制約條件과 事前確率이 고려된 線型費用模型의 修正檢査政策
—Rectifying Inspection of Linear Cost Model with a Constraint and a α-Optimal Acceptance Sampling—

李 度 炅*
李 根 熙**

Abstract

Various linear cost models have been proposed that can be used to determine a sampling plan by attributes. This paper is concerned with this sampling cost model when the probability that the number of nonconforming item is smaller than the break-even quality level is known. In addition to this situation, a constraint by AOQL is considered. Under these conditions, optimal sampling plan which minimize the average cost per lot is suggested.

1. 서 론

검사의 입장에서 로트크기 N의 묶음들이 있을 때, 궁극적인 결정사항은 이들 로트에 대해 각기 합격 혹은 불합격 판정을 내리는 것이 된다. 이러한 판정에서 검사한 시료의 크기에 따라 무검사 합격·불합격, 샘플링검사에 의한 합격·불합격, 그리고 전수검사에 의한 합격·불합격으로 분류할 수 있다. 이들 여러 형태의 검사정책 중 그 선택에는 샘플링비용, 검사비용, 재가공비용 등의 제비용과 검사시간, 공정상태 등이 고려되어야 한다. 여기서는 전체공정들 중에서 검사정책의 선택으로 인하여 결정되어지는 비용항목에 대해서 그 대상으로 한다.

본 연구에서 언급하는 대상은 계수형 샘플링검사이며, 검사에서 불합격한 로트에 대해서는 전수검사를 실시하는 계수선별형 샘플링검사이다. 이때 검사단계에서의 선택으로 인해 공정에 발생가능한 전체비용을 최소화하는 검사방식(n, c)의 설정을 목적으로 하며 목적식인 전체 비용함수는 선형모형으로서 구성한다. 검사방식의 결정에 있어서의 가정으로는 다수 로트의 평균불량률이 임계점을 넘지 않을 확률을 사전에 알 수 있다는 것이다.

검사단계에서 품질측면의 요구조건으로서 검사 후의 불량률의 한계 즉, 검사를 거친 다수 로트의 품질보증을 위해 제약식이 추가되는 경우, 이 조건을 만족시키면서 전체비용을 최소화하는 검사방식을 생각할 수 있다.

계수선별형 샘플검사방식에서의 ATI(Average Total Inspection)는 다음과 같다.

$$ATI = n + (N-n)E(c+1;\ n,\ p)$$

단, $E(c+1;\ n,\ p) = 1 - B(c;\ n,\ p)$

$$B(c;\ n,\ p) = \sum_{i=1}^{c} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

p; 공정불량률

N; 로트크기

*金烏工大 產業工學科 專任講師
**漢陽大學校 產業工學科 敎授
접수일 1991. 7. 18.

2. 선형비용모형

ATI는 로트가 검사에서 합격할 경우 그 값을 n, 불합격할 경우 N을 취하는 함수형태의 기대값이다. 그러므로 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$g=g(x,\ k;\ N,\ n,\ c,\ p)=\begin{cases} n, & \text{if } x\leq c \\ N, & \text{if } x>c \end{cases} \quad \cdots\cdots (1)$$

단, k－로트내의 총불량품수
n－시료크기
x－시료내에 포함된 불량품수
c－합격판정갯수

함수 g에 대하여 전체를 변수처리하여 G라 하면, E(G)=ATI가 된다. Hald(1981)는 그의 저서에서 식(1)이 단지 평균총검사갯수만을 나타내는 것을 넘어서 검사에 관한 전체비용을 반영할 수 있도록 비용에 관한 선형모형으로 일반화시켰다. 이 때 비용함수는 다음과 같다.

$$C_g(x,\ k;\ N,\ n,\ c,\ p)$$
$$=\begin{cases} nS_1+xS_2+(N-n)A_1+(k-x)A_2 & \text{if } x\leq c \\ nS_1+xS_2+(N-n)R_1+(k-x)R_2 & \text{if } x>c \end{cases}$$

단, S_1－단위제품당 샘플링 및 검사비용
S_2－샘플링 중 발견된 단위불량품당 재가공 혹은 교환비용
A_1－합격된 로트내의 검사되지 않은 (N－n)과 관련된 단위제품당 비용
A_2－합격된 로트내의 미발견 불량품으로 인한 단위불량품당 실패비용
R_1－불합격 로트의 미검사 단위제품당 검사비용
R_2－불합격 로트의 미검사 제품 중 포함된 단위불량품당 재가공 혹은 교환비용

단위로트당 전체비용의 기대치는

$$E_{x,\ k}[C_g(X,\ K;\ N,\ n,\ c,\ p)]$$
$$=K(N,\ n,\ c,\ p)$$
$$=nK_s(p)+(N-n)[K_a(p)+\{K_r(p)-K_a(p)\}E(c+1;\ n,\ p)] \quad \cdots\cdots (2)$$

단, $K_s(p)=S_1+S_2p$
$K_a(p)=A_1+A_2p \quad \cdots\cdots (3)$
$K_r(p)=R_1+R_2p$

식 (2)는 $K(N,\ n,\ c,\ p)=nK_s(p)+(N-n)[K_a(p)B(c;\ n,\ p)+K_r(p)\{1-B(c;\ n,\ p)\}$로 정리될 수 있다. 식 (3)에서 여러 비용항목 중 고정부인 $K_s(p)$를 제외한 나머지에 의해서 로트의 합격 및 불합격의 기준점 즉, $K_r(p)-K_a(p)=0$으로 만드는 임계불량률(break-even quality level) p_r은 다음과 같다.

$$p_r=\frac{R_1-A_1}{A_2-R_2}$$

만일 불량률 p가 알려진 경우, 식 (2)에 의한 전체비용함수에서 이를 최소로 하는 검사정책을 결정할 수 있다.

$p<p_r$이면 무검사 로트 채택이 요구되며
$p>p_r$이면 무검사 로트 기각이 된다.
위의 경우에 대한 로트당 최소비용의 기대치는 다음과 같다.

$$K(N,\ n,\ c,\ p)=\begin{cases} N\ K_a(p), & \text{if } p<p_r \\ N\ K_r(p), & \text{if } p>p_r \end{cases}$$

위의 식 (3)에 대하여 $p=k/N$으로부터 k의 관점에서 나타내면, $K_s(k)=S_1+S_2k/N$, $K_a(k)=A_1+A_2k/N$, $K_r(k)=R_1+R_2k/N$이 된다. 그러므로 샘플링검사를 통하여 합격된 경우의 비용 $C_A(k, n)$와 샘플링검사를 통하여 불합격된 경우의 비용 $C_R(k, n)$은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} C_A(k, n)&=nK_s(k)+(N-n)K_a(k) \\ C_R(k, n)&=nK_s(k)+(N-n)K_r(k) \end{aligned} \quad \cdots\cdots (4)$$

위의 두 비용함수 $C_A(k, n)$과 $C_R(k, n)$이 같아지는 임계불량품수는 $k_0=N(R_1-A_1)/(A_2-R_2)$이 된다. 이때 로트내의 불량품수 k가 임계불량품수 k_0보다 작을 확률을 "α"라 정의하면,

$$\alpha=p_r(K\leq k_0)$$

단, 이 때 K는 관찰치가 k인 확률변수이며 일반적으로 N과 p를 매개변수로 하는 이항분포를 취한다.

3. 임계불량품수에 의한 선형비용모형

특정 검사방식 (n, c) 및 k에 대한 로트당 비용의 기대치는 다음과 같다.

$$K(N, n, c, k)=C_A(k, n)H(C; N, n, k)+C_R(k, n)[1-H(C; N, n, k)] \quad \cdots\cdots (5)$$

단, H( )는 누적 초기하분포함수

Collani[1]는 Hald의 선형비용모형에 대하여 비용계수들의 의미를 달리하여 전체비용을 피할 수 없는 비용 K_u와 전체비용에서 K_u를 제외한 나머지 비용 K_a로 나누고 이를 최소화하는 검사방식을 제시하였다. 이들 항목은 다음과 같다.

$$K_u(k)=\begin{cases} a_1(N-k)+b_1k, & \text{if } 0\leq k\leq k_0 \\ a_2(N-k)+b_2k, & \text{if } k_0\leq k<N \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K_a(k)&=K(N, n, c, k)-K_u(k) \\ &=\begin{cases} d_1+d_2n, & 0\leq k\leq c \\ N(a_2-a_1)(k_0-k)[1-H(c; N, n, k)]/k_0+d_1+d_2n, & c<k\leq k_0 \\ N(a_2-a_1)(k-k_0)H(c; N, n, k)/k_0+d_1+d_2n, & k_0\leq k<N-n+c-1 \\ d_1+d_2n, & N-n+c-1\leq k<n \end{cases} \end{aligned}$$

단 a_1, b_1, a_2, b_2, d_1, d_2 Collani[1] 참조.

Collani는 위의 K_a에서의 비용계수들의 내용에 관계없이 전체비용을 최소화하는 사전확률이 고려된 검사방식은 각각의 합격판정갯수 c에 대하여 아래의 식을 만족하는 시료크기 n이 되어야 함을 보였다.

$$\text{Min}\,|D(n)|=|m_L(k_1)-m_R(k_2)| \quad \cdots\cdots (6)$$

$$m_L(k)=\alpha(k_0-k)[1-H(c; N, n, k)]$$

$$m_R(k)=(1-\alpha)(k-k_0)H(c; N, n, k)$$

식 (6)에서의 k_1, k_2는 각기 $m_L(k)$ 및 $m_R(k)$를 최대로 하는 값이며, $K_a(k)$를 최소화하는 관점에서 minimax 비용문제의 주 대상은 α값을 아는 것이 된다. 위의 경우에 대한 Collani의 예제는 다음과 같다.

[예제 1]

주어진 다음의 계수값에 의하여 전체 비용함수를 최소화하는 검사방식을 구함.

$a_1=-1.0$, $a_2=0$, $b_1=8.9$, $b_2=-0.1$, $d_1=0$, $d_2=0.38$, $\alpha=0.6$, $N=1000$

[풀이]

c=6에 대해 D(63)=−0.383, D(64)=−0.030, D(65)=0.317 그러므로 해당 합격판정갯수에 대한 부분최적 검사방식은 (n, c)=(64, 6). c=7에 대해 D(73)=−0.246, D(74)=0.058, D(75)=0.356 그러므로 해당 합격판정갯수에 대해 (n, c)=(74, 7)이 부분최적. 동일한 방식에 의해 c=8에 대해 D(83)=−0.148, D(84)=0.119, D(85)=0.383 그러므로 (n, c)=(84, 8)이며 이들 부분최적검사방식들 간의 목적식 비교에 의한 전체최

적검사방식은 $(n^*, c^*)=(74, 7)$이 된다.

4. 제약조건이 고려된 전체비용 최소화 검사방식

검사방식의 결정에 있어서 검사자측은 검사에 의한 전체비용의 최소화에 가장 큰 관심이 있겠지만, 검사 후 로트들의 평균불량률에 대해 어느 정도의 한계는 넘지 않는다는 보장이 필요한 경우가 일반적이다. 이러한 품질보증의 경우는 크게 두 가지 경우로 나누어지며 검사 후의 전체로트의 평균불량률을 보증하는 평균출검품질한계(AOQL)를 지정하는 경우와 개개로트에 대해 로트 허용불량률(LTPD) 수준의 로트가 검사에서 합격할 확률이 특정한 값을 넘지 않도록 하는 한도품질수준(LQL; Limiting Quality Level)을 지정하는 경우가 그것이다. 각 경우에 대해서는 다음 사항이 요구된다.

(1) AOQL방식 : 지정된 N과 AOQL에 대하여

$$\max_p AOQ \leq AOQL \quad \cdots\cdots (7)$$

단, $AOQ = pH(c; N, n, k)$

(2) LQL방식 : 지정된 N, β(소비자 위험) 그리고 LTPD에 대하여

$$OC = H(c; N, n, k) \leq \beta$$

위의 두 가지 품질보증의 경우 각기 이들 조건을 만족하는 검사방식은 매우 많을 수 있으며 이들 중 평균검사갯수 ATI를 최소화하는 시료크기를 선택하게 된다.

3절의 Collani에 의한 검사방식결정에서는 각각의 합격판정갯수에 대하여 거의 모든 시료크기($c \leq n \leq N$)를 대상으로 하는 $|D(n)|$의 계산이 필요하게 된다. 이 값들의 비교에 의해 해당 합격판정갯수에 대한 부분최적 검사방식이 결정되며 전체비용을 최소화하는 최종 검사방식은 다시 이들 부분최적 검사방식의 비교에 의해 결정된다. 본절에서와 같이 AOQL 혹은 LQL에 의한 로트의 불량률에 대한 품질보증 즉, 제약조건이 필요한 일반적인 경우 부분최적 검사방식의 결정에 대해서 위와 같은 지루하고 많은 계산량의 반복절차를 이론적으로 완전 생략할 수 있다. 제약조건이 주어지는 경우 역시 이를 만족하는 방식은 무수히 많겠으나 특정 합격판정갯수에 대해서는 시료크기가 바로 결정됨으로써 이 때의 (n, c)가 부분최적 검사방식이 된다. 부분최적 검사방식의 시료크기의 계산은 탁상용 계산기로써도 가능하지만 이에 대해 이미 여러 전산 프로그램(by Guenther[2], Peter[5] 등) 및 도표가 작성되어 있다.

이와같이 이론적으로 고정되는 시료크기는 그 값이 정수라는 추가적 제약조건에 의해 그 경계영역에서는 선택이 필요하게 되며 주어진 품질보증의 제약을 정확하게 만족할 수는 없다. 이 때의 선택기준은 기존의 $|D(n)|$에 의한 최적검사방식을 적용시킬 수 있다. 따라서 본 연구에서 제시한 품질보증의 제약식에 의한 부분최적 검사방식의 결정에서는 단 2회의 $|D(n)|$ 계산만이 필요하게 된다. 이후 전체비용의 최소화 검사방식은 목적식 $K(N, n, c, k)$를 최소화하는 것이 된다.

5. 수치예제

앞에서 제시된 두 가지 품질보증 제약식 중 AOQL에 대해 Guenther가 제시한 예제를 사용한다. 단, 주어진 불량률이 1%이고 AOQL이 2%인 검사방식을 불량률 5%, AOQL 3%로 수정한다.

[예제 2]

로트크기 N=1000에 대해 주어지는 계수값은 다음과 같다.

$R_1=S_1=0.02$, $R_2=S_2=5.00$, $A_1=0$, $A_2=10.00$ 검사후의 평균불량률이 3%를 넘지 않게 하기 위한 로트당 평균비용을 최소화하는 검사방식을 설정한다. 단 $\alpha=0.7$, 불량률은 5%이다.

[풀이]

기존의 AOQL 사용도표를 이용하여 식 (7)의 조건을 만족하는 각각의 합격판정갯수에 대한 부분검사방식 (n, c)는 다음과 같다.

(11.115, 0), (27.237, 1), (43.703, 2), (60.798, 3), (78.171, 4), (95.514, 5), (112.741, 6), (129.728, 7), (146.418, 8), (162.736, 9), (178.712, 10), (194.26, 11), (209.44, 12), (224.20, 13), …… 이들 중 계산결과에 의한 결정적인 부분에 대해서만 $|D(n)|$과 최적검사방식을 보인다.

(194.26, 11)에 대해 (194, 11)과 (195, 11)의 각기 $|D(194)| = |m_L(k_1) - m_R(k_2)|$에서 $m_L = 0.7(4-50)[1-H(11; 1000, 194, 50)]$, $m_R = 0.3(50-4)H(11; 1000, 194, 50)$ 그러므로 $|D(194)| = 21.31272$. 동일한 방법에 의해 $|D(195)| = 21.41024$ 따라서 $c=11$에 대한 부분최적 검사방식은 (194, 11)이 된다.

(209.44, 12)에 대해 (209, 12)의 $|D(209)| = 21.26672$, $|D(210)| = 21.35688$ 그러므로 (209, 12) 채택

(224.20, 13)에 대해 (224, 13)의 $|D(224, 13)| = 21.25018$, $|D(225)| = 21,33296$ 그러므로 (224, 13) 채택

위의 부분최적 검사방식 중 전체비용함수 K(N, n, c, k)를 최소로 하는 (224, 13)이 로트당 평균검사비용을 최소로 하는 최종검사방식이 된다.

6. 결 론

본 연구에서는 검사단계에서 발생가능한 제비용들에 대해 이들 전체비용을 최소화하는 검사방식 (n, c)에 대하여 고려해 보았다. 여러 검사방식 중에서 계수선별형을 대상으로 하였으며, 이때 요구되는 검사 후의 불량률에 대한 제약식이 AOQL로 주어질 때 이 제약조건하에서의 비용 최소화를 다루었다. Hald의 선형비용모형에 대하여 본 연구가 Collani의 검사방식에 이어 그의 샘플링 이론의 범주에 또 하나의 추가적 전개대상이 될 수 있으리라 생각한다.

참 고 문 헌

1. Collani, E. V., "The α-Optimal Acceptance Sampling Scheme." *Journal of Quality Technology, 18(1)*, 63~66, 1986.
2. Guenther, W. C., Sampling Inspection in SQC, *Griffin's Statistical Monographs and Courses, 37*, Charles Griffin and Company, London, 1977.
3. Guenther, W. C., "Rectyfying Inspection and the Hald Linear Cost Model." *Journal of Quality Technology, 17(2)*, 81~85, 1985.
4. Hald, A., *Statistical Theory of Sampling by Attributes*. Academic Press, New York, 1981.
5. Peter, R. N., "Computation of Some Common Discrete Distribution." *Journal of Quality Technology, 17(3)*, 160~166, 1985.