다회방문을 허용하는 차량경로문제의 발견적 해법
—A Heuristic for the Vehicle Routing Problem Allowing Multiple Visits—

신 해 웅*
강 맹 규**

Abstract

This paper presents extended model for the vehicle routing prolem, which allows multiple visits to a node by multiple vehicles. Multiple visits enables us split delivery. Afer fomulating this multiple visits model mathematically, a two stage heuristic algorithm is developed by decomposition approach. This model cosists of two sub-problems. The one is fixed cost transportation problem and the other is transportation problem.

1. 서 론

차량경로문제(vehicle routing problem)는 재화나 서비스를 정규적으로 수입 혹은 배분하기 위하여 차량을 할당하고 그 운행경로를 최적으로 결정하는 문제로서 소위 수배송계획 문제의 학문적, 이론적 원형이라 할 수 있다. 차량경로문제의 일반적 최적화 목표는 운행비용의 최소화이며 제약조건은 가용 차량의 대수 및 적재용량, 수요지점의 수요량, 제반 차량운행 조건 등이다.

다회방문이란 한 수요지점의 수운량이 차량의 적재용량보다 적더라도, 필요하다면, 이를 복수의 차량에 나누어 적재한 후, 분할배달(split delivery)함을 허용한다는 의미이다. Dantzig and Ramser[3]에 의해 최초로 차량경로문제가 제시된 이후 대부분의 연구에서 공통적인 특징은 일회방문 원칙이란 제한적 전제조건을 상정하고 있다는 점이다. 이에 따라 대부분의 기존연구에서, 단일 수요지점의 수요는 차량의 적재용량을 초과하지 않는 것으로 가정하고 있으며, 초과하는 경우에는 차량 적재용량에 해당하는 수요량에 대해 반복로 차량을 배정하도록 함으로써 최적화 기회를 상실하고 있다.

Beltrami and Bodin[2]은 절약기법을 이용한 응용연구에서 이러한 문제점을 지적하고, 임의의 분할배달에 의한 해의 개선 가능성을 언급하였다. 또한 Schrage[7]은 차량경로문제 모형의 현실적 확장으로서 다회방문 모형의 연구 필요성을 지적하고 있다. 신과 강[1]은 다회방문 및 분할배달이 가능한 차량경로문제의 최적해법을 개발하였으나, 계산 소요시간이 막대하여 현실 적용이 곤란하다고 판단된다.

다회방문의 허용은 수리모형의 현실성을 보강해 줄 뿐만 아니라, 일회방문의 원칙에 비하여, 제약조건을 완화 혹은 일반화한 것으로 볼 수 있다. 일반적으로 최적화 문제에서는 제약조건이 완화될수록 해의 최적성이 좋아진다. 분할배달의 허용에 따른 주요 개선 사항은 (1) 경로비용의 절감 (2) 차량 대수의 절감 및 (3) 적재용량의 활용율 향상이다.

수요지점이 n개, 차량 적재용량이 Q, 각 수요지점의 수운량이 $Q/2+\delta$ (δ는 매우 작은 양수)인 경우에 일회방문 원칙에 의한 분할배달 불허의 경우, 소요 차량대수는 n이며 분할배달 허용의 경우는 약 n/2으로 대략 절반의 차량이면 충분하다. 반면에 적재율은 대략 2배로 증가되며 이에 따라서 경로비용의 대폭적인 절감이 가능하다.

2. 본 론

2.1 문제정의 및 정식화

단일의 본점과 N−1개의 수요지점으로 구성된 지점(node)의 집합 N, 각 지점간을 연결하는 모

*한양대학교 산업공학과 박사과정
**한양대학교 산업공학과 교수
접수 : 1991. 10. 21.

로구간(arc)의 집합 A 및 각 도로구간에 대한 차량 k의 운행비용행렬 $C=\{C(i, j, k)\}$로 구성된 네트워크에서, 주어진 M대의 차량을 이용하여 주문된 제품을 각 수요지점에 배달한다. 각 차량의 적재용량은 V(k), 각 수요지점의 주문량은 D(i)이며 이는 확정적(deterministic)이다. 본 연구에서의 차량경로문제는 아래와 같은 경로조건을 만족하며 총 운행비용을 최소화하는 방문경로 $\{X(i, j, k)\}$, 배달량 $\{Y(i, k)\}$ 및 사용 차량대수를 결정하는 것이다.

경로조건 1. 모든 차량은 본점에서 출발하고 본점으로 귀환한다.
경로조건 2. 차량 적재용량은 초과할 수 없다.
경로조건 3. 모든 수요지점의 수요량은 반드시 배달되어야 한다.
경로조건 4. 다회방문에 의한 분할배달을 허용한다.

다회방문 및 분할배달이 가능한 차량경로문제를 수리모형으로 정식화 하면 다음과 같다.

$$\text{Mimimize} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{M} C(i, j, k) \cdot X(i, j, k) \quad \cdots\cdots (1)$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{N} X(i, j, k) - \sum_{j=1}^{N} X(j, i, k) = 0 \qquad \begin{matrix} i=2, 3, \cdots\cdots, N \\ k=1, 2, \cdots\cdots, M \end{matrix} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\sum_{i=2}^{N} Y(i, k) \leq V(k) \qquad k=2, 3, \cdots\cdots, M \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\sum_{k=1}^{M} Y(i, k) = D(i) \qquad i=2, 3, \cdots\cdots, N \quad \cdots\cdots (4)$$

$$Y(i, k) \leq \begin{cases} \min\{D(i), V(k)\}, & \text{만일 } \sum_{j=1}^{N} X(i, j, k)=1\text{이면} \\ 0, & \text{그렇지 않으면} \end{cases} \quad \cdots\cdots (5)$$

$$i=2, 3, \cdots\cdots, N$$
$$k=1, 2, \cdots\cdots, M$$

$$r(i) - r(j) + N \cdot X(i, j, k) \leq N-1 \qquad \begin{matrix} i=2, 3, \cdots\cdots, N \\ j=2, 3, \cdots\cdots, N \\ k=1, 2, \cdots\cdots, M \end{matrix} \quad \cdots\cdots (6)$$

$$Y(i, k) \geq 0 \quad \cdots\cdots (7)$$

$$X(i, j, k) = 0 \text{ 또는 } 1 \quad \cdots\cdots (8)$$

단, r(i)는 임의의 실수.

식 (1)은 목적함수로서 전체 차량의 경로비용을 최소화한다. 식 (2)는 경로의 연속성 규칙, 식 (3)은 차량의 적재용량, 그리고 식 (4)는 수요지점의 주문량에 대한 제약조건이다. 식 (5)는 차량 k가 지점 i를 방문한 경우에만(즉 $\Sigma X(i, j, k)=1$인 경우), 차량 k에 의한 수요지점 i의 배달이 가능하다는 제약조건이다. 식 (6)은 Miller et al.[6]이 제시한 본점 불포함경로(subtour)의 방지식이다. 식 (7) 및 (8)은 결정변수에 대한 제약조건이다.

이상의 수리모형은 $O(NM^2)$의 변수규모를 갖는 대규모 비선형계획 문제가 되므로 이를 직접 풀기에는 곤란하다. 다음 절에서는 이 수리모형의 비선형 제약식을 선형 제약식으로 변형한 후, 원문제를 고정비 수송문제 및 외판원문제로 분해하는 방법에 대하여 설명한다.

2.2 분해해법의 유도

차량경로문제에서 만일 각 차량-수요지별 최적 배달량을 사전에 정확히 결정할 수 있다면, 문제는 정해진 배정관계에 따른 각 차량의 순회경로의 결정으로 축소될 수 있을 것이다. 즉 차량경로

문제는 배정문제와 경로문제의 두 부분문제가 결합된 형태로 파악할 수 있다. 그러나 양 부분문제의 관계는 상호의존적이므로 이를 독립적으로 분리하기는 곤란하다. 본 연구에서는 선 배정결정, 후 경로결정의 접근방식을 취하기로 한다.

그러나 배정문제의 해결을 위해서는 경로비용에 대한 사전 예측이 필요하며, 이는 Fisher and Jaikumar[4]가 제시한 근사치의 추정 모형을 사용하기로 한다. 이 경우 차량-수요지별 배달량의 결정은 고정비 수송문제(fixed cost transportation problem)로, 차량의 순회경로 결정은 외판원문제(traveling salesman problem)로 각기 모형화된다.

고정비 수송문제를 모형화하기 위해서는 C(i, k')라는 경로비용의 추정치와 X(i, k)라는 수요지점과 차량의 배정 관계를 표현하는 0-1 결정변수를 사용한다. C(i, k')는 차량 k가 수요지점 i를 해당 차량의 순회경로에 포함시킬 때 소요되는 경로비용에 대한 추정치이다. 주어진 도로망이 비대칭인 경우에 C(i, k')은 식 (9)와 같이 추정할 수 있다. 수요지점 k'는 차량 k에 기본적으로 배정된 지점으로서 차량 k의 기본지점(seed node)이라고 한다. 차량 k가 기본지점 k'이외에 지점 i까지 방문하는 비용과 기본지점 k'만을 방문하는 비용에 대한 증분비용의 최소치가 C(i, k')이다.

$$C(i, k') = \min\{[C(1, k', k) + C(k', i, k) + C(i, 1, k) - C(1, k', k) - C(k', 1, k)],\ [C(1, i, k) + C(i, k', k) + C(k', 1, k) - C(1, k', k) - C(k', 1, k)]\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

C(i, k')을 결정하기 위해서는 차량 k의 기본지점 k'을 선정하여야 하는데, 사용 차량의 대수가 M이므로 M개의 기본지점을 결정하여야 한다. 이러한 기본지점의 선정 및 할당은 여러가지 방법이 있겠으나, 본 연구에서는 수요지점이 평면상의 좌표로서 주어지고, 각 차량의 적재용량이 모두 동일하다고 간주하여 다음과 같은 방법을 사용한다. 가용한 차량 대수인 M개로 평면을 분할하여(분할의 중심은 본점이다), 분할된 각 영역에 속한 지점 중에서 가장 먼 거리의 지점을 각 차량의 기본지점으로 결정한다. 이 경우 평면에서 분할되는 위치는 분할된 영역에 속한 지점 수요량의 합이 적재용량을 초과하지 않도록 결정한다.

그림 1과 같은 예에서 적재용량이 6이라고 가정하여 기본지점의 선정 및 경로비용의 추정 과정을 설명하면 다음과 같다. 본점 1에서 지점 2를 기준으로 반시계 방향으로 각 수요지점의 주문량을 검사(scan)하면 수요지점 2, 8, 7의 주문량이 차량의 용량 한계에 도달함을 알 수 있다. 따라서 지점 2, 8, 7의 영역에서 차량 1의 기본지점은, 가장 먼 거리에 위치한 지점 8이 된다(k=1, k' 8). 동일한 요령으로 차량 2의 기본지점은 지점 5가 되며(k=2, k'=5), 차량 3의 경우 지점 3이 기본지점이 된다(k=3, k'3).

그림 1에서 C(1, 7, 1)=3, C(7, 1, 1)=2, C(1, 8, 1)=7, C(8, 1, 1)=8, C(7, 8, 1)=6, C(8, 7, 1)=7이라 가정하면 차량 1에 지점 7을 배정하는 경우의 추정 비용 C(7, 8)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C(7, 8) &= \min\{[C(1, 7, 1) + C(7, 8, 1) + C(8, 1, 1) - C(1, 8, 1) - C(8, 1, 1)],\ [C(1, 8, 1) + C(8, 7, 1) + C(7, 1, 1) - C(1, 8, 1) - C(8, 1, 1)]\} \\ &= \min\{[3+6+8-7-8],\ [7+7+2-7-8]\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

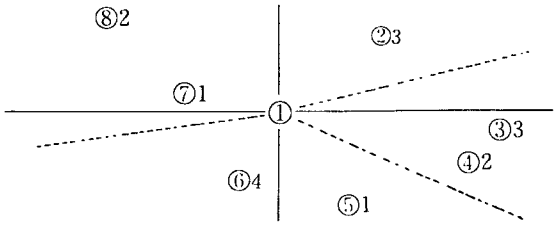

그림 1. 기본지점의 선정 방법(지점 옆의 숫자는 주문량)

이상과 같은 C(i, k') 및 X(i, k)를 이용하여 원문제로부터 고정비 수송문제 부분을 분리하면 식 (10)－식 (13)과 같다. 이 모형이 일반적인 수송문제와 다른 점은 비용함수의 형태가 수송량 Y(i, k)에 비례하는 변동비용이 아니라는 점이다. 목적식 (10)과 비선형 제약식 (13)에서 알 수 있듯이 고정비용만의 수송문제가 된다.

$$\text{Minimize} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} C(i, k')\, X(i, k) \quad \cdots\cdots (10)$$

Subject to

$$\sum_{i=2}^{N} Y(i, k) \leq V(k) \qquad k=1, 2, \cdots\cdots, M \quad \cdots\cdots (11)$$

$$\sum_{k=1}^{N} Y(i, k) = D(i) \qquad i=2, 3, \cdots\cdots, N \quad \cdots\cdots (12)$$

$$X(i, k) = \begin{cases} 1, & Y(i, k) > 0\text{이면} \\ 0, & Y(i, k) = 0\text{이면} \end{cases} \qquad \begin{matrix} i=2, 3, \cdots\cdots N \\ k=1, 2, \cdots\cdots, M \end{matrix} \quad \cdots\cdots (13)$$

그러나 아래와 같은 정리에 의하여 비선형 제약식 (13)은 선형 제약식 (14)로 동등하게 (equivalently) 변형할 수 있으므로 위 모형은 정수선형계획법 문제로 변형할 수 있다.

$$Y(i, k) - \min\{D(i), V(k)\} \cdot X(i, k) \leq 0 \quad \cdots\cdots (14)$$

(단 X(i, k)는 0 또는 1)

〈정리〉

비선형 제약식 (13)과 선형 제약식 (14)는 동등하다.

증명

만일 Y(i, k)>0이라면 X(i, k)>0이어야 하므로 X(i, k)=1이 되며, Y(i, k)=0이라면 식 (14)는 X(i, k)≥0이 되고 문제의 목적 함수가 비용 최소화이므로 X(i, k)=0이 된다는 것이 보장된다.

역으로 만일 X(i, k)=1이면 Y(i, k)≤min{D(i), V(k)}이다, 반면에 X(i, k)=0이면 Y(i, k)≤0인데, Y(i, k)는 비음(nonnegative)이므로 Y(i, k)=0임을 보장할 수 있다.

주어진 차량경로문제를 해결하기 위해서는 우선 식 (10), (11), (12) 및 식 (14)로 이루어진 선형 정수계획 문제를 풀어야 한다. 여기서 구한 해는 차량의 경로에 대한 정보는 제공하지 않으며, 차량과 수요지점의 배정관계 및 배달량 만을 결정하여 줄 뿐이다.

주어진 차량경로문제의 완전한 해를 얻기 위해서는 고정비 수송문제의 해에 의해 각 차량별로 배정된 수요지점들에 대하여 외판원문제의 해법절차를 적용하여 차량별로 최소비용의 순회경로를 결정해야 한다. 본 연구에서 고정비 수송문제는 LINDO package[8]을 이용하여 해결하며, 외판원문제의 해법절차는 Little et al.[5]의 분지한계법을 사용한다.

2.3 해법절차 및 수치예제

이상 2.2절에서 설명한 개념을 바탕으로 차량경로문제에 대한 발견적 해법절차를 정리하면 다음과 같다.

〈해법절차〉

단계 1) 경로비용의 추정

주어진 문제의 도로구간별 운행비용 C(i, j, k) 및 경로비용의 추정 방법을 이용하여 각 차량 k의 기본지점 k'을 선정하고 C(i, k')을 추정한다.

단계 2) 고정비 수송문제의 풀이

단계 1)에서 구한 C(i, k')을 이용하여 고정비 수송문제를 식 (10), (11), (12) 및 (14)와 같

이 정식화 하여 해를 구한다.

단계 3) 외판원문제의 풀이

단계 2)에서 각 차량별로 할당된 수요지점에 대하여 외판원문제의 해법절차를 적용하여 각 차량의 최적 순회경로를 결정한다.

이상의 해법절차의 적용과정을 수치예제를 통하여 설명하면 다음과 같다.

〈수치예제〉

A회사는 공장(지점 1)에서 생산된 제품을 회사의 각 대리점(지점 2−6)에 2대의 차량을 이용하여 배달하고자 한다(그림 2 참조). 차량의 적재용량은 각각 8ton이며 각 대리점의 수요량은 표 1과 같다. 각 지점 간의 운행비용은 표 2와 같다(차량의 운행비용은 동일하다). 두대의 차량에 대한 최소비용의 순회경로 및 배달량을 구하라.

표 1. 대리점의 주문량

대리점	지점 1	지점 2	지점 3	지점 4	지점 5	지점 6
주문량	−	3 ton	4 ton	2 ton	3 ton	2 ton

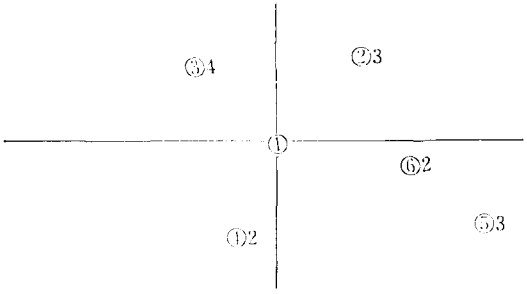

그림 2. 수치예제의 지점 위치도(지점 옆의 숫자는 주문량)

표 2. 차량 운행비용(원)

from\to	1	2	3	4	5	6
1	∞	23	13	27	46	28
2	23	∞	21	50	51	27
3	13	21	∞	32	57	38
4	27	50	32	∞	45	43
5	46	51	57	45	∞	24
6	28	27	38	43	24	∞

(풀이 과정)

단계 1) 경로비용의 추정

차량 1의 기본지점은 2, 차량 2의 기본지점은 5이다. 각 차량에 대한 경로비용의 추정치를 구하면 다음과 같다.

$C(3,\ 2)=11,\ C(2,\ 5)=120,\ C(4,\ 2)=100,\ C(3,\ 5)=116,$

$C(5,\ 2)=120,\ C(4,\ 5)=118,\ C(6,\ 2)=78,\ C(6,\ 5)=98.$

단계 2) 고정비용 수송문제의 구성 및 풀이

단계 1)의 추정비용 $C(i,\ k')$을 이용하여 고정비용 수송문제를 정식화 하면 다음과 같다.

$$\text{MINIMIZE} \quad 11X_{31}+100X_{11}+120X_{51}+78X_{61}+120X_{22}+116X_{32}+118X_{12}+98X_{62}$$

SUBJECT TO

$$Y_{21}+Y_{31}+Y_{11}+Y_{51}+Y_{61}\leq 8$$
$$Y_{22}+Y_{32}+Y_{12}+Y_{52}+Y_{62}\leq 8$$
$$Y_{21}+Y_{22}=3$$
$$Y_{31}+Y_{32}=4$$
$$Y_{11}+Y_{12}=2$$
$$Y_{51}+Y_{52}=3$$
$$Y_{61}+Y_{62}=2$$
$$Y_{21}-3X_{21}\leq 0$$
$$Y_{31}-4X_{31}\leq 0$$
$$Y_{11}-2X_{11}\leq 0$$
$$Y_{51}-3X_{51}\leq 0$$
$$Y_{61}-2X_{61}\leq 0$$
$$Y_{22}-3X_{22}\leq 0$$
$$Y_{32}-4X_{32}\leq 0$$
$$Y_{12}-2X_{12}\leq 0$$
$$Y_{52}-3X_{52}\leq 0$$
$$Y_{62}-2X_{62}\leq 0$$
$$Y_{ik}\geq 0$$
$$X_{ik}=0,\ 1$$

이 문제를 LINDO package를 이용하여 정수계획법으로 풀면 해는 다음과 같다. .

$$X_{12}=X_{52}=X_{62}=1,\ X_{21}=X_{31}=0,$$
$$Y_{21}=3,\ Y_{31}=4,\ Y_{12}=2,\ Y_{52}=3,\ Y_{62}=2$$

차량 1은 지점 2와 3을 방문하며 배달 수량은 각각 3ton 및 4ton이고, 차량 2는 지점 4, 5 및 6을 방문하며 배달 수량은 각각 2ton, 3ton, 2ton임을 보이고 있다.

단계 3) 외판원문제의 풀이

차량 1에 대하여 지점 2와 3을 방문하는 경로, 차량 2에 대하여 지점 4, 5 및 6을 방문하는 최소비용의 경로를 구하기 위하여, 각 차량에 대하여 Little et al.[7]의 분지한계법을 적용한다.

분지한계법의 해로부터 차량 1의 경로는 (1−2−3−1)이며 경로비용은 23+21+13=67(원)이다. 마찬가지로 차량 2의 경로는 (1−4−5−6−1)이며 경로비용은 27+45+24+28=124(원)이다. 그러므로 총비용은 67+124=191(원)이다.

3. 결 론

본 연구의 주제는 다회방문 및 분할배달이 가능한 차량경로문제의 발견적 해법절차의 개발이다. 본 연구에서 정식화된 수리모형은 다회방문의 개념을 구현하여, 수리모형의 현실성을 보강하였으며, 이에 의하여 차량경로문제에 대한 기존의 수리모형보다 (1) 총 운행비용의 감소, (2) 소요 차량 대수의 감소, (3) 적재 용량 활용율의 증가라는 측면에서 개선효과를 확인하였다.

해법절차의 개발을 위하여 정식화된 수리모형을 고정비 수송문제와 외판원문제로 분해하며, 고정비 수송문제의 유도를 위하여 경로비용의 추정 개념과 차량의 기본지점이라는 개념을 활용하였다. 고정비 수송문제는 차량이 방문할 수요지점과 배달량을 결정하는 과정이며, 외판원문제는 최소비용의 방문경로를 결정하는 과정이다.

참 고 문 헌

[1] 신해웅, 강맹규, 「분할배달이 가능한 차량경로문제의 최적 해법」, 경영과학, 제6권, 제1호, pp. 29-40, 1989.

[2] Beltrami, E. and L. Bodin, "Network and Vehicle Routing for Municipal Waste Collection," *Networks, 4(1)*, pp. 65-94, 1974.

[3] Dantzing, G. B. and J. H. Ramser, "The Truck Dispatching Problem," *Management Science, 6(1)*, pp. 80-91, 1959.

[4] Fisher, M. L. and R. Jaikumar, "A Generalized Assignment Heuristic for Vehicle Routing," *Networks, 11*, pp. 109-114, 1981.

[5] Little, J. D. C., K. G. Murty, D. W. Sweeney, and C. Karel, "An Algorithm for the Traveling Salesman Problem," *Oper. Res., 11*, pp. 972-989, 1963.

[6] Miller, C., A. Tucker, and R. Zelmin, "Integer Programming Formulation of Travelling Salesman Problems," *Journal of the association of Computing Machinery, 7*, pp. 326-332, 1960.

[7] Schrage, L., "Formulation and Structure of More Complex/Realistic Routing and Scheduling Problem," *Networks, 11(2)*, pp. 229-232, 1981.

[8] Scharge, L., *User's Manual : Linear, Integer and Quadratic Programming with LINDO*, The Scientific Press, 1984.