"V-shape"를 이용한 흐름작업 일정계획
-Flow Shop Scheduling Problems By using V-Shape Property-

노 인 규*
이 정 환**

Abstract

This paper is concerned with a flow-shop scheduling problem for all jobs having the common due date using V-Shape penalty cost function for earliness and lateness.

The objective of the paper is to develop an efficient heuristic scheduling algorithm for minimizing total penalty cost function and for determining the optimal common due date.

In addition, the between-job-delay for two machines are considered for developing the algorithm.

A numerical example is given for illustrating the proposed algorithm.

1. 서 론

대부분의 일정계획 문제는 작업 총처리시간(makespan), 평균처리시간(mean flow time), 순수 납기지연(tardiness)를 최소화하는 문제들을 취급하였다.

그러나 근래에 와서는 일본 도요다 자동차 시스템인 적시적정생산체제(JIT)의 보급에 따라 작업을 일찍 완료하더라도 납품을 하지못하고 공통 납기일까지 보관하는 경우가 많다. 이와같은 경우 조기완료비용(early penalty cost)를 고려한 작업일정계획들이 많이 다루어지고 있다[4,16].

본 연구는 흐름생산(flow shop)에서 조기완료와 납기지연비용을 고려한 작업일정계획 문제를 다룬다. 이 때의 목적식은 총벌과금을 최소화하는 작업순서를 구하는 것이다.

Sidney[17]는 단일기계에서 각기 다른 납기에서의 작업일정계획 문제에 대해서 조기 완료/납기지연의 개념을 처음으로 취급하였다.

Kanet[9]는 공통의 납기와 순서계획을 다룬 MAL(Mean Absolute Lateness)의 단일기계 문제를 제시했으며 그 후에 Bagchi[1,2]는 계속해서 이를 수리적으로 입증하였다. Hall[7]은 단일기계와 복수기계에서의 완료시간 편차의 최소화 문제를 다루었으며, Prabddha et al[14]와 Emmon[6]는 공통납기를 가진 복수기계의 경우를 다루었다.

그러나 현재까지의 연구는 단일기계 및 복수기계에서 조기완료/납기지연을 고려한 작업일정계획 문제만을 다루었다.

본 연구는 공통납기를 가진 특수한 경우의 흐름생산(Flow Shop)으로 두대의 기계를 대상으로 하였다. 작업과 작업 사이의 지연(Between Job Delay)과 최종 기계작업에서의 작업완료시간을 고려한 조기완료/납기지연 비용을 최소화하는 작업일정계획을 V-Shape를 이용하여 구한다.

앞으로 제2장에서는 문제의 이해를 위해 V-Shape, 기계사이의 지연, 흐름작업에 대한 전제조건을 기술하였으며 제3장에서는 모델설정 및 해법을 위해서 부호 정의, 모델수립 및 그 해법을 구체적인 내용과 수치예를 제시하였다. 마지막으로 4장에서는 결론을 유도하였다.

2. 문제의 정의

2.1 V-Shape 성질

Merten[11]은 n개의 작업(job)을 가진 단일기계 문제에서 처리시간 분산(flow time variance)과 대기시간

*한양대 산업공학과 교수
**동의대 산업공학과 교수
접수일 : 1991. 5. 10.

분산관계(wating time variance)를 분석하였다.

처리시간 분산의 어떤 일정계획을 R

대기시간 분산의 어떤 일정계획을 R'라 하면

만약 처리시간분산 R가 가장 적은 처리시간 분산을 가져온다면 그 역인 R'도 가장 적은 대기시간 분산을 가져온다.

$$R=(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{n-1},\ i_n)$$
$$R^*=(i_1,\ i_n,\ i_{n-1},\ \cdots,\ i_3,\ {}_2)$$

처리시간 분산인 R은 처리시간 분산 R*와 동일하다. Schrage[15]은 5개 작업의 최적 처리시간 분산 일정계획을 개발했다. Eilon과 Chowdhury[5]는 Schrage의 결과를 강화시켜서 최적처리시간분산 일정계획은 V 형태가 되어야 한다. 즉 가장 작은 가공시간 앞의 작업은 내림차순(descending order, LPT)으로 일정계획되고, 가장 작은 가공시간 뒤의 작업은 오름차순(ascending order, SPT)으로 일정계획 된다.

2.2 흐름작업의 전제조건

흐름작업에서의 전제조건은 다음 6가지 조건의 특징을 갖고 있다[3].

(1) 첫번째 기계에서의 모든 작업들은 시간 '0'에서 처리 가능하다.
(2) 각 작업은 m개 공정으로 구성되며, 각 공정은 각기 다른 기계에서 처리된다.
(3) 공정의 준비시간은 작업순서에 독립적이며 가공시간에 포함된다.
(4) 작업의 내용은 사전에 알려져 있다.
(5) m개의 다른 기계는 계속적으로 이용 가능하다.
(6) 개별공정은 도중에 중단됨이 없이 처리된다.

2.3 지연의 형태

이 흐름 생산은 특수한 경우의 것으로 몇가지 제약 조건을 갖는 주문 생산과 같은 것이다. 모든 작업은 동일한 설비를 이용하여야 한다. 또한 각 작업은 동일한 순서로 이들 설비를 통하여 처리되어야 하며 하나의 작업은 현재 작업중인 설비에서 마칠 때까지는 다음 설비에서 처리될 수 없다.

이와 같은 흐름 작업에서의 지연은 다음과 같이 3가지가 있다.

(1) Run in Delay(◎) : 첫번째 기계에서 작업중 다음 기계에 작업물이 도착되지 않아서 발생하는 대기
(2) Between Job Delay(#) : 기계와 기계사이에서 작업시간의 바란스가 맞지않아서 발생하는 대기
(3) Run Out Delay(*) : 마지막 작업이 마지막 기계에 작업 중일 때 그 앞의 기계에 작업이 없어서 발생하는 대기.

본 연구에서는 두번째 지연인 Between Job Delay를 고려대상으로 하였다.

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다[10].

<table>
<tr><td>M/C1</td><td>J1</td><td colspan="2">J2</td><td colspan="2">J3</td><td colspan="5">*</td></tr>
<tr><td>M/C2</td><td>◎</td><td>J1</td><td>#</td><td colspan="3">J2</td><td colspan="3">J3</td><td>*</td></tr>
<tr><td>M/C3</td><td colspan="3">◎</td><td colspan="3">J1</td><td>#</td><td>J2</td><td>#</td><td>J3</td></tr>
</table>

그림 1 흐름 작업에서 대기 형태

3. 수학적 모델설정 및 해법

3.1 부호 정의

본 연구에서 모델전개를 위한 부호는 다음과 같이 정의한다.

$N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$: n개의 독립된 작업의 집합

π : 집합 N에서 n개 작업의 n! 순서 집합

S : π에서 임의 순서

P_j : 작업 j의 가공처리 시간(processing time), $j \in N$

R_j : 작업 j의 출발시간(starting time)

C_j : 작업 j의 가공완료시간(completion time), $j \in N$

d : 공통납기

$B = \{j \mid C_j \leq d\}$: 조기완료된(early completed) 작업의 집합

$A = \{j \mid C_j > d\}$: 지연된 작업(tardy jobs)의 집합

$n_1 = |B|$

$n_2 = |A|$

단 $|B|$, $|A|$는 집합 B, A의 갯수(cardinalty)를 나타냄

[j] : 집합 B에서 j번째 집합

(j) : 집합 A에서 j번째 집합

W_j : 작업 j에 관련된 가중치, $j \in N$

$MS = \sum_{j \in N} P_j$

f(x) = 최종기계에서 발생한 조기완료/납기지연의 벌과금 합

f'(x) = 공정중의 대기발생에 의한 벌과금 합

F(x) = 최종기계 및 공정중의 벌과금 총합

I(j) = j번째 기계까지의 대기시간 합

t_{ji} = i번째 기계에서 j번째 작업의 처리시간

3.2 수학적 모델

(1) 최종기계에서의 작업 순서 계획

본 연구는 다음의 목적식을 최소화하는 일정계획 S를 구하는 것이다.

$$Z(S) = \frac{\sum_{j \in N} W_j |C_j - d|}{\sum_{j \in N} W_j} \quad \cdots\cdots (1)$$

식 (1)에서 알 수 있는 사실은 작업은 초기에 약간의 휴지시간(idle time)을 가질 수 있으며, 가능한 한 납기(due date) 근처에서 작업군을 형성하게 된다. 그리고 d는 d 이전에 작업을 일정하는데 있어서 충분한 자유(freedom)를 줄 수 있도록 큰 값을 가진다. 즉 $d \geq MS$이다. 식 (1)에서 W_j가 1인 경우에는 Z(S)는 $(1/n)\sum_{j \in n} |C_j - d|$ 로서 Bagchi et al[2]이 정의한 MAD(Mean Absolute Deviation) 문제가 된다. 공통 납기를 고려한 복수기계의 일정계획에 대한 해법의 개발을 위한 일정계획의 기본적인 성질에 대하여 요약하면 다음과 같다.

정리 1(P1) 최적일정계획에서 B내에서의 작업은 LPT 순으로 나열되며, $R_j \geq d$인 작업은 SPT 순서로 나열된다. 이와같은 결과에 따른 일정계획은 V자 모양의 최적일정계획을 형성한다[9].

정리 2(P2) $d \leq P_1$이면 SPT 순서가 최적이다. 만약 $W_b < W_a$이면 $d \leq (P_1 + P_2)/2$에 있어서 SPT 순서가 최적이다[1].

정리 3(P3) 작업의 최적 순서집합에서 이들 중 한 작업의 완료시간이 납기 d와 일치하는 최적일정계획이 존재한다[12].

정리 4(P4) 만약 B에 속한 작업이 WLPT(Weighted Largest Processing Time) 순서로 나열되면, $P_{[1]}/W_{[1]} \geq P_{[2]}/W_{[2]} \geq \cdots \geq P_{[n1]}/W_{[n1]}$이고, A에 속하는 작업은 WSPT(Weighted Shortest Processing Time) 순서로 나열된다면, $P_{(n2)}/W_{(n2)} \leq P_{(n2-1)}/W_{(n2-1)} \geq \cdots \leq P_{(1)}/W_{(1)}$이 된다.

이런 일정계획은 가중치가 부여된 단일 기계의 공통납기와 일정계획 문제에 있어서 V자 모양의 LPT, SPT로 배치된 최적일정계획을 형성한다.

(2) 공정중 지연

작업과 작업중의 지연 I 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

<table>
<tr><td>M/C1</td><td>t_{11}</td><td>......</td><td>$I_{(n-3)}$</td><td>$t_{(n-2)1}$</td><td>$I_{(n-2)}$</td><td>$t_{(n-1)1}$</td><td>$I_{(n-1)}$</td><td>$t_{(n)1}$</td><td>$I_{(n)}$</td></tr>
<tr><td>M/C2</td><td></td><td>......</td><td colspan="2">$t_{(n-3)2}$</td><td colspan="2">$t_{(n-2)2}$</td><td colspan="2">$t_{(n-1)2}$</td><td>$t_{(n)2}$</td></tr>
</table>

여기서 I의 값을 계산하면 다음과 같다.

$I_{(n)}=t_{(n)2}$

$I_{(n-1)}=\max[0,\ t_{(n)2}+t_{(n-1)2}-t_{(n)1}-I_n]$

$I_{(n-2)}=\max[0,\ t_{(n)2}+t_{(n-1)2}+t_{(n-2)2}-t_{(n)1}-t_{(n-1)1}-I_n-I_{(n-1)}]$

$I_{(j)}=\max[0,\ \sum_{i=j}^{n} t_{(i)2}-\sum_{i=j+1}^{n} t_{(i)1}-\sum_{i=j+1}^{n} I_{(i)}]$

단, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$

$I_{(n)}=t_{(n)2}$ ($j=n$ 일 때)

3.3 해법

단계 1 : 최종기계 M_2에서 V-Shape 순서로 각 작업을 순서화하고 공통납기(d^*)를 결정한다.

단계 2 : 기계 M_1에서도 M_2와 똑같은 순서로 하여 기계 M_1, M_2에서 중간 휴지시간을 고려한 일정계획을 역순으로 수립한다.

단계 3 : 기계 M_1에서의 첫 작업 시작시간을 '0'으로 보정한다.

단계 4 : 단계 1에서 구한 d^*의 위치로서 d^* 값을 구한다.

단계 5 : 단계 4에서 구한 d^*값에 의거하여 최종기계 M_2에서의 조기완료/납기지연에 대한 벌과금을 계산한다.

단계 6 : 마지막으로 단계 2에서의 중간 휴지시간에 대한 벌과금과 단계 5에서의 조기완료/납기지연의 벌과금을 더하여 최종벌과금을 구한다.

3.4 수치예

본 알고리즘의 해법에 대한 수치예는 다음과 같다.

작업(i)	1	2	3	4	5
t_{j1}	3	5	1	6	7
t_{j2}	9	5	5	9	8

단계 1 : 기계 M_2에서의 V-Shape 순서

LPT d^* SPT

3−2−5−4−1

$P_{[d*]}=5$

단계 2 : 기계 M_1에서의 중간휴지시간 계산

$I_{[5]}=t_{[5]2}=9$ $I_{[4]}=0$, $I_{[3]}=0$

$I_{[2]}=\max[0,\ t_{[5]2}+t_{[4]2}+t_{[3]2}+t_{[2]2}-t_{[5]1}-t_{[4]1}-t_{[3]1}-I_{[5]}]$

$=\max[0,\ 9+5+5+8-6-5-1-9]$

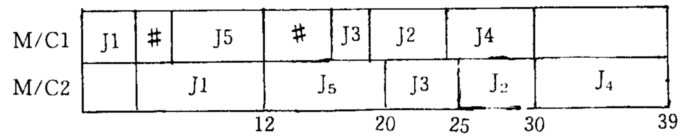
$=6$

$I_{[1]}=\max[0,\ t_{[5]2}+t_{[4]2}+t_{[3]2}+t_{[2]2}+t_{[1]2}-t_{[5]1}-t_{[4]1}-t_{[3]1}-t_{[2]1}-I_{[5]}-I_{[4]}-I_{[3]}-I_{[2]}]$

$=\max[0,\ 9+5+5+8+9-6-5-1-7-9-6]$

$=2$

단계 3 : 기계 M_1에서의 첫 작업의 시작 시간을 '0'으로 Gantt Chart를 그리면 다음과 같다. (#=between job delay)



단계 4 : $P_{[d*]}=5$를 이용한 d^* 값은 25이다.

단계 5 : $f(x)=5+13+5+14$

$=37$

단계 6 : $f'(x)=\sum_{j=1}^{n} I_{[j]}$

$=6+2$

$=8$

$F(x)=f(x)+f'(x)$

$=37+8$

$=45$

4. 결　론

본 연구에서는 공통납기를 갖는 특수한 경우의 흐름생산 형태의 일정계획 문제에 대해서 효율적인 발견적 기법의 알고리즘을 개발하였다. JIT 개념에 따라 납기일 까지 보관 납품의 경우 조기완료 벌과금과 납기지연에 따르는 벌과금을 고려하는 작업일정 계획을 구하였다. 또한 각 작업사이에 발생하는 작업지연도 고려하였다. 최종기계에서 각 작업에 대하여 작업하는 작업시간을 V형태로 배열하였으며, 처음기계에서의 작업순서도 최종기계에 의하여 결정되어진 순서대로 일정계획 되어진다. 그리고 V 형태 배치로 총벌과금을 최소로하는 공통납기도 결정되어진다.

본 연구에서는 가중치를 고려하지 않았지만 이에 대해서도 보다많은 고찰을 필요로 한다고 하겠다.

참고문헌

1. Bagchi, U., Chang, Y. L., and Sullivan, R. S., "Minimzing Absolute and Squared Deviations of Complete Time with Different Earliness and Tardiness Penalties and a Common Due Date," *Naval Research Logistics Quarterly, 34,* pp. 739-751, 1987.

2. Bagchi, U. Chang, Y. L., and Sullivan, R. S., "Minimizing Mean Absolute Deviation of Completion Time about a Common Due Date," *Naval Research Logistics Quarterly, 33,* pp. 227-240, 1986.

3. Baker, K. R., *Introduction to sequencing and scheduling,* Wiley, New York, 1974.

4. Christy, D. P., and Kanet, J. J., "Manufacturing Systems with Forbidden Early Shipment," *Int. J. Prod. Res., 28-1,* pp. 91-100, 1990.

5. Eilon, S., and Chowdhury, I. G., Minimizing Waiting Time Variance in the Single Machine Problem," *Management Science 23-6,* pp. 567-575, 1977.

6. Emmons, H., "Scheduling to a Common Due Date on Parallel Uniform Processors," *Naval Research Logistics Quarterly, 34,* pp. 803-810, 1987.

7. Hall, N. G., "Single-and Multiple-Processor Models for Minimizing Completion Time Variance," *Naval Research Logistics Quarterly, 33,* pp. 49-54, 1986.

8. Kanet, J. J., "Minimizing Variation of Flow Time in Single Machine Systems," *Management Science 27-12,* pp. 1453-1459, 1981.

9. Kanet, J. J., "Minimizing the Average Deviation of Job Completion Times about a Common Due Date," *Naval Research Logistics Quarterly, 28-4,* pp. 643-651, 1981.

10. King, J. R., and Spachis, A. S., "Heuristics for Flow-Shop Scheduling," *Int. J. Prod. Res., 18-3,* pp. 345-357, 1980.
11 Merten A. G., and Muller, M. E., "Variance Minimization in Single Machine Sequencing Problems," *Management Science, 18-9,* pp. 518-528, 1972.
12. Panwalker, S. S., Smith, M. L., and Seidman, A., "Common Due Date Assignment to Minimize Total Penalty for the One Machine Scheduing Problem," *Operations Research, 30-2,* pp. 391-399, 1982.
13. Park, Y. B., Pegden C. D., and Enscore, E. M., "A Survey and Evaluation of Static Flowshop Scheduling Heuristics," *Int. J. Prod. Res., 22-1* pp. 127-141, 1984.
14. Prabuddha De, Ghosh, J. B., and Wells, C. E., "Con. Due-Date Determination and Sequencing," *Computer OR, 17-4,* pp. 333-342, 1990.
15. Schrage L., "Minimizing the Time-in-System Variance for a Finite Jobset," *Management Science, 21-5,* pp. 540-543, 1975.
16. Scudder, G. D., and Hoffmann, T. R., "The Use of Value-based Priorities When Early Shipments are forbidden," *Int. J. Prod, Res., 27-2,* pp. 353-369, 1989.
17. Sydney, J. B., "Optimal Single Machine Scheduling with Earliness and Tardiness Penalties," *Operations Research, 25-1,* pp. 62-69, 1977.