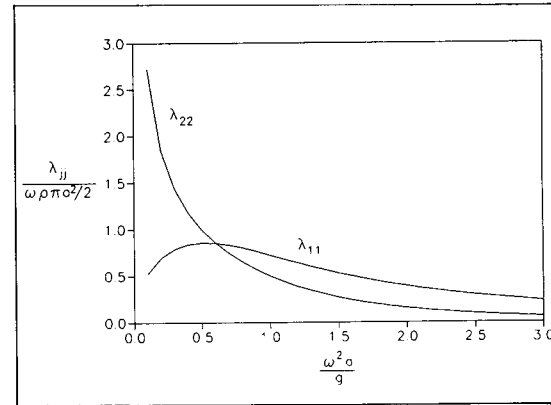
(a) Added mass coefficients



(a) Added mass coefficients



(b) Wave damping coefficients



(b) Wave damping coefficients

Fig. 6. Added mass and wave damping coefficients for a free floating rectangular body with $d/a=1.0$, $d/a=2.0$.

Fig. 7. Added mass and wave damping coefficients for a free floating semi-circular body with $d/a=2.0$.

나타내어 문제를 푸는 局所 有限要素法에 의한 것이다. 水平 및 鉛直方向 運動에 대한 附加質量과 波浪 減衰係數가 비교한 全 周波數에 대하여 서로 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

半圓形 浮體 : Fig. 7은 半徑(a)對 水深(d)의 比가 0.5이고 무게중심이 水面에 위치한 半圓形인 浮體에 대한 解析結果이다. Fig. 7(a)에는 水平 및 鉛直方向 運動에 대한 附加質量係數(μ_{jj})를 나타내었으며, Fig. 7 (b)에는 波浪減衰係數(λ_{jj})를 나타내었다. 解析에 사용한 有限要素 格子網은 Fig. 7(a)에 나타난 바와 같다. 비교한 資料는 Eatock-Taylor와 Zietsman(1981)의 局所 有限要素法에 의한 結果로 本 方法에 의한 結果와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

5. 結 論

本 論文에서는 鉛直 2次元 波浪의 廻折 및 放射問題를 효율적으로 해석할 수 있는 새로운 無限要素의 開發에 대해서 연구하였다. 本 研究에서 提示한 無限要素의 形狀函數는 外部領域의 散亂波의 擧動을 固有函數의 級數解로 표시하였을 때 나타나는 進行波項과 첫번째 散亂波 項을 사용하여 決定하였으며, 無限要素의 要素行列을 解析的으로 구성함으로써 計算上의 效率을 증가시켰다.

數值解析의 效率性 및 解의 正確度에 직접적으로 영향을 미치는 無限要素의 位置에 대한 數值實驗 結果, 만족할 만한 結果를 얻기 위해서는 無限要素를

物體表面으로부터水深의 1.0배 이상에 위치시켜야 함을 알 수 있었으며, 이 기준을 사용하여 例題 解析한 결과, 既存의 他 文獻 結果와 잘 一致함을 알 수 있었다.

謝 辭

本 論文은 科學技術處에서 施行한 特定 研究開發 事業의 一環으로 遂行된 “海岸構造物의 波力吸收를 위한 新素材 開發研究”의 結果中 一部를 整理補完한 것입니다.

參考文獻

- 朴佑善, 尹貞邦, 片宗根, 1989. 波浪荷重 算定을 위한 無限 要素, 韓國海岸·海洋工學會誌, 第1卷 第1號: 71-80.
- 朴佑善, 1991. 波浪荷重에 대한 Tension Leg Platform의 信賴度解析, 韓國科學技術院 博士學位論文.
- 李太甲, 朴佑善, 片宗根, 1990. 複合要素法을 利用한 3-次元 海洋構造物의 動的應答, 韓國海岸·海洋工學會誌, 第2卷 第3號: 152-161.
- Bai, K.J., 1972. A variational method in potential flows with a free surface, Report No. NA72-2, College of Engineering, Univ. of California, Berkeley, College Berkeley.
- Bai, K.J. and Yeung, R.W., 1974. Numerical solution to free-surface flow problems, The 10th Symposium of Naval Hydrodynamics, Office of Naval Research, Cambridge, Massachusetts: 609-647.
- Bettess, P. and Zienkiewicz, O.C., 1977. Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**: 1271-1290.
- Chen, M.S. and Mei, C.C., 1974. Oscillations and wave forces in an offshore harbor: Application of hybrid element method to water wave scattering, Ralph M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, Dept. of Civil Engineering, M.I.T. Cambridge, Mass. Technical Report No.190.
- Dhatt, G. and Touzot, G., 1984. The finite element method displayed, John Wiley and Sons.
- Eatock-Taylor, R. and Zietsman, J., 1981. A comparison of localized finite element formulations for two-dimensional wave diffraction and radiation problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **17**: 1355-1384.
- Huang, M.C., Leonard, J.W. and Hudspeth, R.T., 1985a. Wave interference effects by finite element method, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Division, ASCE*, **111**(1): 1-17.
- Huang, M.C., Hudspeth, R.T. and Leonard, J.W., 1985b. FEM solution of 3-D wave interference problems, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Division, ASCE*, **111**(4): 661-677.
- Hudspeth, R.T., Nakamura, T. and Leonard, J.W., 1980. Floating vessel response simulator(FVRS) by an axisymmetric Green's function, Final report submitted for contract: Vessel response simulator AFE 79116, Oregon State University, Corvallis, Oregon.
- John, F., 1950. On the motion of floating bodies II, *Comm. Pure Appl. Math.*, **3**: 45-101.
- Lau, S.L. and Ji, Z., 1989. An efficient 3-D infinite element for water wave diffraction problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**: 1371-1387.
- Sharan, S.K., 1986. Modelling of radiation damping in fluids by finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **23**: 945-957.
- Sharan, S.K., 1989. Hydrodynamic loadings due to the motion of large offshore structures, *Computers and Structures*, **32**(6): 1211-1216.
- Sommerfeld, A., 1949. *Partial differential equations in physics*, Academic Press, New York.
- Yue, D.K.P., Chen, H.S. and Mei, C.C., 1976. A hybrid element method for calculating three-dimensional water wave scattering, Technical Report No.215, Ralph M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, Dept. of Civil Engineering, M.I.T. Cambridge, Mass.
- Yue, D.K.P., Chen, H.S. and Mei, C.C., 1978. A hybrid element method for diffraction of water waves by three-dimensional bodies, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **12**: 245-266.
- Zienkiewicz, O.C., Kelly, D.W. and Bettess, P., 1977. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**: 355-375.
- Zienkiewicz, O.C., Bando, K., Bettess, P., Emson, C. and Chiam, T.C., 1985. Mapped infinite elements for exterior wave problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21**: 1229-1251.