최적 가공방법의 선택을 위한 모형화
—Modeling the Problem for the Optimal Selection of Process Plans—

기 재 석*
강 맹 규**

Abstract

Is this paper the selection of a set of process plans is considered for a flexible manufacturing systems. This problem arises in the metal working industry when numerical controlled(N/C) machines are used to manufacture parts. In this paper a new concept to reduce the size of problem is proposed. A corresponding integer programming model is formulated. The model formulated is to minimize corresponding manufacturing cost and minimize the number of tools and auxiliary devices such as fixtures, grippers, and feeders.

1. 서 론

본 연구는 자동생산시스템에서 발생하는 가공방법 선택문제를 다룬다. 수치제어(N/C) 기계에 의해 부품을 가공하는 자동생산시스템에서는 여러 종류의 공구와 부속장치들이 필요하다. 부속장치로는 가공할 부품을 고정시키는 고정장치(Fixtures), 부품을 조정하기 위한 조정장치(Grippers), 그리고 부품을 공급하는 공급장치(Feeders) 등을 예로 들수 있다. 공구들도 전통적인 생산방식에서와 달리 자동교체 및 조정이 가능하도록 다양하게 설계되어 부품가공에 사용된다. 자동생산 시스템에서 한 부품을 가공할 수 있는 가공방법이 실제로는 한가지 이상 즉, 복수의 가공방법이 가능하다. 임의의 한 부품을 가공할 수 있는 복수의 가공방법들은 각기 다른 공구와 부속장치들의 집합을 필요로 한다.

본 연구에서는 복수의 가공방법이 가능한 자동생산 시스템에서 가공방법을 선택하는 문제를 다룬다. 선택된 가공방법은 필요로 하는 공구와 부속장치의 개수를 최소로 하며 가공비용을 최소로 한다. 가공방법 선택의 문제를 다루는 이유는 가공비용의 감소외에 필요한 공구와 부속장치의 개수를 줄이기 위해서다. 필요한 공구와 부속장치의 개수가 적은 가공방법을 선택하면 일정계획의 수립이 많은 개수를 필요로 하는 가공방법들 보다 용이해진다[1, 2].

본 연구에서는 다음을 가정한다. 가공할 부품은 주어진다. 각 부품을 가공할 수 있는 가공방법이 한가지 이상 존재한다. 각 가공방법에서 필요로 하는 공구와 부속장치들은 주어진다. 한가지 부품을 가공할 수 있는 복수의 가공방법에서 공통으로 필요한 공구나 부속장치는 주어진다.

단일 가공방법만이 가능한 부품가공에 대한 연구로 Tang과 Denardo[7, 8]는 공구교체 횟수를 최소화하는 가공할 부품순서의 결정문제를 연구하였다. Kusiak과 Finke[5]는 특정부품이 선행되어야 하는 제약조건하에서 공구교체 횟수를 최소화하는 부품의 가공순서 결정문제를 연구하였다. 복수의 가공방법이 가능한 부품가공에 대한 연구로 기재석, 강맹규[1]는 공구교체 횟수를 최소화하는 가공방법 문제를 연구하였다. Kusiak과 Finke[6]는 필요한 공구와 부속장치들의 개수를 최소화하는 문제를 연구하였다. 또한 Kusiak[4]은 복수의 가공방법 중 기계실(Machine Cell)을 가장 효과적으로 구성할 수 있는 가공방법의 선택문제를 연구하였다.

본 연구에서는 기존연구[6]의 정수계획 모형을 변형하여 문제의 크기를 줄일 수 있는 방안을 제안한다. 축소된 문제에 대해 최적의 가공방법을 선택할 수 있는 개선된 정수계획 모형을 수립한다. 본 연구에서는 먼저 2장에서 기존연구[6]의 정수계획(IP) 모형을 살펴본다. 이를 변형하여 문제의 크기를 줄일 수 있는 방안과 개선

*한양대학교 산업공학과 대학원
**한양대학교 산업공학과 교수
접수 : 1991. 10. 28.

된 정수계획 모형을 3장에서 제안한다. 4장에서는 개선된 정수계획 모형의 수치 예를 보인다.

2. 기존연구의 수리모형

기존연구[6]에서는 최적의 가공방법을 선택하는 정수계획 모형을 수립하였다. 선택된 최적의 가공방법들은 필요로 하는 공구와 부속장치의 개수를 최소로 하며 가공비용을 최소화한다. 기존연구에서 수립한 정수계획 모형(이후 기존모형이라 칭함)을 설명하기 위해 다음 기호를 먼저 정의한다.

K : 가공할 부품의 집합, $K=\{1, 2, \cdots\cdots, m\}$

P_k : 부품 k를 가공할 수 있는 가공방법의 집합, $\forall k \in K$

P : 모든 가공방법의 집합, $\cup P_1 \cup P_2 \cdots \cup P_m$

A : P_k와 P_l에서 각각 하나씩 선택된 가공방법의 집합, $A=\{(i, j) : i \in P_k, j \in P_l, (k, l) \in K \times K, k \neq l\}$

T : 전체 공구의 집합

$x_{ti}=\begin{cases}1, & \text{공구(또는 부속장치) } t\text{가 가공방법 } i\text{에서 사용될 때} \\ 0, & \text{그 외의 경우}\end{cases}$

$\delta(x_{ti}, x_{tj})=\begin{cases}1, & x_{ti} \neq x_{tj}\text{일 때}, \ \forall (i, j) \in V \\ 0, & \text{그 외의 경우}\end{cases}$

W_t : 공구(또는 부속장치) t의 가중치로 공구(또는 부속장치)의 구입비용 등을 고려해서 정한 값(각 부속장치와 공구는 W_t에 의해 구별될 수 있으므로 이후에는 공구와 부속장치를 편의상 공구로 칭함)

d_{ij} : 가공방법 i와 j간의 비 유사성을 나타내는 값,

$d_{ij}=\sum_{t=1} W_t \delta(x_{ti}, x_{tj}), \ \forall (i, j) \in V$

C_i : 가공방법 i의 가공비용, $\forall i \in P$

$x_i=\begin{cases}1, & \text{가공방법 } i\text{가 선택될 때} \\ 0, & \text{그 외의 경우}\end{cases}$

$y_{ij}=\begin{cases}1, & \text{가공방법 } i\text{와 } j\text{가 선택될 때} \\ 0, & \text{그 외의 경우}\end{cases}$

최적의 가공방법들을 선택하기 위한 기존모형은 다음과 같다.

$$\text{목적식 : } \mathrm{Min}\ \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} y_{ij} + \sum_{i \in P} C_i x_i \tag{1}$$

$$\text{조건식 : } \sum_{i \in P_k} x_i = 1, \ k \in K \tag{2}$$

$$x_i + x_j - 1 \leq y_{ij}, \ (i, j) \in A \tag{3}$$

$$x_i = 0, 1, \ i \in P \tag{4}$$

$$y_{ij} = 0, 1, \ (i, j) \in A \tag{5}$$

제약식 (2)는 각 부품을 가공할 방법이 한가지만 선택되도록 한다. 제약식 (3)에서는 가공방법 i와 j가 동시에 선택되면 $y_{ij}=1$이 되도록 한다. 제약식(4)와 (5)는 정수임을 나타낸다. 목적식 (2)에서 $y_{ij}=y_{ji}$이므로 $d_{ij}y_{ij}=d_{ji}y_{ji}$가 두번 중복되어 발생하므로 $\frac{1}{2}$이 필요하다.

기존모형으로 구해진 최적해는 최적 가공방법이며 이를 통해 최소로 필요한 공구의 집합을 구할 수 있다. 기존모형으로 최적해를 구하려면 다음과 같은 계산량이 필요하다($\Sigma c_i x_i$의 계산량은 상대적으로 작으므로 제외함).

${}_n(P_1) \cdot {}_n(P_2) \cdot \cdots\cdots \cdot {}_n(P_n) = M$이라면 계산량(complexity)은 다음과 같다.

$$M \cdot {}_mC_2 \cdot 2_n(T) = M \cdot m(m-1) \cdot {}_n(T) \tag{6}$$

식 (6)에서 M은 m개의 가공방법을 선택하는 가지 수이다. ${}_mC_2$는 선택된 m개의 가공방법 중 d_{ij}를 계산하기 위해 2개의 가공방법을 선택하는 가지 수이다. $2 \cdot {}_n(T)$는 2개의 가공방법 i와 j의 d_{ij}를 계산하는 계산량이다.

식 (6)에서 공구의 수가 많고 모든 가공방법의 집합 P의 크기가 크면 높은 계산량 때문에 정수계획으로 최적해를 구하기가 어렵다. 기존연구[6]에서는 부품의 가공순서가 정해진 상황에서 가공방법을 선택하기 위한 발견적 해법을 제시했다. 그러나 가공방법의 수가 적고 공구의 수가 많지 않은 경우에는 정수계획 모형으로 최적해를 구할 수 있다. 본 연구에서는 문제의 크기를 줄일 수 있는 방안을 제안하여 문제를 축소한 후에 축소된 문제로 최적해를 구할 수 있는 개선된 정수계획 모형을 수립한다.

3. 개선된 정수계획 모형

본장에서는 최적의 가공방법을 선택하는 원 문제에서 문제의 크기를 줄일 수 있는 방안을 제안한다. 축소된 문제로 최적의 가공방법을 선택하는 개선된 정수계획 모형을 수립한다. 문제의 크기를 줄이는 방안은 반드시 필요로 하는 공구들을 미리 찾아 내어 원 문제에서 제외시키는 것이다. 이를 설명하기 위해 표 1을 이용한다.

표 1. 복수 가공방법에서의 공구 백터

부 품		1	2	3	4
가공 방법		1 2	3 4 5	6 7	8 9 10
공	1	1 0	1 1 0	1 1	1 0 1
	2	0 1	0 0 1	0 0	1 0 1
	3	1 1	1 1 1	1 0	0 1 0
구	4	1 0	0 0 1	0 1	1 1 1
	5	0 1	0 0 0	1 0	0 0 1
	6	1 0	1 1 1	1 1	1 1 1
	7	0 1	0 0 1	0 0	1 0 0
	8	0 1	1 0 0	1 0	1 0 1

표 1에서 공구 1은 부품 3의 어떤 가공방법에서도 공통으로 필요한 공구이므로 최적해에는 공구 1은 반드시 포함된다. 공구 3도 같은 이유로 최적해에 포함되어야 한다. 즉, 임의의 부품 K를 가공할 수 있는 모든 가공방법(P_K)에서 공구 t가 공통으로 필요하면 다른 부품의 가공방법과 관계없이 부품 k를 가공하기 위해서 공구 t는 반드시 필요하다. 따라서 각 부품의 가공방법들에 공통으로 필요한 부품(이후 필수 부품이라 칭함)은 원 문제에서 제거한 후에 문제를 축소해서 풀 수 있다. 축소된 문제의 해에서 선택된 가공방법은 원 문제의 최적해와 동일하다. 이에 대한 타당성 증명은 부록의 정리 1에서 보인다.

축소된 문제로 최적해를 구할 수 있는 개선된 정수계획 모형을 보이기 위해 다음의 기호를 먼저 정의한다.

T_1 : 원 문제에서 필수공구의 집합.

T_2 : 원 문제의 전체 공구집합 T에서 T_1을 제외한 집합, $T_2 = T - T_1$

$J_{ti} =$ 1, 공구 t가 가공방법 i에서 필요할 때
0, 그 외의 경우

$W = \{P_1^1, P_2^1, \cdots\cdots, P_m^1\}$으로 각 P_k에서 한가지씩 선택된 가공 방법의 집합, $P_k^1 \in P_k$이며 ${}_n(P_k^1) = 1, \forall_k \in K$

$S_t =$ 1, $\sum_{i \in W} J_{ti} \neq 0$일 때
0, $\sum_{i \in W} J_{ti} = 0$일 때

C_t : 공구 t의 구입비용과 비례하는 가중치

원 문제에서 T_1을 제외한 후 공구의 집합이 T_2인 축소된 문제의 최적 가공방법을 선택하는 개선된 정수계획 모형은 다음과 같다.

목적식 : $\text{Min} \sum_{t \in T_2} C_t S_t + \sum_{i \in P} C_i x_i$ (7)

제약조건 : $\sum_{i \in P_k} x_i = 1, \ k \in K$ (8)

$S_t = 0, 1, \ t \in T_2$ (9)

$x_i = 0, 1, \ i \in P$ (10)

조건식 (8)에서는 각 부품을 가공할 수 있는 방법 중 한가지만 선택되도록 한다. 조건식 (9)와 (10)에서는 정수임을 나타낸다. 목적식 (7)에서 첫번째 항은 필요로 하는 공구 수가 최소가 되도록 하고, 두번째 항은 가공비용이 최소가 되는 가공방법이 선택되도록 한다. 여기에서 가공비용인 C_i는 C_t에 상응하도록 수치조정된 값이다.

본 연구에서 정립한 개선된 정수계획 모형의 계산량은 다음과 같다.

$$M \cdot {}_n(T_2) \cdot m \tag{11}$$

식 (11)에서 M은 가공방법을 선택할 수 있는 가지 수이고 ${}_n(T_2) \cdot m$은 선택된 가공방법에서 S_t를 계산하는 계산량이다. 기존모형의 계산량과 비교해 보면 다음과 같다.

$$식(6) - 식(11) = M \cdot m[(m-1)_n(T) - {}_n(T_2)] \tag{12}$$

그런데 ${}_n(T_1) + {}_n(T_2) = {}_n(T)$이므로 식 (12)>0이 된다. 즉, 계산량이 개선된 모형에서는 식(12)만큼 감소한다. 실제문제에서는 동일부품을 가공할 수 있는 가공방법들 간에는 공통으로 필요한 공구들이 많으므로 계산량의 높은 감소가 예상된다. 즉, ${}_n(T_1)$의 값이 충분히 크다면 본 연구에서 제안한 모형은 기존 모형보다 효율적으로 최적해를 구할 수 있다.

4. 수치 예

본장에서는 먼저 기존모형으롱 최적해를 구하는 예를 보이고 다음으로 본 연구에서 제안한 정수계획 모형으로 최적해를 구한다. 3장의 표 1을 수치 예의 원 문제로 한다. 문제를 풀기전에 다음의 데이타를 가정한다.

$C_i = [5.8,\ 9.4,\ 11.6,\ 5.7,\ 3.4,\ 4.3,\ 5.1,\ 6.4,\ 5.2,\ 5.3]$

$W_t = [1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1]$

원 문제에서 $D = [d_{ij}]$를 구하면 표 2와 같다.

표 2. $D = [d_{ij}]$

가공방법	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	∞	∞	2	1	3	3	1	4	1	4
2		∞	5	6	4	4	8	5	6	5
3			∞	∞	∞	1	3	4	3	4
4				∞	∞	2	2	5	1	5
5					∞	6	4	3	2	5
6						∞	∞	5	4	3
7							∞	3	2	3
8								∞	∞	∞
9									∞	∞
10										∞

정수계획 프로그램을 이용하여 최적해를 구하면 선택된 가공방법의 집합은 {1, 4, 7, 9}가 된다. 선택된 가공방법에서 필요한 공구의 집합은 $\{t_1,\ t_3,\ t_4,\ t_6\}$가 된다.

다음은 같은 문제를 본 연구에서 제안한 개선된 정수계획 모형으로 해를 구하는 과정을 보인다. 표 2의 원 문제에서 공구 t_1은 부품 3 가공에 반드시 필요한 공구이며 t_3는 부품 1과 부품 2 가공에 반드시 필요한 공구이다. 공구 t_4는 부품 4 가공에 반드시 필요한 공구이며 t_6는 부품 2, 부품 3 그리고 부품 4 가공에 반드시 필요한 공구들이다. 즉 $T_1 = \{t_1,\ t_3,\ t_4,\ t_6\}$이 된다. 각 부품에 대한 가공방법들을 정의할 때 T_1은 알 수 있으므로 주어지는 것으로 가정한다. 원 문제에서 T_1을 제거하면 표 3과 같이 된다.

표 3. 원 문제에서 T_1을 제외한 축소된 공구백터

	부품	1	2	3	4
	가공방법	1 2	3 4 5	6 7	8 9 10
공구	t=2	0 1	0 0 1	0 0	1 0 1
	t=5	0 1	0 0 0	1 0	0 0 1
	t=7	0 1	0 0 1	0 0	1 0 0
	t=8	0 1	1 0 0	1 0	1 0 1

표 3의 축소된 문제를 본 연구에서 제안한 개선된 정수계획 모형으로 최적해를 구하면기본모형과동일한 해가 구해진다. 즉, 가공방법 {1, 4, 7, 9}가 선택된다. 특수한 경우이나 본 예에서 선택된 가공방법의 $[J_{ti}]$의 원소는 모드 0 임을 알 수 있다. 본 장의 수치 예에서는 계산량이 원 문제의 계산량보다 약 83% 정도가 감소한다.

5. 결 론

복수의 가공방법이 가능한 자동생산 시스템에서는 필요한 공구와 부속장치의 개수를 최소로 하며 가공비용을 최소로 하는 가공방법을 선택하는 것이 생산계획자에게는 매우 중요하다. 그 주요 이유는 다음과 같다. 첫째로 가공비용의 절감, 둘째로 N/C 기계 공구 매가진(tool magazine)의 제한된 공구보유능력, 셋째로 필요한 공구 및 부속장치의 개수를 줄여 일정계획 등을 용이하게 하려는 것이다.

본 연구에서는 최적의 가공방법을 선택하기 위한 기존모형보다 계산량이 적은 개선된 정수계획 모형을 수립했다. 본 연구는 원 문제에서 필수공구를 제외하여 문제의 크기를 줄일 수 있는 방안을 제안하였다. 본 연구에서 수립한 개선된 정수계획 모형은 축소된 문제로 원 문제의 최적해를 구한다.

본 연구에서는 다음을 가정했다. 가공할 부품은 주어진다. 각 부품을 가공할 수 있는 가공방법이 한가지 이상 존재한다. 각 가공방법에서 필요로 하는 공구는 주어진다. 필수공구는 주어진다.

자동생산 시스템에서 부품가공에 대한 일정계획 문제는 많은 연구가 단일 가공방법만이 가능함을 가정하였다. 그러나 복수의 가공방법이 가능한 경우가 실제로는 가능하므로 이에 대한 일정계획의 연구가 필요하다. 본 연구에서 제안한 문제의 크기를 줄이는 방안과 개선된 정수계획 모형으로 최적의 가공방법을 선택한 후에 단일 가공방법이 가능한 경우의 일정계획 방법을 적용하면 복수의 가공방법이 가능한 경우의 일정계획을 용이하게 해결할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] 기재석, 강맹규, 「공구교체 횟수를 최소로 하는 가공방법의 선택문제」, 품질관리 학회지, 18(2), pp. 93−100, 1990.

[2] Kusiak, A., "Flexible Manufacturing Systems : A Structural approach," *Int. J. Prod. Res.*, *23*, pp. 1057−1073, 1985.

[3] Kusiak, A., A. Vannelli, and K. R. Kumar, "Grouping Problem in Scheduling Flexible Manufacturing Systems," *Robotica*, *3*, pp. 245−252, 1985.

[4] Kusiak, A., "The Generalized Group Technology Concept," *Int. J. Prod. Res.*, *25(4)*, pp. 561−569, 1987.

[5] Kusiak, A. and G. Finke, "Modeling and Solving the Flexible Forging Module Scheduling Problem," *Engineering Optimization*, *12(3)*, pp. 1−12, 1987.

[6] Kusiak, A. and G. Finke, "Selection of Process Plans in Automated Manufacturing Systems," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, *4(4)*, pp. 397−402, 1988.

[7] Tang, C. S., and E. V. Denardo, "Models Arising from a Flexible Manufacturing Machine, Part I : Minimization of the Number of Tool Switches," *Operations Research*, *36(5)*, pp. 767−777, 1988.

[8] Tang, C. S., and E. V. Denardo, "Models Arising from a Flexible Manufacturing Machine, Part Ⅱ : Minimization of the Number of Switching Instants." *Operations Research, 36(5)*, pp. 778−784, 1988.

부 록

[정리 1]

원 문제에서 필수 공구를 제외한 축소된 문제의 최적해도 원 문제의 최적해와 동일하다.

[증 명]

기존모형은 최적해의 가공방법을 선택하여 필요한 공구를 결정하므로 다음과 같이 변경할 수 있다.

$$\text{목적식 : } \text{Min} \sum_{t \in T} C_t S_t + \sum_{i \in P} C_i x_i \tag{13}$$

$$\text{조건식 : } \sum_{i \in P_k} x_i = 1, \quad k \in K$$

$$S_t = 0,\ 1, \quad i \in P$$

$$x_i = 0,\ 1, \quad t \in T$$

$T = T_1 + T_2$이므로 목적식 (12)는 다음과 같이 된다.

$$\text{Min} \sum_{t \in T_1} C_t S_t + \sum_{t \in T_2} C_t S_t + \sum_{i \in P} C_i x_i \tag{14}$$

가정에서 T_1은 주어지므로 $\sum_{t \in T_1} C_t S_t$는 상수와 같다. 따라서 식 (14)에서 $\sum_{t \in T_1} C_t S_t$항을 제거(식(15))해도 해의 결과는 같아진다.

$$\text{Min} \sum_{t \in T_2} C_t S_t + \sum_{i \in P} C_i x_i \tag{15}$$

즉, 식(13)의 해와 식(15)의 해는 동일하므로 필수공구를 제외한 축소된 문제의 최적해와 원 문제의 최적해는 동일하다.