두개의 공통납기에 대한 작업완료시간의 W. M. A. D. 최소화에 관한 연구
—Minimizing the Weighted Mean Absolute Deviation of Job Completion Times about Two Common Due Dates—

오 명 진*
이 상 도**

Abstract

This paper considers a non preemtive single processor scheduling problem in which each set have the two common due dates.

The objective of the problem is to minimize the weighted mean absolute deviation of job completion times about such two common due dates under the assumption that each job has a different weight.

Such a job sequence is an W-shaped sequence. We propose three heuristic solution methods based on several dominance conditions. Numerical examples are presented. The performance comparison is made among three heuristic scheduling procedures.

1. 서 론

일정계획문제는 많은 양의 job을 처리할 때 각 job에는 처리시간과 납기가 있어, 수행측도에 적합한 처리순서를 구하는 문제이다.

그러나 일정계획 이론은 실제의 생산현장 적용에 있어서는 수많은 종류와 수량의 생산설비가 있고, 처리해야 할 가공의 종류도 많고 또한 작업시간이 확률적으로 변동하는 상황 하에서 최적화를 수리적으로 행하는 것은 거의 불가능하다. 그래서 일정계획에 있어서 시뮬레이션(simulation)이나 발견적기법이 많이 이용되고 있다.

공통납기(common due date)를 갖는 작업들(jobs)의 완료시간 W. M. A. D. (Weighted Mean Absolute Deviation)을 최소화하는 일정계획문제는 편차에 대한 수행측도로써 컴퓨터 시스템의 화일조직에 있어서 온라인 시스템의 반응시간 편차를 최소화하는 문제, 적정재고 관리문제 및 부품이 공급되는 MRP(Material Requirements Planning) 등에 응용될 수 있다. 특히 이 문제는 JIT(Just-In-Time) 생산방식을 채택하고 있는 자동차 조립공장에 있어서는 매우 중요하다[3]. Kanet[8]는 작업들이 가중치(벌과금)를 같은 비율로 두고 MAL (Mean Absolute Lateness)의 합을 최소화하는 알고리즘을 제시하였고, Hall[8]은 동일한 가중치가 부과되는 상황하에서 단일기계와 복수기계의 완료시간 편차를 최소화하는 문제를 다루었으며, Kanet[9]의 모순되는 점을 보완하여 해의 확장성을 나타냈다. Eilon and Chowdhury[6]는 완료시간 분산을 최소화하는 문제는 V형이 되어야 하는 것을 보여주고 Sundararaghavan and Ahmed[13]는 m—병렬기계문제로 확장하여 근사적인 방법을 취급하였으며Emmons[7]는 조기완료와 납기지연에 따라서 서로 다른 벌과금이 부과되는 경우의 공통납기를 갖는 복수기계 스케듈링 문제를다루었다.

종래의 연구에서는 한개의 공통납기를 갖는 경우에 대해서만 연구되어 왔고 [4][6][10][14], 두개의 공통납기를 갖는 경우는 그다지 연구되어 있지 않다. 공통납기가 두개인 경우, 즉 각각의 공통납기를 가진 두개 그룹의 작업들을 일정계획할 경우 만약 이 납기들간의 差가 두 그룹의 makespan보다 크다면 각각 독립적으로 일정계획할 수 있으나 makespan보다 작을 경우는 제한적인 문제가 된다. 이 경우 Min[15]은 W—형이 최적임을 증명하였다.

*경남전문대학 공업경영과 부교수
**동아대학교 산업공학과 교수
접수 : 1991. 9. 10.

따라서 본 연구에서는 각각의 공통납기를 갖는 두개 그룹의 작업들이 뚜렷한 서로 다른 가중치를 갖는 경우에 단일기계에 있어서 작업의 완료시간의 W. M. A. D. 를 최소화하는 최적 스케듈의 모형을 정식화하고 이 문제에 대한 우월 특성을 기초로 하여 세 가지의 발견적기법(heuristic method)을 제시하고 이 세 가지 발견적 기법에 대한 수치예를 제시하고 수치실험을 통하여 해의 분석과 유효성을 보이고자 한다.

2. 모형화

2.1 기호 설명

각 기호에 대한 설명은 다음과 같다.

N_i : n_i개의 독립 작업들의 집합, $N_i = \{1, 2, \cdots, n_i\}$ $i=1, 2$
P_{ij} : i그룹의 작업 j의 가공시간
C_{ij} : i그룹의 작업 j의 완료시간
d_i : i그룹의 공통납기
E_i : i그룹의 조기완료된 작업 집합, $\{j \mid C_{ij} \le d_i\}$
T_i : i그룹의 납기지연된 작업 집합, $\{j \mid C_{ij} > d_i\}$
W_{ij} : i그룹의 작업 j의 가중치
MS : $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j \in N_i} P_{ij}$
S_i : 집합 N_i에서 임의의 n_i 작업들의 순서
G_i : i그룹에서 처리순서가 未定인 작업들의 집합
$|E_i|$: E_i 집합에서의 작업의 갯수
$|T_i|$: T_i 집합에서의 작업의 갯수
[ij] : 집합 E_i에서의 j번째 집합
(ij) : 집합 T_i에서의 j번째 집합

2.2 전제조건과 목적함수

모형 설정에 있어서 다음과 같은 조건을 가정한다.

(1) 각 작업의 준비시간은 작업의 가공시간에 독립이다.(즉, 가공시간에 포함)
(2) 기계는 동시에 두 개 이상의 작업들을 처리할 수 없다.
(3) 일단 어떤 작업이 가공을 시작하면 가공이 완료될 때까지 다른 작업을 가공할 수 없다.
(4) 모든 작업들은 언제든지 가공 가능한 상태이다.
(5) d_i는 d_i 이전에 작업들을 일정계획하는데 충분한 여유를 둘 수 있도록 충분히 크게 한다.(즉, $d \ge MS$)

본 연구의 목적함수는 두 개의 공통납기에 대한 작업들의 완료시간의 가중치 평균 절대편차(W. M. A. D.)를 최소화한다. 목적함수는 다음을 최소화하는 일정계획 S를 구하는 것이다.

$$Z(S) = \mathrm{Min} \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\sum_{j=1}^{n_i} W_j \mid C_{ij} - d_i \mid}{\sum_{j=1}^{n_i} W_{ij}} \right] \tag{1}$$

3. 우월특성(Dominance Properties)

W. M. A. D. 문제는 NP-Complete로 알려진 W. M. F(Weighted Mean flow time) 문제만큼 최소한 hard 문제로써 NP-Complete 문제이다[11]. 이러한 현실상황 하에서 W. M. A. D. 문제를 해석적으로 행하는 것은 불가능하다. 그러므로 발견적기법이 좋은 가능해를 줄 수 있으므로 발견적 기법의 해를 개발하기 위한 우월한 특성은 다음과 같이 주어진다.

[정리 1(P1)]

최적스케듈에서 어떤 두개 작업들 사이에 여유시간(idle time)은 존재하지 않는다.

[증 명]

d 이전 혹은 d 이후에 idle time이 삽입된 어떤 일정 S를 생각하자. 만일 여유시간이 d 이전(이후)에 일어났다고 하면 일정에서 여유시간 앞으로(뒤로) 이동함으로써 여유시간은 제거된다. 모든 작업들의 완료시간은 d에 가까이 접근하므로써 S스케듈은 개량되어진다.

[정리 2(P2)]

만일 E에서 작업들이 WLPT(Weighted Largest Processing Time)순서이면 스케듈은 우월하다.

$$\frac{P_{[1]}}{W_{[1]}} \geq \frac{P_{[2]}}{W_{[2]}} \geq \cdots\cdots \geq \frac{P_{[m_1]}}{W_{[m_1]}}$$

역시 T에서 작업들이 WSPT(Weighted Shortest Processing Time) 순서에 있으면 스케듈은 우월하다. [1] [15]

$$\frac{P[m_2]}{W[m_2]} \leq \cdots\cdots \leq \frac{P[2]}{W[2]} \leq \frac{P[1]}{W[1]}$$

[증 명]

Weighted V-shape가 아닌 순서 S를 생각하자. 위치 i와 i+1에서 작업들의 쌍이 존재한다면

(a) $\frac{P_i}{W_i} < \frac{P_{i+1}}{W_{i+1}}$, $i \in B$

(b) $\frac{P_i}{W_i} > \frac{P_{i+1}}{W_{i+1}}$, $i \in A$

job i와 i+1을 순서에서 교체한 새로운 순서를 S'라 하면 S'의 목적값이 S보다 더 작은 것을 보면 충분하다.

(a)에 대해

$$Z(S)-Z(S') = (\sum_{k=1}^{i-1} W_k)P_i + (\sum_{k=1}^{i} W_k)P_{i+1} - [(\sum_{k=1}^{i-1} W_k)P_{i+1} + (\sum_{k=1}^{i-1} W_k + W_{i+1})P_i]$$
$$= W_i P_{i+1} - W_{i+1} P_i > 0$$

(b)에 대해

$$Z(S)-Z(S') = (\sum_{k=1}^{n} W_k)P_i + (\sum_{k=1}^{n} W_k) P_{i+1} - [(\sum_{k=1}^{n} W_k) P_{i+1} + (W_i + \sum_{k=i+2}^{n} W_k)P_i]$$
$$= W_{i+1} P_i - W_i P_{i+1} > 0$$

따라서 job i와 i+1을 교체함으로써 목적함수값은 감소된다.

[정리 3(P3)]

$d_1^* > 0$과 $d_2^* > 0$인 최적공통납기 d_1^*와 d_2^*는 존재하고 두개의 공통납기 중 최소한 하나는 정확하게 하나의 작업완료에 일치해야 한다[15].

[증 명]

C_i^1과 C_j^2를 주어진 순서 S에 대해 JS_1과 JS_2에서 완료시간이라 하면,

$$\frac{W_i(X_i^- - X_j^+)}{\Sigma W_i} = \frac{W_i(d_1 - C_i^1)}{\Sigma W_i}, \quad i \in JS_1 \tag{4.1}$$

$$\frac{W_j(Y_j^- - Y_j^+)}{\Sigma W_j} = \frac{W_i(d_2 - C_j^2)}{\Sigma W_j}, \quad j \in JS_2 \tag{4.2}$$

$$\delta = d_2 - d_1, \ (d_2 > d_1) \tag{4.3}$$

위의 식을 다시 정리 하면

$$X_i^- - X_i^+ = d_1 - C_i^1, i \in JS_1 \tag{4.4}$$

$$Y_j^- - Y_j^+ = d_2 - C_j^2, j \in JS_2 \tag{4.5}$$

$$\delta = d_2 - d_1, (d_2 > d_1) \tag{4.7}$$

(δ는 주어진 Constant)

목적함수식 (1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{Min} \quad \frac{\Sigma \{ \sum_{i=1}^{n=1} W_i (X_i^+ + X_i^-) + \sum_{j=1}^{n=2} (Y_j^+ + Y_j^-) \}}{\Sigma_n \in_M W}$$

$$\begin{aligned} \text{S.t} \quad & d_1 + X_i^+ - X_i^- = C_i^1, \ i = 1, 2, \cdots\cdots, n_1 \\ & d_1 + Y_j^+ - Y_j^- = C_j, \ j = 1, 2, \cdots\cdots, n_2 \\ & d_1 \geq 0, \ X_i^+, \ X_i^- \geq 0, \ Y_j^+, \ Y_j^- \geq 0 \\ & C_j = C_j^2 - \delta \end{aligned}$$

순서 S에서 d_1의 값이 제조에 고정된 임의의 일정 계획 SSε를 고정하려면 식 (4.4)−(4.6)의 정의에 의하여 목적값은 다음과 같으며 $d_1=0$에 대해 최소가 된다.

$$\begin{aligned} & X_i^+ = Ci^1, \ X_i^- = 0, \ i \in JS, \\ & Y_j^+ = 0, \ Y_j^- = (d_2 - C_j^2), \ j \in E_2 = \{ j \mid C_j^2 \leq d_2 \} \\ & Y_j^+ = (C_j^2 - d_2), \ Y_j^- = 0, \ j \in T_2 = \{ j \mid C_j^2 > d_2 \} \end{aligned}$$

그러면 SS_0의 목적값은 다음과 같다.

$$Z(SS_0) = \frac{\sum_{i=1}^{n=1} W_i C_i^1 + \sum_{j \in E_2} W_j (d_2 - C_j^2) + \sum_{j \in T_2} W_i (C_j^2 - d_2)}{\Sigma_n \in_N W}$$

임의의 작은 ε에 대해 d_1을 값 ε에 고정된 다른 일정 계획 SS$_\varepsilon$를 고려하면 유사하게 $d_1 = \varepsilon$에서 최소로 되는 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & X_i^+ = 0, \ X_i^- = \varepsilon - C_i^1, \quad i \in E_1(\varepsilon) = \{ i \mid C_i^1 \leq d_1 \} \\ & X_i^+ = C_i^1 - \varepsilon, \ X_i^- = 0, \quad i \in T_1(\varepsilon) = \{ i \mid C_i^1 > d_1 \} \\ & Y_j^+ = 0, \ Y_j^- = d_2 + \varepsilon - C_j^2, \ j \in E_2(\varepsilon) = \{ j \mid C_j^2 \leq d_2 \} \\ & Y_j^+ = C_j^2 - d_2 - \varepsilon, \ Y_j^- = 0, \ j \in T_2(\varepsilon) = \{ j \mid C_j^2 > d_2 \} \end{aligned}$$

SSε의 목적값은 다음과 같다.

$$Z(SS\varepsilon) = \frac{\Sigma_{i=E_1(\varepsilon)} W_i (\varepsilon - C_i^1) + \Sigma_{i=T_1(\varepsilon)} W_i (C_i^1 - \varepsilon) + \Sigma_{j=E_2(\varepsilon)} W_j (d_2 + \varepsilon - C_j^2) + \Sigma_{j=T_2(\varepsilon)} W_j (C_j^2 - d_2 - \varepsilon)}{\Sigma_n \in_N W}$$

$$E_2(\varepsilon) - E_2 = T_2 - T_2(\varepsilon)$$

라 두면

$$N(\varepsilon) = E_2(\varepsilon) - E_2 = T_2 - T_2(\varepsilon)$$

에 의해 SS_0와 SS$_\varepsilon$의 목적 값 차이는 다음과 같이 주어진다.

$$Z_0(S) - Z_\varepsilon(S)$$

$$= \frac{\sum_{i=E1(\varepsilon)} W_i C_i^1 - \sum_{i=E1(+\varepsilon)} W_i (\varepsilon - C_i^1) - \sum_{i=T1(\varepsilon)} W_i (-\varepsilon) - \sum_{i=E1(\varepsilon)} W_i \varepsilon - \sum_{j=N(\varepsilon)} W_j (d_2 + \varepsilon - C_j^2)}{\Sigma_n \in_N W}$$

$$- \sum_{j=n(\varepsilon)} W_j \varepsilon + \sum_{j=N(\varepsilon)} W_j (C_j^2 - d_2)$$

$$=\frac{\sum_{i=E1(\varepsilon)}^{2} W_iC_i^1+\sum_{j=N(\varepsilon)}^{2} W_j(C_j^2-d_2)+W_i\,|\,T_{1(\varepsilon)}\,|\,\varepsilon-(W_i\,|\,E_1(\varepsilon)\,|+W_j\,|\,N(\varepsilon)\,|\,)\varepsilon}{\sum_{n\in N}W}$$

$$\geq\frac{2(\sum_{i=E1(\varepsilon)} W_iC_i^1+\sum_{j=N(\varepsilon)} W_j(C_j^2-d_2))-(W_i\,|\,E_{1(\varepsilon)}\,|+W_j\,|\,N(\varepsilon)\,|\,)\varepsilon}{\sum_{n\in NW}}$$

ε의 값에 대해

$$\varepsilon\leq\frac{2(\sum_{i=E1(\varepsilon)} W_iC_i^1+\sum_{j=N(\varepsilon)} W_j(C_j^2-d_2)}{W_i\,|\,E_1(\varepsilon)\,|+W_j\,|\,N(\varepsilon)\,|}$$

$$Z(SS_0)-Z(SS_\varepsilon)>0$$

이다. 이것은 $d_1=0$인 일정계획 SS_0가 $d_1=\varepsilon$인 일정계획 SS_ε에 의해 우월하다는 것을 나타낸다. 여기서 기저변수의 수는 n_1+n_2이다. 모든 i에 대해 $d_1=C_i^1$ 혹은 j에 대해 $d_2=C_j^2$가 아니면 모든 i와 j에 대해 다음과 같다.

$$X_i^- - X_i^+ = d_1 - C_i^1 \gtreqless 0$$
$$Y_j^- - Y_j^+ = d_2 - C_j^2 \gtreqless 0$$

이것을 각 i에 대해 X_i2와 X_i^-의 최소 하나는 제로가 아니고 각 j에 대해 Y_j^+와 Y_j^-는 동시에 제로가 아니다. 그래서 최적해에서 양의 값을 갖는 변수의 총수는 최소 n_1+n_2+1이다. 만일 두개의 공통납기중 최소한 하나가 작업완료 시간에 일치하지 않으면 $d_1>0$에서 가능해는 존재하지 않는다.

주어진 해의 공간에서 unbounded인 것을 볼 수 있고 목적함수의 값을 최소화하는 해를 찾을 수 있으므로 최적해를 갖는 가능해는 존재한다.

[정리 4 (P4)]

작업들의 순서중에서 P_i/W_i가 가장 작은 작업을 첫번째 가공해야 한다.

[증 명]

[정리 3]을 만족하고 [정리 4]는 만족하지 않는 순서 S를 생각하자. 그러면 P_k/W_k가 가장 큰 작업은 순서에서 마지막 위치에 있어야 한다. S에서 첫번째와 마지막 작업들을 교체함으로써 일정계획이 개량되는 것을 볼 수 있다.

[정리 5 (P5)]

정리 (P1), (P2), (P3), (P4)를 만족하는 W-형 일정계획은 최적해를 포함하는 가능해이다.

[증 명]

단일 공통납기와 할당된 작업집합에 대해 두개의 작업순서를 고려하면 하나의 작업완료시간은 공통납기에 일치하고 다른 순서는 그런 작업을 가지지 않는다. 하나의 작업완료시간은 [정리 3]에서 공통납기에 일치한다. 모든 j에 대해 $W_j=1$인 경우에 집합에서 가장 작은 작업 보다 선행하는 모든 작업들은 LPT 순서이고 가장 작은 작업 보다 후속하는 모든 작업들은 SPT 순서이면 다른 가능 일정계획 보다 우월하다.

작업의 완료시간이 공통납기에 일치하지 않는 순서를 가정한다. i에 의해 작업 집합을 나타낸다. 이 경우에서 $P_s>\max\{P_v, P_k\}$인 v, s, k 3개 작업을 고려하자. 우월한 일정계획들은 S=(……, v, s, k, ……)형이 되지 않는 것을 보이면 충분하다. 먼저 $d_1<C_v$ 혹은 $d_1>C_k$의 가능한 경우를 고려하면 S는 [정리 2]에 의해 제외된다. $C_v<d_1<C_s$인 다른 경우를 고려하면 Fig. 1에 나타내어진다.

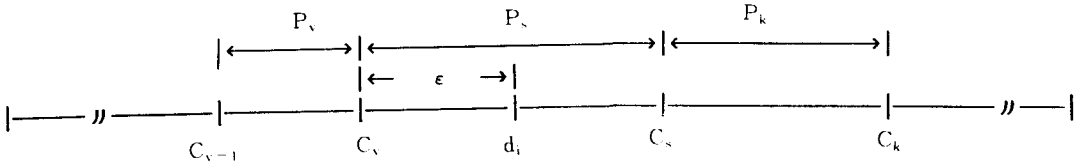


Fig. 1. situation of $C_v<d_1<C_s$

다음과 같은 경우는 작업들 s와 v(혹은 작업들 s와 k)가 서로 교체함으로써 가능하다.

(1) $P_s \leq P_v + \epsilon$

두개의 작업들 s와 v의 교체에 의한 목적함수 값의 변화는

$(d_i - C_v) - (d_i - C_{v-1} - P_s) = P_s - P_v$

(2) $P_s > P_w + \epsilon$

두개 작업들 s와 v의 교체에 의한 목적함수 값의 변화는

$(C_s - d_i) - (C_v + P_k - d_i) = P_s - P_k > 0$

(4) $P_k < \epsilon$

두개 작업들 s와 k의 교체에 의한 목적함수 값의 변화는

$(C_s - d_i) - (d_i - C_v - P_k) = (P_s - \epsilon) - (\epsilon - P_k) = P_s + P_k - 2\epsilon$

조건 (1)와 (3)에서 일정계획 S는 두개의 작업 v와 s, s와 k를 서로 교체함으로써 개량되어진다. 조건 (2)에서 $P_v - P_s + 2\epsilon > 0$이면 s는 제외된다. 조건 (4)에서 $P_v - P_s + 2\epsilon < 0$이면 s는 제외된다. 조건 $P_v - P_s + 2\epsilon > 0$을 포함한다.

일정계획 S는 조건 (2)와 (4)의 어느 것에 의해 개량된다. 그래서 그러한 작업순서 S는 최적이 될 수 없다. 그러므로 W-형 일정계획은 다른 것보다 유리하다.

4. 발견적 기법의 해법

두 개의 공통납기를 갖는 경우에 작업들의 완료시간의 W.M.A.D.를 최소화하는 문제에 대한 최적일정계획을 얻는 것은 이론적으로는 가능하지만 실제에서는 계산시간이 과다하게 소요되므로 짧은 시간안에 비교적 쉽게 실현가능한 스케듈을 얻는 3가지 발견적 기법들을 제시한다.

4.1 발견적기법

〈발견적 기법 1(H1)〉

STEP 0) 각 그룹의 n_i 작업들을 P_{ik}/W_{ik}의 내림차순으로 나열, i=1, 2

STEP 1) G1에서 P_{1k}/W_{1k}가 가장 큰 작업 k를 선택 early set(E_1)에 할당

STEP 2) G2에서 P_{2k}/W_{2k}가 가장 큰 작업 k를 선택하여
만약 $P_{2k} > DD$이면 T_2에 할당하고
아니면 E_2에 할당한다.

STEP 3) G1=0 and G2=0이면 goto STEP 7
G1=0이면 goto STEP 5
G1에서 다음으로 P_{1k}/W_{1k}가 가장 큰 작업 k를 선택한다.
만약 $P_{1k} > DD$이면 E_1에 작업 k를 할당하고
아니면 E_1의 $\sum_{j \in E_1} W_{1j}$와 T_1의 $\sum_{j \in T_1} W_{1j}$를 계산한다.

STEP 4) 만약 $\sum_{j \in E_1} W_{1j} < \sum_{j \in T_1} W_{1j} + W_{1k}$이면 E_1의 마지막 위치에 작업 k를 할당
아니면 T_1에서 첫번째 위치에 작업 k를 할당하고 $DD = DD - P_{1k}$

STEP 5) G1=0 and G2=0이면 goto STEP 7
G2=0이면 goto STEP 3
G2에서 다음으로 P_{2k}/W_{2k}가 가장 큰 작업 k를 선택한다.
만약 $P_{2k} > DD$ 이면 T_2에 작업 k를 할당
아니면 E_2의 $\sum_{j \in E_2} W_{ij}$와 T_1의 $\sum_{j \in T_2} W_{ij}$를 계산한다.

STEP 6) 만약 $\sum_{j \in E_2} W_{2j} < \sum_{j \in T_2} W_{2j} + W_{2k}$이면 E_2의 마지막 위치에 작업 k를 할당
$DD = DD - P_{2k}$
아니면 T_2에서 첫번째 위치에 할당
goto STEP 3

STEP 7) 만약 DD=0이면 STOP
아니면 그룹 1의 일정을 DD만큼 이동한 다음 목적함수(Z)값을 계산하고 그룹 2의 일정을 DD만큼 이동한 다음 목적함수(Z)값을 계산하여 이중 최소가 되는 일정선택.

〈발견적 기법 2(H2)〉

STEP 0) 각 그룹의 n_i 작업들을 P_{ik}/W_{ik}의 내림차순으로 나열, i=1, 2
SW1=0, SW2=1

STEP 1) G1=0 and G2=0이면 goto STEP 5
G1=0이면 goto STEP 2
만약 SW1=1이면 goto STEP 3
G1에서 P_{1k}/W_{1k}이 가장 큰 작업 k를 선택하여 E_1의 마지막 위치에 할당하고 $SW_1=1$

STEP 2) G1=0 and G2=0이면 goto STEP 5
G2=0이면 goto STEP 3
만약 SW2=1이면 goto STEP 4
G2에서 P_{2k}/W_{2k}가 가장 큰 작업 k를 선택하여
만약 $P_{2k}>DD$ 이면 T_2에서 첫번째 위치에 작업 k를 할당하고, SW2=1
아니면 E_2에서 마지막 위치에 작업 k를 할당하고, $DD=DD-P_{2k}$, SW2=0

STEP 3) G1=0 and G2=0이면 goto STEP 5
G1=0이면 goto STEP 4
만약 SW1=0이면 goto STEP 1
G1에서 P_{1k}/W_{1k}가 가장 큰 작업 k를 선택하여
만약 $P_{1k}>DD$이면 E_1에서 마지막 위치에 작업 k를 할당하고, SW1=1
아니면 T_1에서 첫번째 위치에 작업 k를 할당하고, $DD=DD-P_{1k}$, SW1=0

STEP 4) G1=0 and G2=0이면 goto STEP 5
G2=0이면 goto STEP 1
만약 SW2=1이면 goto STEP 2
G2에서 P_{2k}/W_{2k}이 가장 큰 작업 k를 선택하여 T_2의 첫번째 위치에 할당하고 $SW_2=0$
go to STEP 1

STEP 5) 만약 DD=0이면 STOP
아니면 그룹 1의 일정을 DD만큼 이동한 다음 목적함수(Z)값을 계산하고 그룹 2의 일정을 DD만큼 이동한 다음 목적함수(Z)값을 계산하여 이중 최소가 되는 일정 선택.

〈발견적 기법 3(H3)〉

STEP 0) 각 그룹의 n_i 작업들을 P_{ik}/W_{ik}의 내림차순으로 나열, i=1, 2

STEP 1) G1에서 P_{1k}/W_{1k}이 가장 큰 작업 k를 선택 E_1의 마지막 위치에 할당

STEP 2) G2에서 P_{2k}/W_{2k}가 가장 큰 작업 k를 선택
만약 $P_{2k}>DD$ 이면 T_2의 첫번째 위치에 할당
아니면 E_2의 마지막 위치에 할당

STEP 3) G1=0 and G2=0이면 goto STEP 7
G1=0이면 goto STEP 5
G1에서 다음으로 P_{1k}/W_{1k}가 가장 큰 작업 k를 선택
만약 $P_{1k}>DD$ 이면 E_1의 마지막 위치에 할당
아니면 E_1의 마지막 위치에 놓고 $Z(B)=\sum_{i\in E1}|C_{ij}-d_i|$을 계산하고
T_1의 첫번째 위치에 놓고 $Z(A)=\sum_{i\in T1}|C_{ij}-d_i|$을 계산.

STEP 4) 만약 $Z(B) \le Z(A)$이면 E_1의 마지막에 할당
$Z(B) > Z(A)$이면 T_1의 첫번째에 할당, $DD = DD - P_{1k}$

STEP 5) G1=0 and G2=0이면 goto STEP 7
G2=0이면 goto STEP 3
G2에서 다음으로 P_{2k}/W_{2k}가 가장 큰 작업 k를 선택
만약 $P_{2k} > DD$ 이면 T_2의 마지막 위치에 할당
아니면 E_2의 마지막 위치에 놓고 $Z(B) = \sum_{j \in E_2} | C_{2j} - d_2 |$을 계산하고
t_2의 첫번째 위치에 놓고 $Z(A) = \sum_{j \in T_2} | C_{2j} - d_2 |$을 계산.

STEP 6) 만약 $Z(B) \le Z(A)$이면 E_2의 마지막에 할당, $DD = DD - P_{2k}$
$Z(B) > Z(A)$이면 T_2의 첫번째에 할당
goto STEP 3

STEP 7) 만약 DD=0이면 STOP
아니면 그룹 1의 일정을 DD만큼 이동한 다음 목적함수(Z) 값을 계산하고
그룹 2의 일정을 DD만큼 이동한 다음 목적함수(Z)값을 계산하여 이중 최소가 되는 일정 선택.

4.2 수치예제

각각의 공통납기를 가진 두 그룹의 작업을 처리하는 단일기계 문제에 대한 제안된 발견적 기법을 예증하기 위한 데이타들은 다음과 같다.

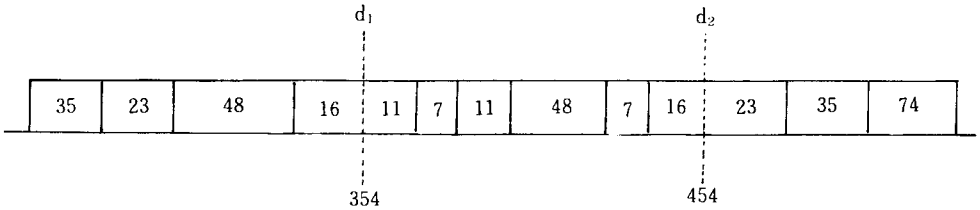
Table 1. Example Data

	n_i	1	2	3	4	5	6	7	due date
1	P_{1j}	48	11	23	7	16	35	—	354
	W_{1j}	17	8	4	3	12	1	—	
	P_{1j}/W_{1j}	2.82	1.38	5.75	2.33	1.33	35		
2	P_{2j}	74	23	48	7	11	16	35	454
	W_{2j}	16	14	10	3	2	9	11	
	P_{2j}/W_{2j}	4.63	1.64	4.80	2.33	5.50	1.78	3.18	

〈H1〉

Table 2. Step-to Steop Results from Heuristic 1

Step	G	K^*	P_{k*}	DD	ΣW_j	$\Sigma W_j + W_k$	E_1	T_1	E_2	T_2
1	1	6	35	100	0	1	6			
2	2	5	11	89	0	2	6		5	
3	1	3	23	89	1	4	6−3		5	
4	2	3	48	41	2	10	6−3		5−3	
5	1	1	48	41	5	17	6−3−1		5−3	
6	2	1	74	41			6−3−1		5−3	1
7	1	4	7	34	22	13	6−3−1	4	5−3	1
8	2	7	35	34			6−3−1	4	5−3	7−1
9	1	2	11	23	22	21	6−3−1	2−4	5−3	7−1
10	2	4	7	16	12	30	6−3−1	2−4	5−3−4	7−1
11	1	5	16	16	22	33	6−3−1−5	2−4	5−3−4	7−1
12	2	6	16	0			6−3−1−5	2−4	5−3−4−6	7−1
13	2	2	23	0			6−3−1−5	2−4	5−3−4−6	2−7−1

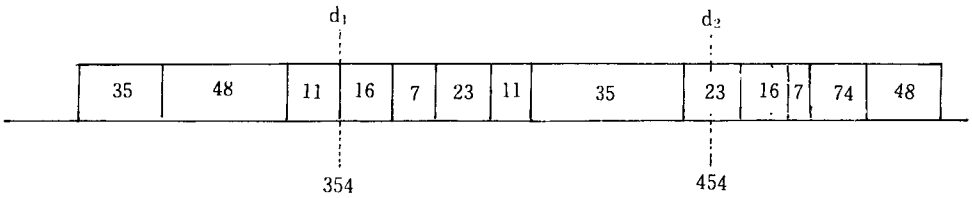


$Z^* = 70.55$

〈H2〉

Table 3. Step-to-Step Results from Heuristic 2

Step	k^*	P_{k*}	DD	Assign	E_1	T_1	k^*	P_{k*}	DD	Assign	E_2	T_2
1	6	35	100	E	6							
2							5	11	89	E	5	
3	3	23	66	T	6	3						
4							3	48	66	T	5	3
5	1	48	66	E	6−1	3						
6							1	74	66	T	5	1−3
7	4	7	59	T	6−1	4−3						
8							7	35	24	E	5−7	1−3
9	2	11	59	E	6−1−2	4−3						
10							4	7	24	T	5−7	4−1−3
11	5	16	8	T	6−1−2	5−4−3						
12							6	23	16	T	5−7	6−4 1−3
13							2	16	23	T	5−7	2−6−4−1−3

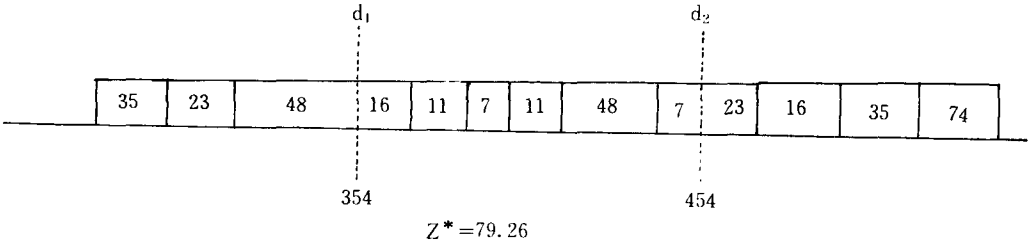


$Z^* = 79.49$

〈H3〉

Table 4. Step-to-Step Results from Heuristic 3

Step	k^*	P_{k*}	DD	Z(A)	Z(B)	E_1	T_1	k^*	P_{k*}	DD	Z(A)	Z(B)	E_2	T_2
1	6	35	100			6								
2								5	11	89			5	
3	3	23	89	23	23	6−3								
4								3	48	41	48	48	5−3	
5	1	48				6−3−1								
6								1	74	41			5−3	1
7	4	7	34	140	7	6−3−1	4							
8								7	35	34			5−3	7−1
9	2	11	23	152	18	6−3−1	2−4							
10								4	7	16	62	88	5−3−4	7−1
11	5	16	0	167	87	6−3−1	5−2−4							
12								6	16	0			5−3−4	6−7−1
13								2	23	0			5−3−4	2−6−7−1



4.3 수치실험

Table 5의 데이터에 대한 수치예제에서 발견적기법 1의 Z*(S)값이 70.55로 다른 기법보다도 우수한 것을 보여주고 있으나 해의 유효성을 평가하기 위해 Table 5의 데이터를 가지고 각 발견적기법들에 적용하여 상호 비교하고자 한다.

Table 5. Random data

Data set	1	2	3	4	5	6	7	8
Processing time	U(1, 30)	U(1, 30)	U(1, 50)	U(1, 50)	U(1, 75)	U(1, 75)	U(1, 100)	U(1, 100)
Weight factor	U(1, 10)	U(1, 20)	U(1, 10)	U(1, 20)	U(1, 10)	U(1, 20)	U(1, 10)	U(1, 20)

가중치와 작업시간은 각각 일양분포에서 랜덤으로 Table 5와 같이 추출한다. 단 작업시간과 가중치는 서로 독립이다. 편의상 작업들은 다음과 같이 6가지로 분류하여 평가하였다.

작업집합(G1) : 20, 30, 40, 50, 75, 100
작업집합(G2) : 22, 29, 40, 55, 70, 100

이 데이터 집합에 대한 수치실험의 결과는 Table 6과 같다.

Table 5. Random data

DS H	DS_1 (30, 10)	DS_2 (30, 20)	DS_3 (50, 10)	DS_4 (50, 20)	DS_5 (75, 10)	DS_6 (75, 20)	DS_7 (100, 10)	DS_8 (100, 20)	total
H1	5	6	5	5	2	0	0	0	23
H2	1	0	0	1	2	5	6	4	19
H3	0	0	1	0	2	1	0	2	6

Table 6에서 보면 발견적기법 1(H1)이 다른 기법보다 최적 일정계획을 생성하는 빈도가 많다. 그러나 작업시간이 증가하여 가중치와 차이가 크면 클수록 발견적기법 2(H2)가 월등히 좋고 차이가 작으면 발견적기법 1(H1)이 월등히 좋아지는 경향이 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 각 작업들이 가중치와 각각의 공통납기를 가지는 두개의 작업군(job class)의 단일기계 WMAD를 최소화 하는 일정계획에 관한 문제를 고찰하였다. 이 문제는 NP-Complete 문제이기 때문에 최적 일정계획을 구하는데 실제로 계산 시간이 과다하게 소요되어, 비교적 짧은 시간으로 간단하게 실행 가능한 3가지 발견적 기법들을 제시하고, 이러한 기법들에 대한 수치 예를 나타내었다. 비교 분석의 결과 가중치 요소에 더 강조한 발견적기법 1(H1)이 우수하게 나타나고 있음을 보여 주었다. 그러나 가중치와 작업시간의 차이가

크면 클수록 발견적기법 2(H2)가 월등히 좋아지는 경향이 있다. 본 연구의 시발점으로 여러개의 공통납기를 갖는 일반적인 모형의 연구에 도움이 되리라 생각하며 앞으로 연구 과제로써 두개 공통납기를 갖는 병렬기계의 경우로 확장하여 연구하고자 한다.

참고문헌

[1] 吳明鎭, 崔鍾德, 「공통납기에 대한 완료시간의 W.M.A.D. 최소화에 관한 연구」, 韓國工業經營學會, 第13卷, 第21輯, 1990, pp. 143~151.

[2] 吳明鎭, 李相道, 「병렬기계에 있어서 공통납기 결정과 일정계획」, 韓國工業經營學會, 第14卷, 第23輯, 1991, pp. 27~36.

[3] Bagchi, U., Chang, Y. L., and Sullivan, R. S., "Minimizing Absolute and Squared Deviations of Completion Times with Different Earliness and Tardiness Penalties and a Common Due Date," *Naval Res. Logis. Quart., 34*, 1987, pp. 739~751.

[4] Bagchi, U., Sullivan, R. S., and Chang, Y. L., "Minimizing Mean Absolute Deviation of Completion Times about a Common Due Date," *Naval Res. Logis. Quart., 33*, 1986, pp. 227~240.

[5] Baker, K. R., *Introduction to Sequencing and Scheduling*, New York : John Wiley & Sons, 1974.

[6] Eilon, S., and Chowdhury, I. G., "Minimizing Waiting Time Variance in the Single Machine Problem", *Management Sci., 23*, 1977, pp. 567~575.

[7] Emmons, H., "Scheduling to a Common Due Date on Parallel Uniform Processors," *Naval Res. Logis. Quart., 34*, 1987, pp. 803~810.

[8] Hall, N. G., "Single and Multiple-Processor Models for Minimizing Completion Time Variance," *Naval Res. Logis. Quart., 33*, 1986, pp. 49~54.

[9] Kanet, J. J., "Minimizing the Average Deviation of Job Completion Times About a Common Due Date," *Naval Res. Logis. Quart., 28*, 1981, pp. 643~651.

[10] Kanet, J. J., "Minimizing Variation of Flow Time in Single Machine Systems," *Management Sci., 27*, 1981, pp. 1453~1459.

[11] Panwalkar, S. S., Smith, M. L., and Seidmann, A., "Common Due Date Assignment to Minimize Total Penalty for Penalty for the One Machine Scheduling Problem" *Operations Research, 30*, 1982, pp. 391~399.

[12] Sidney, J. B., "Single Machine Scheduling with Earliness and Tardiness Penalties," *Operations Research, 25(1)*, 1977, pp. 62~69.

[13] Sundararaghavan, P. S., and Ahmed, M. U., "Minimizing the Sum of Absolute Lateness in Single Machine and Multimachine Scheduling," *Naval Res. Logis. Quart., 31*, 1984, pp. 325~333.

[14] Szwarc, W., "Single-Machine Scheduling to Minimize Absolute Deviation of Completion Times from a Common Due Date," *Naval Res. Logis. Quart., 36*, 1989, pp. 663~673.

[15] 민정익, 「공통납기의 조기 또는 지연 달성에 따른 벌과금 부여를 고려하는 단일설비 일정계획」, 한국과학기술원 석사학위논문, 1989.