
 論 文

大韓造船學會論文集
 第28卷 第2號 1991年 10月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol.28, No.2, October 1991

揚力板 理論에 依한 2次元 水中翼의 超越 空洞 問題 解析

김 영기*, 이 창섭**, 이 진태***

A Potential-Based Panel Method for the Analysis of A Two-Dimensional Super-Cavitating Hydrofoil

by

Kim, Y.G.*, Lee, C.S.** and Lee, J.T.***

요 약

본 논문에서는 양력판 이론을 사용하여 2차원 수중익에 발생한 비 대칭 초월 공동 문제를 포텐셜을 기저로하여 수치 해석하였다. 수중익과 공동 표면에 법선 다이폴을 분포하고 공동 표면에는 공동 형상을 찾기위하여 쏘오스를 분포하였다. 수중익 표면에서의 운동학적 경계조건은 수중익 내부에서의 전체 포텐셜이 0이라는 조건으로 대치하였고 공동 표면에서의 역학적 경계조건은 공동 표면에서의 접선 방향 속도가 일정하다는 조건으로 표현되었다.

표면에 특이 함수를 분포하여 포텐셜을 기저로하여 공동 문제를 해석하였기 때문에 압력 분포에 대하여, 특히 수중익의 앞날 근처에서는 양력면 이론에 의한 결과보다 더욱 향상된 정도의 결과를 얻었다.

본 이론은 먼저 주어진 공동 길이에 대하여 그에 상응하는 공동 형상 및 공동수를 구하였다. 좀더 좋은 결과를 얻기 위하여 새로이 계산된 공동 표면과 수중익 표면에 또 다시 특이 함수를 분포하여 그곳에서 경계 조건을 만족시킴으로써 새로운 공동 형상 및 공동수를 구하는 반복 계산을 수행하였다.

본 이론에 의한 계산 결과의 검증을 위하여 폭 넓은 수렴성 시험을 수행하였으며 특히, Geurst의 선형 이론에 의한 해석해 및 Wu의 비 선형 이론에 의한 해석해, 그리고 Acosta, Parkin, Meijer, Silberman, Waid의 실험 결과와 비교한 결과, 본 이론의 효용성을 입증하였다.

발표: 1990년도 대한조선학회 추계연구발표회('90. 11. 10.)

접수일자: 1991년 1월 24일, 재접수일자: 1991년 6월 3일

* 학생회원, 충남대학교 선박해양공학과

** 정회원, 충남대학교 선박해양공학과

*** 정회원, 해사기술연구소

Abstract

This paper describes a potential-based panel method formulated for the analysis of a super-cavitating two-dimensional hydrofoil. The method employs normal dipoles and sources distributed on the foil and cavity surfaces to represent the potential flow around the cavitating hydrofoil. The kinematic boundary condition on the wetted portion of the foil surface is satisfied by requiring that the total potential vanish in the fictitious inner flow region of the foil, and the dynamic boundary condition on the cavity surface is satisfied by requiring that the potential vary linearly, i.e., the tangential velocity be constant. Green's theorem then results in a potential-based integral equation rather than the usual velocity-based formulation of Hess & Smith type. With the singularities distributed on the exact hydrofoil surface, the pressure distributions are predicted with improved accuracy compared to those of the linearized lifting surface theory, especially near the leading edge. The theory then predicts the cavity shape and cavitation number for an assumed cavity length. To improve the accuracy, the sources and dipoles on the cavity surface are moved to the newly computed cavity surface, where the boundary conditions are satisfied again. This iteration process is repeated until the results are converged.

Characteristics of iteration and discretization of the present numerical method are much faster and more stable than the existing nonlinear theories. The theory shows good correlations with the existing theories and experimental results for the super-cavitating flow. In the region of small angles of attack, the present prediction shows an excellent comparison with the Geurst's linear theory. For the long cavity, the method recovers the trends of the Wu's nonlinear theory. In the intermediate regions of the short super-cavitation, the method compares very well with the experimental results of Parkin and also those of Silberman.

1. 서 언

선박이 대형화되고 소요 마력이 증가함에 따라 프로펠러의 날개에 걸리는 하중이 점차 증가하는 추세에 있다. 프로펠러 날개에 걸리는 하중이 증가하게 되면 선미의 진동 문제 및 수중 소음의 주요 원인인 프로펠러 날개에 발생하는 공동 현상을 피할 수가 없다. 이러한 선미 주위의 문제를 해결하고 충분한 공동 여유를 고려한 프로펠러를 설계하기 위하여는 프로펠러 날개 표면에 발생하는 공동 범위 및 공동의 거동을 좀더 정확하게 예측하는 것이 필요하다.

기존의 프로펠러 주위에 발생하는 공동을 해석하는 방법은 대부분 양력면 이론에 기초를 두고 있다(Lee, C.-S.[1]. 참조) 양력면 이론은 선

형 이론에 입각하여 날개의 두께 문제와 양력 문제를 분리함으로써 쏘오스와 보오텍스를 도입하여 비행 날개 또는 프로펠러 날개주위의 유동을 기술하는데 실용적 가치를 인정받아 왔다. 그러나, 양력면 이론은 날개 두께의 영향을 무시하였기 때문에 날개 앞날에서 실제현상과는 거리가 먼 음의 무한대의 압력이 발생하는 압력 특이점을 얻게 된다. 따라서, 공동이 발생하는 문제에서는 앞날 부근에서의 공동의 초기 발생과 압력 특이점이 긴밀한 관계가 있음을 생각할 때, 앞날 부근에서의 계산 정도의 향상 없이는 정확한 공동 유동의 해석이 불가능함을 알 수 있다.

선형화에 따르는 앞날 근처에서의 부정확한 해석을 해결하기 위하여는 날개 두께의 영향을 정확하게 고려해 주어야 하며, 따라서 프로펠러 표면에 직접 특이점을 분포하는 방법이 고

려되어야만 한다. 이에 대한 연구는 항공 분야에서 널리 발표되고 있으며(Hess & Valarezo[2], Moran, [3]), 최근에는 Lee, J. T.[4]와 Yang & Jessup[5]등에 의해 공동이 발생하지 않은 프로펠러 문제의 해석에도 표면 양력판 이론이 성공적으로 적용된 바 있다.

양력이 발생하는 물체 주위의 유동 해석을 위하여 보오텍스 또는 다이폴을 분포하여 경계치 문제를 해석하는 것은 이미 잘 알려져 있다. 그러나, 날개 주위에 공동이 발생한 경우의 해석은 날개 두께가 0인 선형 이론에 의해서만 성공적으로 수행되고 있는 실정이다. 공동의 생성은 날개 주위 유체를 배제하는 두께 영향을 주로 나타내므로 쏘오스의 도입에 의해 해석될 수 있으리라 생각된다.

선형 이론에 의해 공동 문제를 처음으로 이론적으로 해석한 것으로는 Geurst[6]등을 들 수 있으며, 수치 해석 방법을 적용한 예로는 Golden[7]이 있다. 그는 두께가 없는 날개 주위에 공동이 발생한 문제를 보오텍스와 쏘오스를 분포하여 해석하는데 성공한 바 있으며, Jiang[8]에 의해 3차원 양력면의 비정상 문제 해석에 까지 확대되었고, Lee, C.S.[1]에 의해 선박용 프로펠러의 공동 추정이 가능하도록 발전되었다.

선형 이론에서와는 달리 날개 두께를 정확히 고려하는 양력판 이론에 의한 해석은 부분 공동 문제에 있어서는 속도를 기저로 하는 방법을 사용하여 Uhlman[9]에 의해 발표되었고, 포텐셜을 기저로 하는 방법은 Lee, C.S.[10]에 의해 발표되었다. 초월 공동 문제에 있어서는 앞서의 방법에 의해 Uhlman[11]이 발표하였고, 대칭 초월 공동 문제에 대하여 포텐셜을 기저로 하여 Kim, Y.-G. & Lee, C.S.[12]에 의해 발표된 바 있다. 초월 공동에 대한 비선형 해석해로는 Open wake 공동 마감 모형을 사용하여 Hodograph법에 의해 계산을 수행한 Wu[13]의 결과가 있다.

Uhlman은 2차원 날개의 표면에 보오텍스를

분포하고 공동이 발생한 경우에는 공동의 표면에도 보오텍스를 분포하여, 상당한 반복 계산에 의해 공동 형상을 찾아가는 비선형 이론을 제시하였는 바, 프로펠러에의 응용을 예상하고 현재의 컴퓨터 능력을 고려할 때 Uhlman의 방식은 상당한 어려움이 있을 것으로 생각된다.

본 연구에서는 날개 표면에 다이폴을 분포함으로써 양력을 생성할 수 있도록 하고, 공동의 발생 범위에 쏘오스를 분포하여 공동의 두께 영향을 표현함으로써 경계치 문제를 정식화 하였으며, 주어진 경계 조건을 이용하여 다이폴 및 쏘오스의 세기를 결정하면 공동의 형상과 공동 주위의 유동이 구해 질 수 있음을 보였다. 초월 공동 문제에 대한 선형 이론에 의한 해석해 뿐만 아니라 비선형 이론에 의한 해석해, Uhlman의 비선형 수치해 그리고 실험 결과와 비교함으로써 본 이론의 적용가능성을 보였다. Uhlman의 이론에서는 공동의 형상을 찾는 데 많은 판 용소와 10회 이상의 반복 계산이 필연적이었으나, 본 연구에서 제시된 방안은 그보다 적은 판 요소수를 이용하여 2회의 반복 계산에 의해 공동 형상이 결정될 수 있으므로, 더욱 방대한 계산을 요하는 선박용 프로펠러에로의 확장이 보다 용이하다고 여겨진다.

2. 境界植 問題의 定式化

2차원 수중익이 비점성, 비압축성 유체의 비회전성이고 일정속도 U_∞ 로 흘러들어오는 무한 영역의 유동중에 놓여 있다고 하자. 유체중에서의 全速度 벡터 V 는 유입유동, U_∞ 전체 속도 포텐셜, ϕ , 로 표현될수 있다.

즉,

$$V = \nabla \phi \quad (1)$$

여기서, ϕ 를 유기 속도 포텐셜이라 할때,

$$\phi = U_\infty \cdot x + \phi \quad (2)$$

유체 내부에서는 질량 보존의 법칙이 성립하여야 하며, 이로부터 지배 방정식을 얻는다. 즉,

$$\nabla^2 \Phi = 0, \text{ throughout the fluid} \quad (3)$$

유체 내부의 유동은 유체를 둘러싸고 있는 경계면에서의 조건을 부과함으로써 유일하게 정의된다. 즉,

1) 無限 圓方에서 較亂速度 静止條件:

$$\nabla \Phi \rightarrow \underline{U}_\infty, \text{ at } \infty \quad (4)$$

2) 水中 翼 表面에서의 非侵透 條件:

$$\hat{n} \cdot \underline{V} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \text{ on the body surface } S_B \quad (5)$$

여기서, \hat{n} 은 수중익 표면의 법선 벡터이다. \hat{n} 은 수중익 표면에서 유체장을 향할때 양으로 정의된다.

3) Kutta 條件

$$|\underline{V}_{T.E.}| < \infty, \text{ at the trailing edge} \quad (6)$$

부분 공동 문제에 있어서는 공동이 발생하지 않은 수중익에서와 같이 수중익 뒷날에서의 속도가 유한하여야만 한다. 하지만 초월 공동 문제에 있어서는 수중익의 뒷날이 서로 상태가 다른 두 유체에 둘러싸여 있기 때문에 부분 공동 문제와 다른 형태의 Kutta조건이 적용되어야만 한다.

따라서 앞서의 Kutta조건은 공동 이탈 지점에서 수중익 뒷날의 압력면과 공동 표면이 매끄럽고 연속적으로 이어져야 한다는 조건으로 표현될 수 있다. 즉,

$$\lim_{A \rightarrow T.E.} \hat{t}_A \cdot \nabla \Phi_A = \lim_{B \rightarrow T.E.} \hat{t}_B \cdot \nabla \Phi_B \quad (7)$$

여기서 첨자 A와 B는 Fig. 1에서 보듯이 공동 이탈 지점에서 수중익과 공동 표면을 각각 의미한다. 또한, \hat{t} 는 수중익 및 공동 표면에서의 단위 접선 벡터이다.

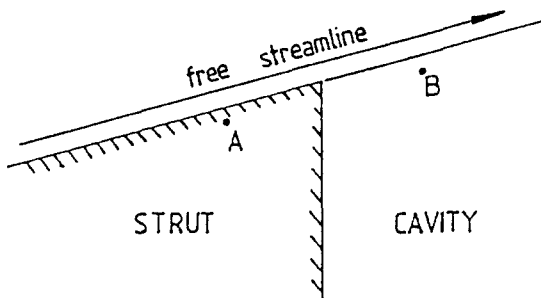


Fig. 1 Local trailing edge flow

무한 영역의 이상 유체중에 놓여 있는 수중익의 정상 상태 양력 문제 해석에 있어서는 앞서 기술한 경계 조건으로 충분하다. 그러나, 공동이 수중익 주위에 발생하면 공동표면에서의 경계 조건이 필요하며, 공동의 끝 부분에서의 공동 마감 조건을 부과하여야 한다.

4) 空洞 表面에서의 運動學的 境界 條件:

$$\frac{DF}{Dt} = 0, \text{ on the cavity surface } S_C \quad (8)$$

여기서 $F(x,y)$ 는 공동 표면의 식이다. x,y 좌표는 Fig. 2에서 정의하기로 한다.

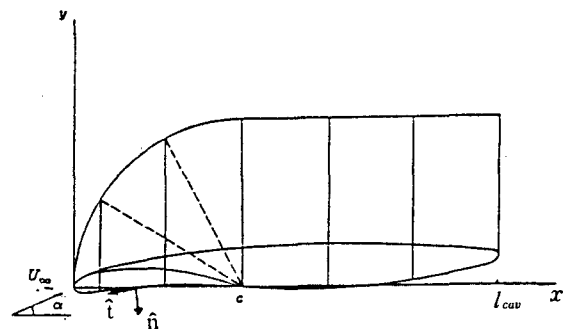


Fig. 2 Discretization of the hydrofoil and cavity surface

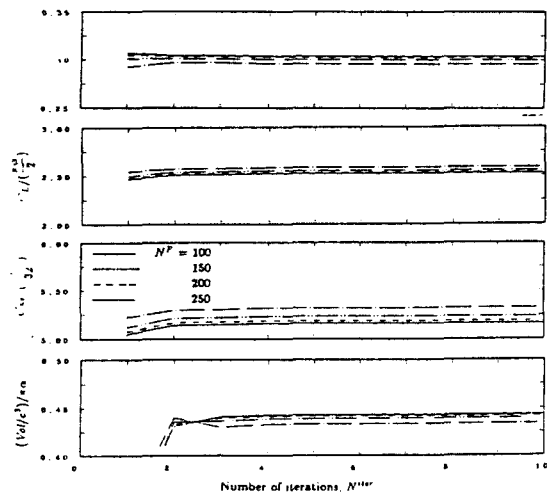


Fig. 3 Convergence tests; α/σ and Vol versus number of iteration at $\alpha = 4^\circ$ with $l_{cav}/c = 1.392$; for $N_p = 100, 150, 200, 250$

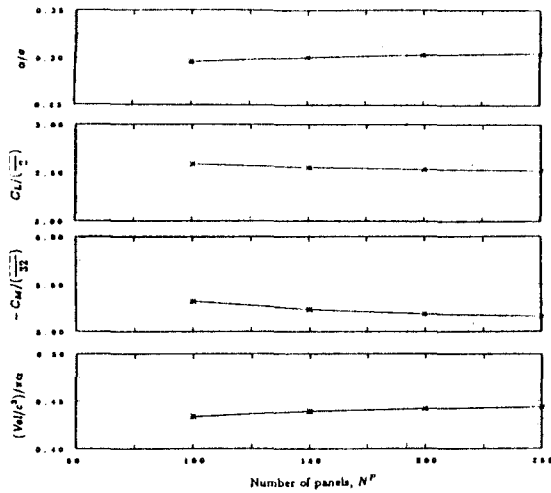


Fig. 4 Convergence tests ; α/σ , C_L , C_M and Vol versus the number of panels at $\alpha=4^\circ$ with $l_{cav}/c=1.392$; for $N^{iter}=10$

5) 空洞 表面에서의 力學的 境界 條件: 중력 및 표면 장력의 영향을 무시하면 공동 표면에서 압력은 일정하다.

$$p=p_c, \text{ on the cavity surface } S_c \quad (9)$$

여기서 p_c 는 공동이 발생한 부위의 내부 압력이다.

6) 空洞 마감 條件:

$$t'(L_{cav})=0,$$

$$\text{at the trailing end of the cavity} \quad (10)$$

여기서 $t'(x)$ 는 x 위치에서의 공동의 두께이다.

Breslin[14] 등의 논문에서 잘 알려진 바와 같이 수중익 표면에서의 비침투 조건, Eq.(5)은 다음과 같이 날개 내부에 유동이 존재하지 않는다는 조건으로 치환될 수 있다. 즉, 날개 및 공동내부에서의 전체 속도 포텐셜을 Φ 라 표시하면

$$\Phi^-(x)=0$$

$$\text{inside the boundary} \quad (11)$$

Bernoulli 방정식에 의하면 날개 표면에서의 압력, P ,와 접선 방향 속도, \underline{V}_t , 공동 수 (Cavitation number), σ , 압력계수, C_p , 사이에는 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$C_p \equiv \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho |U_\infty|^2} = 1 - \left(\frac{|V_t|}{|U_\infty|}\right)^2,$$

$$\text{on foil and cavity surface} \quad (12)$$

$$\sigma \equiv \frac{p_\infty - p_c}{\frac{1}{2}\rho |U_\infty|^2} = -C_{pr} = \left(\frac{|V_t|}{|U_\infty|}\right)^2 - 1,$$

$$\text{on the cavity surface} \quad (13)$$

공동 표면에서의 역학적 경계 조건, Eq.(9),은 Eqs.(12)과 (13)에 의해 $|V_t|$ 가 일정하다는 운동학적 조건으로 치환될 수 있다. 즉,

$$|V_t| = const.,$$

$$\text{on the cavity surface} \quad (14)$$

본 연구에서는 공동 내부의 압력 P_c 를 계산하는 대신에 공동표면에서의 접선 방향 속도 성분, $|V_t|$,를 구함으로써 공동 내부의 압력을 계산하게 된다.

특이점을 분포하여 공동을 표현하기 위하여는 공동의 범위를 미리 알 필요가 있다. 그러나 공동의 길이는 전체 경계치 문제의 해의 일부로 결정되어야 함으로 미리 알 수 없다. 따라서 본 연구에서는 공동의 범위, l_{cav} ,를 가정하고, 이에 대응하는 공동 표면에서의 접선 방향 속도 성분, \underline{V}_t , 공동수, σ , 공동 체적, V_{oi} , 양력 계수, C_L , 항력계수, C_D , 그리고 moment 계수, C_M , 등을 계산하기로한다.

공동 문제에서 가장 중요한 계산은 공동 체적을 구하는 것이다. 비정상 상태하에서는 공동이 요동을 하게 되고 이때 공동 체적의 변화는 선미 진동과 추진기에 의한 소음의 주요 원인이다. 만약 h^+ 와 h^- 를 각각 공동의 상부 표면과 하부 표면의 식이라고 하면, 그때 공동 체적은 다음과 같다.

$$V_{oi} = \int_0^{l_{cav}} (h^+ - h^-) dx \quad (15)$$

수중익 주위에 발생된 힘의 유입 유동에 수직인 성분인 양력, L ,은 상하면의 압력차로부터 구한다. 즉,

$$L = \int_0^c (p^- - p^+) dx \quad (16)$$

여기서 P^+ 와 P^- 는 각각 수중익의 윗면과 아래면에서의 압력이다.

양력 계수, C_L ,는 양력을 유입 유동과 유체의 밀도로 무차원화 하여 구한다. 즉,

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho |U_\infty| \cdot c} \\ = - \int_{S_B} C_p t \cdot \frac{U_\infty}{|U_\infty|} dS \quad (17)$$

여기서, C_p 는 무차원화된 압력 계수이며, t 는 날개표면에서의 단위접선벡터로 시계방향을 양으로 정의되었다(Fig.1참조).

힘의 유입 유동에 평행한 성분인 항력 계수는 다음과 같다.

$$C_D = - \int_{S_B} C_p n \cdot \frac{U_\infty}{|U_\infty|} dS \quad (18)$$

수중익의 앞날을 중심으로한 Moment 계수는 다음과 같이 표현된다.

$$C_M = - \int_{S_B} C_p \bar{r} \times n dS \quad (19)$$

여기서 \bar{r} 은 수중익 앞날부터 수중익 표면까지의 거리 벡터이다.

3. 空 洞 離 脫 條 件

초월 공동문제에 있어서 부분 공동문제와의 차이점중에서 하나는 수중익 주위의 순환을 유일하게 정의하기 위한 Kutta 조건이 적용되는 뒷날이 부분 공동 문제와는 달리 뒷날의 상하면이 각기 상태가 다른 유체에 둘러싸여 있다는 점이다.

Wu[13]에 의하면 공동이 수중익 표면으로부터 이탈되는 부분에서 공동 이탈 형태는 두 가지로 분류할 수 있다. 하나는 자유 공동 이탈로서 일반적인 수중익의 앞날에서와 같이 수

중익 표면의 곡률이 연속적으로 변하는 부분에서의 공동 이탈 현상이다. 이러한 경우에는 공동이탈 지점은 미리 알 수 없으며, 공동에 미치는 다른 요소, 즉 점성의 영향, 표면 장력 등을 고려한 해의 일부로 구할 수 있다 (Franc & Michel[15]). 또 다른 하나는 고정 공동 이탈로서 수중익의 뒷날에서와 같이 수중익 표면의 곡률에 불연속점이 존재하는 곳에서의 공동이탈이다. 수중익 표면의 곡률이 불연속적이고 유체장을 향하여 불룩한 경우에는 불연속 지점에서 최대 속도가 발생하고 이 지점에서 부터 공동이 발생하게 된다. 또한 Wu의 해석해에 의하면 고정 공동 이탈지점에서의 가속도는 무한대로서 그 지점에서의 압력 구배 또한 무한대의 값을 갖게 된다.

앞서 언급한 바와 같이 수중익 뒷날에서의 공동은 고정 공동 이탈 형태로서 그 부분에서 유선의 곡률은 무한한 값을 갖는다. 이러한 현상은 Kutta 조건을 정면으로 위배하는 것으로서 수중익 주위의 순환을 0으로 만들어 양력을 발생시키지 못한다. 따라서 초월 공동 이탈의 성질을 지니지만 외관상은 자유 공동 이탈의 형태를 취한다. 즉, 공동 이탈 지점에서의 곡률은 그 지점에서의 수중익의 곡률과 같지만 압력 구배는 무한한 값을 갖는 매끈한 공동 이탈 형태를 취한다.

4. 特 異 函 數 分 布 法

경계치 문제의 해석을 위하여 수중익의 표면에 쏘오스 혹은 범선 다이폴를 분포하기 한다.

수중익의 표면에 쏘오스 혹은 범선 다이폴를 분포하면 유기되는 속도 포텐셜을 다음과 같다.

$$\Phi_v(x) = \int \frac{q(\xi)}{2\pi} \ln R(x; \xi) dS \quad (20)$$

$$\Phi_\mu(x) = \int \frac{\mu(\xi)}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \ln R(x; \xi) dS \quad (21)$$

여기서 $q(\xi)$ 와 $\mu(\xi)$ 는 각각 쏘오스와 범선 다

이폴의 세기를 나타낸다.

특이함수의 특성에 의해 특이함수가 분포된 표면을 벗어나면 지배 방정식, Eq.(3),과 무한 원방에서 교란 속도 정지조건, Eq.(4),을 자동적으로 만족한다.

$$\Phi(\underline{\xi}) \text{와 } \frac{\partial \Phi(\underline{\xi})}{\partial n_{\xi}} \text{를 다음과 같이 놓으면}$$

$$\Phi(\underline{\xi}) = -\mu(\underline{\xi}) \quad (22)$$

$$\frac{\partial \Phi(\underline{\xi})}{\partial n_{\xi}} = q(\underline{\xi}) \quad (23)$$

적분 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \pi \Phi(x) &= 2\pi\phi_{\infty} \\ &+ \int_{S_B} \mu(\underline{\xi}) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \ln R(x; \underline{\xi}) dS \\ &+ \int_{S_B} q(\underline{\xi}) \ln R(x; \underline{\xi}) dS \\ &+ \int_{S_w} \Delta \mu_{T.E.} \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \ln R(x; \underline{\xi}) dS \quad (24) \end{aligned}$$

경계면 윗면에서의 전체속도 포텐셜을 Φ^+ , 경계면 아래면에서의 전체속도 포텐셜을 Φ^- 라 하면 Eq.(24)에서 $\Phi(x)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Phi(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) \quad (25)$$

따라서 Eq.(24)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \pi(\Phi^+(x) - \Phi^-(x)) &= 2\pi\phi_{\infty} \\ &+ \int_{S_B} \mu(\underline{\xi}) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \ln R(x; \underline{\xi}) ds \\ &+ \int_{S_B} q(\underline{\xi}) \ln R(x; \underline{\xi}) ds \\ &+ \int_{S_w} \Delta \mu_{T.E.} \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \ln R(x; \underline{\xi}) ds \quad (26) \end{aligned}$$

$$-\pi \Phi^-(x) = 2\pi\phi_{\infty} + \pi\mu(x)$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{S_B} \mu(\underline{\xi}) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \ln R(x; \underline{\xi}) dS \\ &+ \int_{S_B} q(\underline{\xi}) \ln R(x; \underline{\xi}) dS \\ &+ \int_{S_w} \Delta \mu_{T.E.} \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \ln R(x; \underline{\xi}) dS \quad (27) \end{aligned}$$

수중익 표면의 운동학적 경계조건, Eq.(5)을 대치한 내부 유동의 조건식, Eq.(11),을 전체 속도 포텐셜에 의한 적분 방정식, Eq.(24),에 적용하면

$$\begin{aligned} -\pi \Phi^-(x) &= 0 = 2\pi\phi_{\infty} + \pi\mu(x) \\ &+ \int_{S_B} \mu(\underline{\xi}) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \ln R(x; \underline{\xi}) dS \\ &+ \int_{S_B} q(\underline{\xi}) \ln R(x; \underline{\xi}) dS \\ &+ \int_{S_w} \Delta \mu_{T.E.} \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \ln R(x; \underline{\xi}) dS \quad (28) \end{aligned}$$

공동 표면에서의 역학적 경계조건, Eq.(9),으로부터 유도해낸 Eq.(14)과 전체 속도 포텐셜과 법선 다이폴 세기의 관계식 Eq.(22)로부터 공동표면에서의 법선 다이폴 세기의 변화가 선형관계임을 알 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \mu(\underline{\xi}) &= -\Phi^+(\underline{\xi}) = -(\Phi_{cle}^+ + \int_{cle}^{\xi} |V_{\perp}| ds) \\ &= \mu_{cle} - |V_{\perp}| \int_{cle}^{\xi} ds \quad (29) \end{aligned}$$

Eq.(29)는 공동 표면에서의 접선 방향 속도 성분, $|V_{\perp}|$, 과법선 다이폴 세기, $\mu(\underline{\xi})$,의 관계를 직접 보여 주는 것으로 간단하면서도 유용한 식이다. 여기에서 Φ_{cle}^+ 와 μ_{cle} 는 각각 공동이 시작되는 부분에서의 전체 속도 포텐셜과 법선 다이폴 세기이다.

공동을 표현하는 쏘오스의 세기 $q(\underline{\xi})$ 는 얇은 비행익 이론에서와 마찬가지로 Eq.(8)에 의해서 공동표면에서의 속도벡터의 기울기와 공동 두께사이의 선형화된 관계식을 나타낸다.

즉,

$$q = v = |U_\infty| \frac{dt^c}{ds} \quad (30)$$

윗식을 공동 표면을 따라서 적분하면 공동의 두께를 나타내는 식

$$t^c(x) = \int_0^x \frac{q}{|U_\infty|} ds \quad (31)$$

을 얻게 된다.

공동 닫힘 조건, Eq.(10),에 의해 공동의 뒷 끝 위치에서 공동의 두께가 0이 되는 조건을 적용하면,

$$\int_0^{L_{cav}} q ds = 0 \quad (32)$$

이다.

5. 水中翼 表面 및 空洞表面의 要素 分割

Fig.5에서 보는 바와 같이 수중익이 받음각 α 인 유입 유동중에 놓여 있다고 하자. 수치해석을 위하여 수중익 표면 및 공동표면을 유한한 길이의 판 요소로 분할하고자 한다. 수중익 앞날 근처에서 보다 정밀한 계산과 상대적으로 공동 길이가 긴 초월 공동을 표현하기 위하여 수중익의 압력면과 수중익 상부의 공동표면은 x 축을 따라 half cosine 분할을 하고 수중익 후방의 공동 표면은 수중익 뒷날에서의 판 요소의 x 축 길이로 x 축을 따라 등간격 분할한다.

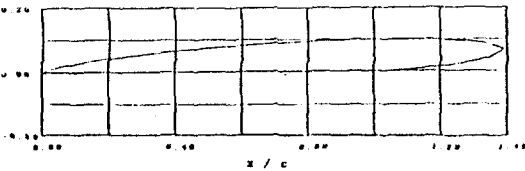


Fig. 5 Cavity shape for $N_{iter}=1$ (---), 2 (-·-·-), and 10 (—) at $\alpha=4^\circ$; and $l_{cav}/c=1.392$ for $N_p=150$

$$x_i^B = \begin{cases} \frac{c}{2}(1 - \cos 2\theta_i), & 0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}, \\ x_i^B, & \text{if } x_i^B \leq c \\ x_{i-1}^B + l_p, & \text{if } x_i^B > c \\ x_i^B, & \text{if } x_i^B > c \end{cases} \quad (33)$$

여기서 l_p 는 수중익의 뒷날에서의 판 요소의 x 축 길이이다. 각 판 요소의 제어점은 그 판 요소의 중심에 있다고 가정한다. 즉,

$$x_i^p = \frac{1}{2}(x_{i+1}^B + x_i^B) \quad (34)$$

6. 積分 方程式의 離散化

수중익 표면에 법선 다이폴 그리고 공동 표면에 쏘오스 및 법선 다이폴을 분포하였을 때 전체 속도 포텐셜에 의한 적분 방정식, Eq. (28),을 수치해석을 위하여 이산화한다. 이때 쏘오스와 법선 다이폴은 각 요소에서 일정하다. 즉,

$$\mu(s) = \mu_i, \text{ on panel } i \quad (35)$$

$$q(s) = q_k, \text{ on panel } k \quad (36)$$

임의의 형태의 수중익이 이상 유체의 무한 유동중에 입사각 α 인 상태에 놓여 있고 Fig.5에서와 같이 공동의 윗 부분은 수중익의 앞날에서부터 시작하고 아래 부분은 수중익의 뒷날에서부터 시작한다고 하자.

적분방정식은 Eq.(28)는 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi_i^- = 0 = 2\pi U_\infty \cdot x_i + \sum_{j=1}^{N_D} \beta_{ij} \mu_j + \sum_{k=1}^{N_S} \alpha_{ik} q_k + \Delta \mu_{CAE} \beta_{iw} \quad (37)$$

여기서 N_D 는 다이폴이 분포된 요소의 수

N_S 는 쏘오스가 분포된 요소의 수

$\Delta \mu_{CAE} \approx$ 공동 뒷끝(CAE)에서 법선 다이폴의 세기의 점프

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \pi & \text{if } i=j \\ \int_{c_j}^{\pi} \frac{\partial}{\partial n_i} \ln R ds & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

$$\alpha_{ii} = \int_{c_j}^{\pi} \ln R ds$$

$$\beta_{iw} = \int_{CAE}^{\infty} \frac{\partial}{\partial n} \ln R ds$$

또한, 공동 표면의 역학적 경계조건, Eq.(14),에 의한 공동 표면에서의 법선 다이폴의 세기

와 접선 방향 속도와의 관계식, Eq.(29),를 Eq.(37)에 적용 하면

$$\begin{aligned}
 \Phi_i^- &= 0 \\
 &= 2\pi U_\infty \cdot \underline{x}_i + \sum_{j=1}^{N_p} \beta_{ij} \mu_j \\
 &\quad + \sum_{j=N_c+1}^{N_c} \beta_{ij} (\mu^{N_p} - |V_{\underline{t}}| g_{uj}) \\
 &\quad + \sum_{j=N_c+1}^{N_D} \beta_{ij} (\mu_i - |V_{\underline{t}}| g_{di}) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_{ik} q_k + (\mu^{N_c} - \mu^{N_c} + 1) \beta_{iw} \\
 &= 2\pi U_\infty \cdot \underline{x}_i + \sum_{j=1}^{N_p} \beta_{ij} \mu_j \\
 &\quad + \sum_{j=N_c+1}^{N_c} \beta_{ij} (\mu^{N_p} - |V_{\underline{t}}| g_{uj}) \\
 &\quad + \sum_{j=N_c+1}^{N_D} \beta_{ij} (\mu_i - |V_{\underline{t}}| g_{di}) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_{ik} q_k + \{ (\mu^{N_p} - |V_{\underline{t}}| g_{uN_c}) \\
 &\quad - (\mu_i - |V_{\underline{t}}| g_{uN_c+1}) \} \beta_{iw} \\
 &= 2\pi U_\infty \cdot \underline{x}_i \\
 &\quad + (\beta_{i1} + \sum_{j=N_c+1}^{N_D} \beta_{ij} - \beta_{iw}) \mu_1 \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{N_p-1} \beta_{ij} \mu_j + (\beta_{iN_p} + \sum_{j=N_p+1}^{N_c} \beta_{ij} + \beta_{iw}) \mu^{N_p} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N_s} \alpha_{ik} q_k \\
 &\quad - \{ \sum_{j=N_p+1}^{N_c} \beta_{ij} g_{uj} + \sum_{j=N_c+1}^{N_D} \beta_{ij} g_{dj} \\
 &\quad + \beta_{iw} (g_{uN_c} - g_{dN_c+1}) \} |V_{\underline{t}}| \quad (38)
 \end{aligned}$$

여기서 $N_p =$ Wetted surface의 요소의 수

$$N_c = N_p + N_{D/2}$$

$g_{uj} =$ 수중익 앞날에서 j 요소까지의 표면 길이

$g_{dj} =$ 수중익 뒷날에서 j 요소까지의 표면 길이

그리고, 공동 닫힘 조건, Eq.(32),을 이산화하면

$$\sum_{k=1}^{N_s} q_k \rho_k = 0 \quad (39)$$

적분 방정식을 이산화한 Eq.(38)에서 보면 미지수의 개수는 N_p 개의 법선 다이폴의 세기, N_s 개의 쏘오스의 세기, 그리고 공동 표면에서의 접선 방향 속도, $V_{\underline{t}}$, 이다. 이에 대하여 식의 갯수는 Eq.(38)과 (39)로부터 $N_p + N_s + 1$ 개로 미지수의 수와 식의 수가 같게 된다. 따라서, 이렇게 형성된 연립방정식을 해석함으로써 공동 표면에 분포된 특이함수의 세기를 결정할 수 있다.

수중익 뒷날에서의 표면의 기울기와 그 곳에서의 공동 표면의 기울기가 같아야 된다는 공동 이탈 조건은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{T.E.} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{cdp} \quad (40)$$

여기서

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{cdp} = \text{공동이 시작되는 곳(cdp)에서의 기울기이다.}$$

초월 공동에 있어서 Fig.1에서 보는 바와 같이 Eq.(39)에 공동 표면에서의 속도 벡터의 기울기와 공동 두께사이의 선형화된 관계식, Eq.(30),를 적용하면

$$\begin{aligned}
 q_1 &= |U_\infty| \left(\frac{dt^c}{ds}\right)_{N_p+1} \\
 &= |U_\infty| \left\{ \left(\frac{dy}{ds}\right)_{N_p} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{N_p+1} \right\} \quad (41)
 \end{aligned}$$

따라서, 적분방정식의 이산화된 최종 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 &-2\pi U_\infty \cdot \underline{x}_i - \alpha_{ij} \left\{ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{N_p} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{N_p+1} \right\} |U_\infty| \\
 &= \sum_{j=1}^{N_p-1} (\beta_{ij} + \beta_{iN_p-j+1}) \mu_j + (\beta_{iN_p} + \beta_{iND} - N_p + 1 \\
 &\quad + \sum_{j=N_p+1}^{N_c} (\beta_{ij} + \beta_{iN_D-j+1}) \mu^{N_p}) + \sum_{k=2}^{N_s} (\alpha_{ik}) q_k \\
 &\quad + \sum_{j=N_p+1}^{Ne} (\beta_{ij} + \beta_{iN_D-j+1}) g_{ij} |V_{\underline{t}}| \quad (42)
 \end{aligned}$$

또한 공동 닫힘 조건은

$$\sum_{k=2}^{N_s} h_k q_k = -h_i \left\{ \left(\frac{dy}{dx} \right)_{N_p} - \left(\frac{dy}{dx} \right)_{N_p+1} \right\} |U_\infty| \quad (43)$$

이다.

7. 數值計算 및 考察

7.1 收斂性 試驗

비 대칭 초월 공동 문제는 공동을 계산하는 수치 해석 방법이 대칭 초월 공동과는 많은 차이가 있기 때문에 이 또한 수렴성 시험이 필요하다. 비 대칭 초월 공동의 수렴성 시험을 위하여 본 연구에서는 균일 유동중에 놓여 있는 두께가 없는 평판을 사용하였다.

날개 길이로 무차원화된 공동길이, l_{cav}/c , 를 1.40으로 하여 계산을 수행한 Uhlman의 결과와 비교하기 위하여 본 연구에서는 공동길이, l_{cav}/c , 가 1.392인 경우에 대하여 수렴성 시험을 수행하였다.

Fig.3은 평판이 받음각 4° 인 상태의 균일 유동중에 놓여 있을 때 각각 판 요소수, N_p ,가 100,150,200,250인 경우에 반복계산 횟수에 대한 양력계수, 항력계수, 모멘트 계수 그리고 공동체적의 수렴도를 보이고 있다. 공학적인 목적에 있어서는 3회 정도의 반복계산으로 충분한 정도의 결과를 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다. Fig.4에서는 Fig.3에서의 결과를 10회 반복 계산 했을때의 판 요소수에 대한 제반계수의 수렴도를 보이고 있다. Fig.3과 4로부터 본 연구의 결과가 좋은 수렴성을 갖고 있다는 것을 알 수 있다.

공동의 길이가 수중익의 1.392 배이고 받음각이 4° 일때 공동의 형상이 수렴되어 가는 과정을 Fig.5에 도시하였다. 1회 계산에 의하여 얻어진 공동 형상과 10회 반복 계산에 의해 구해진 공동 표면에서의 압력 분포를 Fig.6에 보였다. 수중익 뒷날에서의 공동 이탈 지점에서 압력 특이점이 발생하는데 이로 부터 수중익 뒷날에서의 공동 이탈 형태는 외관상

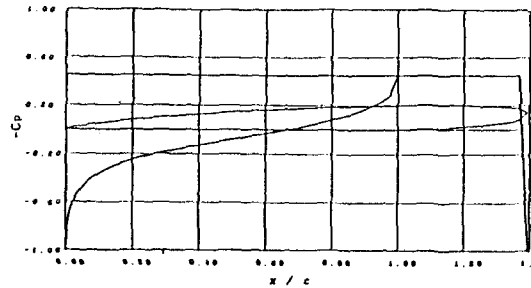


Fig. 6 Pressure distribution at $\alpha=4^\circ$ with $l_{cav}/c=1.392$; for $N_p=150$.

smooth detachment 형태를 취하지만 실은 fixed detachment 형태의 공동 이탈이라는 것을 알 수 있다. 공동 표면에서 균일한 판 요소의 길이를 유지하는 한편 수중익 표면에서의 유동의 정밀도를 높이는 데 필요한 판 요소수의 한계로 수중익의 길이와 공동의 길이가 거의 같은, 즉 $l_{cav}/c=1.05$, 나 공동길이가 대단히 긴 공동 문제를 해석하는데 있어서는 많은 판 요소수가 필요하다.

Fig.7에서는 각각 공동길이가 1.05이고 받음각이 4° 인 경우와 공동길이가 7.27이고 받음각이 20° 인 경우에 있어서의 10회 반복 계산에 의한 공동 형상을 보였다.

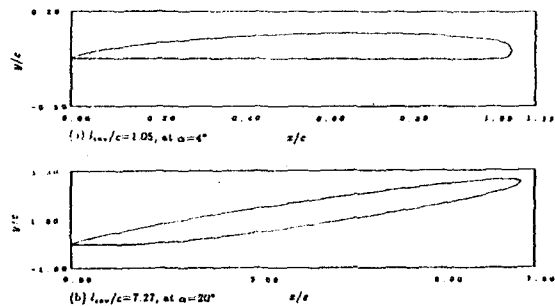


Fig. 7 Cavity shape around a flat hydrofoil for the camber (a) $l_{cav}/c=1.05$ at $\alpha=4^\circ$ and (b) $l_{cav}/c=7.27$ at $\alpha=20^\circ$

7.2 받음각의 影響

공동 길이에 대한 무차원 변수, α/σ ,의 영향을 보이기 위하여 Fig.8에 계산결과와 Uhlman [11]의 비선형 이론, Geurst[6]의 선형이론 그리고 Wade & Acosta[16]의 실험 결과를 함께 도시하였다. Fig.8에서 보듯이 공동길이가 상

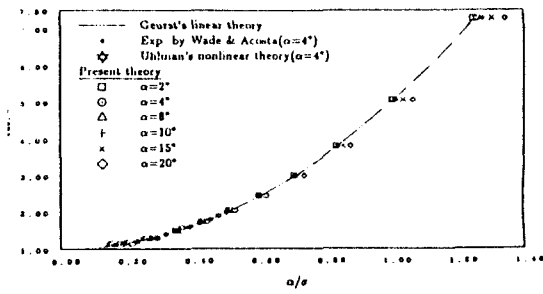


Fig. 8 Cavity length, l_{cav}/c , versus a/σ for a super-cavitation flat-plate hydrofoil. Comparison with Geurst and Uhlman, and the experimental data of Wade and Acosta are made

당히 긴 경우에 받음각이 증가할수록 비선형 현상이 현저히 나타남을 알 수 있다. 즉, 동일한 σ 에 대하여 받음각이 증가할수록 공동의 길이가 줄어든다. 또한 받음각이 작은 경우에는 공동의 길이에 상관없이 Geurst의 선형 이론 및 Uhlman의 결과와 좋은 일치를 보인다.

Fig.9부터 12까지 각각 무차원 변수 a/σ 에 대한 양력계수, 항력계수, 모멘트계수, 그리고

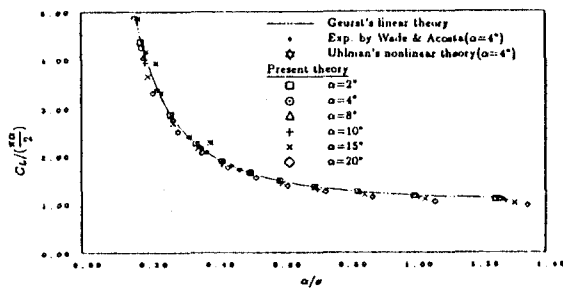


Fig. 9 Normalized lift coefficient, $C_L / (\frac{\pi a}{2})$, versus a/σ for a supercavitating flat-hydrofoil

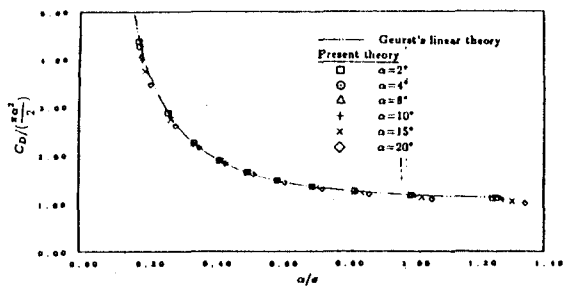


Fig. 10 Normalized drag coefficient $C_D / (\frac{\pi a^2}{2})$, versus a/σ for a supercavitating flat-plate hydrofoil

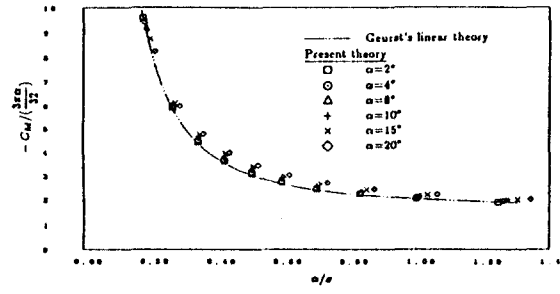


Fig. 11 Normalized moment coefficient, $C_M / (\frac{3\pi a}{32})$, versus a/σ for a super-cavitation flat-plate hydrofoil. The moment is defined about the leading edge and positive counter-clockwise

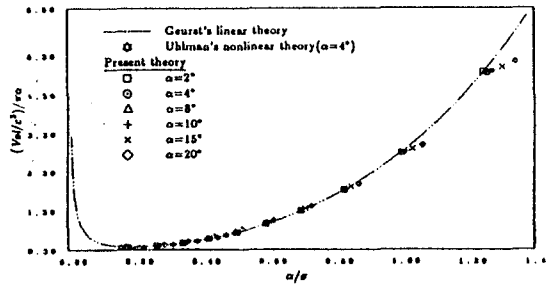


Fig. 12 Normalized dimensionless cavity volume, $Vol / (\pi a)$, versus a/σ for a super-cavitation flat-plate hydrofoil

공동체적의 계산 결과와 앞서 언급한 이론들에 의한 결과를 비교 도시하였다. 공동 길이에서와 마찬가지로 공동의 길이가 길어지고 받음각이 증가할수록 비선형 현상이 현저히 나타남을 알 수 있다.

공동의 길이가 긴 경우에 있어서 Geurst의 선형이론과 본 연구의 비선형이론에 의한 양력계수와 항력계수의 차이를 검증하기 위하여 Fig.13과 14에서는 Wu[13]의 비선형 이론 및 Parkin[18]과 Siberman[19]의 각각의 실험결과를 함께 비교 도시하였다. 먼저 공동의 길이가 길어질수록 본 연구의 결과가 Wu의 비선형이론에 의한 계산 결과와 점근적으로 접근함을 알 수 있다. 또한, 각 받음각에서 공동 길이가 7.28, 5.04, 3.0, 2.05인 부분을 보여 주고 있다.

본 연구의 계산 결과는 공동길이가 긴 경우,

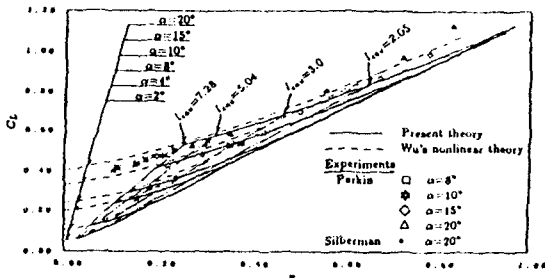


Fig. 13 Lift coefficient, versus σ for a supercavitating flat-plate hydrofoil. Comparison with the theory of Wu and the experiments of Parkin and Silberman are made

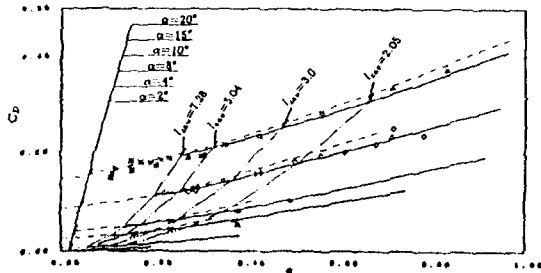


Fig. 14 Drag coefficient, versus σ for a supercavitating flat-plate hydrofoil. Comparison with the theory of Wu and the experiments of Parkin and Silberman are made

$l_{cav} \geq 7.28$, 즉 Wu의 이론이 실험결과와 잘 일치하는 구간에서는 Wu의 비선형 이론 및 실험 결과와 좋은 일치를 보이고 있다. 하지만 Wu가 사용한 공동 마감 모형인 open wake 모형의 한계로 인하여 실제 공동 현상과 차이가 발생할 것이라고 믿어지는 구간, $l_{cav} \leq 7.28$,에서는 Wu의 비선형 이론과 본 연구 결과사이에는 차이가 있지만 실험 결과와는 좋은 일치를 보인다.

7.3 캠버의 影響

공동으로 둘러싸여 있는 수중익 표면의 형상은 외부 유동에 아무런 영향을 끼치지 않기 때문에 일반적인 형상의 수중익에 대한 본 이론의 적용 가능성을 검증하기 위하여 해석해가 존재하는 circular arc 와 flapped 수중익에 대하여 계산을 수행하였다.

Fig.15과 16에 각각 circular arc에 공동길이 가 1.392인 초윌 공동이 발생하였을 때의 공동 형상 및 수중익과 공동표면에서의 압력 분포를 보였다.

Fig.17과 18에서는 본 연구의 계산 결과와 Wu의 비선형 이론에 의한 해석해와 Parkin의 실험결과를 비교 도시하였다. 평판의 경우와 마찬가지로 공동의 길이가 상대적으로 긴 경우

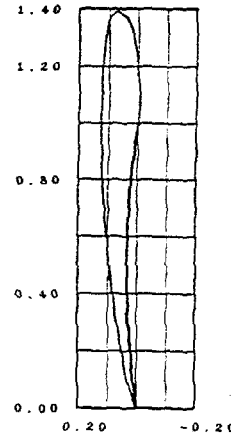


Fig. 15 Cavity shape around the circular arc hydrofoil for $N^{iter}=1$ (—), 2 (---), 10 (- - -) at $\alpha=4^\circ$ with $l_{cav}/c=1.392$

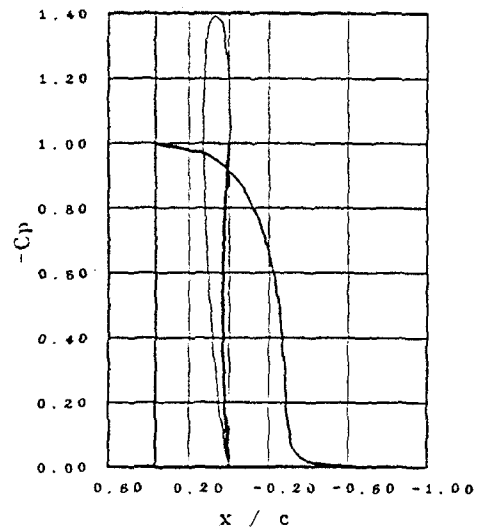


Fig. 16 Pressure distribution for the circular arc hydrofoil at $\alpha=4^\circ$ with $l_{cav}/c=1.392$ for $N_p \approx 150$

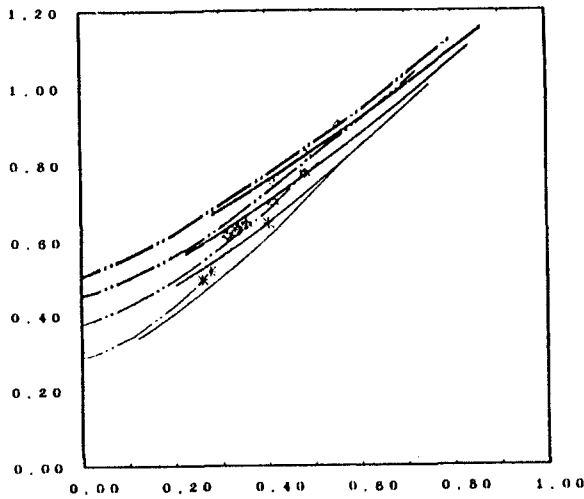


Fig. 17 Lift coefficient versus σ for a super-cavitating circular arc hydrofoil. Comparison with the theory of Wu and the experimental data of Parkin are made

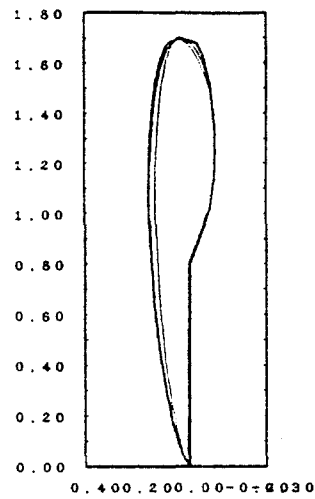


Fig. 19 Cavity shape around the flapped hydrofoil for $N_{Re}=1$ (—), 2(---), 10(-.-) at $\alpha=10^\circ$ with $l_{cav}/c=1.392$

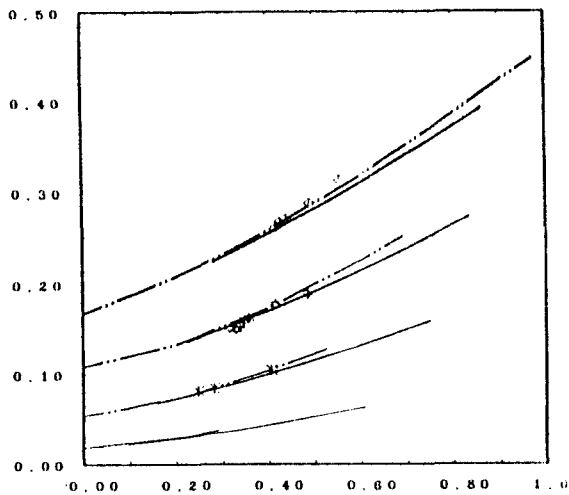


Fig. 18 Drag coefficient versus σ for a super-cavitating circular arc hydrofoil. Comparison with the theory of Wu and the experimental data of Parkin are made

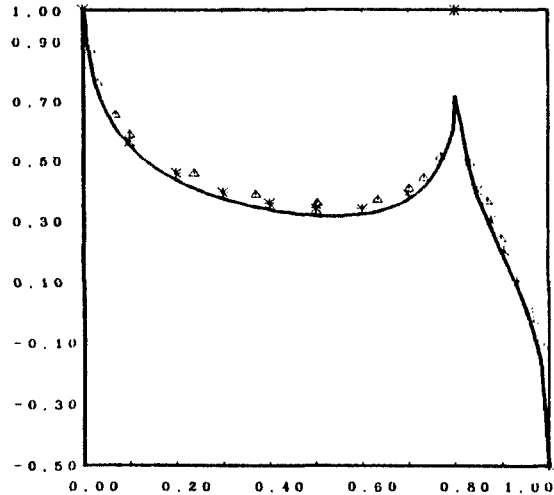


Fig. 20 Pressure distribution on the flapped hydrofoil at $\alpha=4^\circ$ with $l_{cav}/c=1.699$ and $\sigma=0.486$ for $N_p=320$. Comparison with the theory of Wu and experimental data of Meijer are made

예, $l_{cav} \geq 7.28$, Wu의 해석해와 점근적으로 근접하고 있으나 공동 길이가 상대적으로 짧은 구간, $l_{cav} \leq 7.28$, 에서는 Wu의 결과와는 차이가 있다. 하지만 Parkin의 실험 결과와 비교

할때, 본 연구에 의한 계산 결과가 실험 결과와 좋은 일치율을 보이고 있다.

Fig.19와 20에서는 평판의 길이가 수중익의 80%이고 받음각이 10° 이며 flap이 평판에 대하여 20° 기울어져 있을때의 공동형상을 보였 다. Fig.20에서는 앞서의 경우에서 수중의 압력

면에서의 압력 분포를 Meijer의 실험 결과 및 Wu의 해석해와 본 연구의 계산 결과를 비교하여 보였다.

8. 結 言

1. 2차원 수중익에 발생한 초월 공동 문제를 해석하기 위하여 포텐셜을 기저로한 양력판 이론을 정식화하였다.
2. 판 요소수 및 반복 계산 횟수에 대한 광범위한 수렴성 시험을 수행하였고 본 이론에 의한 계산 결과의 수렴성이 빠르고 안정되어 있다는 것을 보였다.
3. 본 연구에 의한 수치 해석 결과가 해석해 및 실험결과와 좋은 일치를 보였다.
4. 공동 마감 모형과 공동 이탈 조건이 초월 공동 문제에 중요한 영향을 끼친다는 것을 보였다.

참 고 문 헌

- [1] Lee, C.-S., "Prediction of Steady and Unsteady Performance of Marine Propellers with or without Cavitation by Numerical Lifting Surface Theory", Ph.D. Thesis, Department of Ocean Engineering, M.I.T., Cambridge, Mass., 1979.
- [2] Hess, J. L., & Valarezo, W. O., "Calculation of Steady Flow about Propellers using a Surface Panel Method", *J. Propulsion*, 1985.
- [3] Moran, J., "An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics", John Wiley and Sons, 1984.
- [4] Lee, J.-T., "A Potential-based Panel Method for the Analysis of Marine Propellers in Steady flow", Ph.D. Thesis, Department of Ocean Engineering, M.I.T., Cambridge, Mass., 1987.
- [5] Yang, C. I. & Jessup, S. D., "Benchmark Analysis of a Series of Propellers with a Panel Method", *SNAME Propeller '88 Symp.*, Virginia Beach, VA, pp. 17/1-10, 1988.
- [6] Geurst, J. A., "Linearized Theory of Two Dimensional, Cavitating, Lifting Flow", Thesis, Delft Technical Institute, The Netherlands, 1961.
- [7] Golden, D.W., "A Numerical Method for Two Dimensional, Cavitating Lifting Bodies", Douglas Aircraft Company, MDC J 567091, 1972.
- [8] Jiang C. W., "Experimental and Theoretical Investigation of Unsteady Supercavitating Hydrofoils of Finite Span", Ph.D Thesis, M.I.T., Department of Ocean Engineering, 1977.
- [9] Uhlman, J. S., "The surface Singularity Method Applied to Partially Cavitating Hydrofoils", *J. of Ship Research*, Vol. 31, No. 2, pp. 107-124, 1987.
- [10] Lee, C.-S., "A Potential-based Panel Method for the Analysis of a 2-Dimensional Partially-Cavitating Hydrofoil", *J. of SNAK*, Vol. 26, No. 4, pp. 27-34, 1989.
- [11] Uhlman, J. S., "The Surface Singularity or Boundary Integral Method Applied to Supercavitating Hydrofoils", *J. of Ship Research*, Vol. 33, No. 1, pp. 16-20, 1989.
- [12] Kim, Y.-G. & Lee, C.-S., "Supercavitating Flow Problems about Two-Dimensional Symmetric Strut", *J. of SNAK*, Vol. 27, No.4, pp. 15-26, 1990.
- [13] Wu, T. Y., "Inviscid Cavity and Wake Flows", *Basic Developments in Fluid Dynamics* Vol. 2, Academic Press Inc., New York, 1968.
- [14] Breslin, J.P., Van Houten, R.J., Kerwin, J.E., Johnsson, C.A., "Theoretical and Experimental Analysis of a Series of Propellers with a Panel Method", *SNAME Propeller '88 Symp.*, Virginia Beach, VA, pp. 17/1-10, 1988.

- perimental Propeller-Induced Hull Pressures Arising from Intermittent Blade Cavitation, Loading, and Thickness”, *SNAME Trans.* Vol. 90, 1982.
- [15] Franc, J. P., Michel, J. M., “Attached cavitation and the boundary layer: experimental investigation and numerical treatment”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 154, pp. 63-90, 1985.
- [16] Wade, R., “Water tunnel investigations of two dimensional cavities”, Calif. Inst. Technol. Hydrodyn. Lab. Rept. E-73.6, Pasadena, CA, 1957.
- [17] Cox, A. and Clayden, W., “Cavitating flow about a wedge at incident”, *J. Fluid Mech.* 3, pp. 615-617, 1958.
- [18] Parkin, B. R., “Experiments on circular-arc and flat-plate hydrofoils in non-cavitating and fully-cavity flows”, Calif. Inst. Technol. Hydrodyn. Lab. Rpt. No. 47-7, Pasadena, California, 1956
- [19] Silberman, E., “Experimental studies of supercavitating flow about simple two-dimensional bodies in a jet”, Calif. Inst. Technol. Hydrodyn. Lab. Rept. No. 47-7, Pasadena, CA, 1956.
- [20] Meijer, M. C., “Some Experiments on Partly Cavitating Hydrofoils”, *International Shipbuilding Progress*, Vol. 6, No. 60, 1959
- [21] Acosta, A.J., “A note on partial cavitation of flat plate hydrofoils”, Calif. Inst. Technol. Hydrodyn. Lab. Rept. No. E-19.9, Pasadena, Cal., 1955.