

大韓造船學會論文集  
 第28卷 第1號 1991年 4月  
 Transactions of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 28, No. 1, April 1991

## Riks Method를 이용한 비선형 수치해석

이재욱\*, 양영태\*

### Modified Arc-Length Method of Riks

by

Jae-Wook Lee\* and Young-Tae Yang\*

#### 요 약

구조물의 비선형 거동을 추적 조사하는 비선형 유한요소 해석에서 하중증분을 사용하는 Newton-Raphson 방법은 임계점 근처에서는 수렴이 안되는 단점을 갖고 있으므로 구조물의 거동이 심한 비선형 경로(nonlinear path)를 포함하고 있는 구조물의 거동을 조사하기 위해서는 Newton-Raphson 방법의 추가적인 수정이 필요하다. Newton-Raphson 방법의 수정보완 방법으로 Riks에 의해 제안된 구속조건식을 사용하여 반복계산하는 arc-length method로써 접선강성벡터에서 수직인 방향으로 접근하는 방법(normal arc-length method)과 접선강성벡터가 원호를 그리며 비선형 경로에 접근해 가는 방법(cylindrical arc-length method)을 사용하였으며 또한 각 단계에서 비선형의 정도에 따라 arc-length를 조절하는 자동하중 증분법을 사용하였다.

비선형 수치해석의 예로 경사진 외팔보, 단순 아치구조, 셸 구조 및 편심 보강평판의 비선형 거동을 추적 조사하였다.

#### Abstract

The modified arc-length algorithms for the automatic incremental solution of nonlinear finite element equations proposed by Riks are presented, which comprise the cylindrical arc-length method and the normal arc-length method. These methods are developed to trace the nonlinear path of large displacement problems such as a pre and post buckling/collapse response of general structures.

These methods are applied to analyze the nonlinear behavior of arch and shell problems in parallel with the standard and modified Newton-Raphson method.

발표 : 1991년도 대한조선학회 춘계연구발표회('91. 4. 13.)

접수일자 : 1991년 3월 8일, 재접수일자 : 1991년 4월 16일

\*정회원, 인하대학교 선박해양공학과

1. 서 언

유한요소 해석과정에서 구조물의 비선형 거동이 다양한 비선형 경로(nonlinear path)를 가지는 경우에는 수치해석에서 비선형 경로를 추적 조사하는데 실패하는 경우가 발생하며, 특히 비선형 경로중 불안정한 경로가 있는 비선형 거동을 조사하는 과정에서 발생하게 된다.

일반적으로 다양한 비선형 경로를 포함하고 있는 구조물의 거동을 하중-처짐곡선으로 나타내면 Fig. 1과 같이 도시할 수 있으며 비선형 경로는 안정경로(stable path)와 불안정경로(unstable path)로 구분할 수 있다. 즉 비선형 경로(Fig. 1)에서 하중과 변위가 동시에 증가하는 경로 A-B, C-E, H-I의 안정경로와 하중이 감소하며 변위가 증가하는 경로 B-C, E-F 및 하중과 변위가 동시에 감소하는 경로 F-G의 불안정 경로로 구분된다. 이러한 비선형 경로를 추적 조사하는 수치해석에서 일반적인 Newton-Raphson방법의 하중조절(load control)을 사용하는 경우 비선형 경로가 점 B에서 점 D로 변하는 "snap through"가 발생하며 변위조절(displacement control)을 사용하는 경우 비선형 경로가 점 F에서 점 H로 변하는 "snap back"이 발생한다. 따라서 구조물의 비선형 유한요소해석에서 이러한 문제점을 해결하기 위해서는 Newton-Raphson 방법의 부가적인 수정이 필요하다[13-15]

본 연구에서는 Newton-Raphson 방법의 수정정보완 방법으로 Riks에 의해 제안된 구속조건식을 사용하여 반복계산하는 arc-length

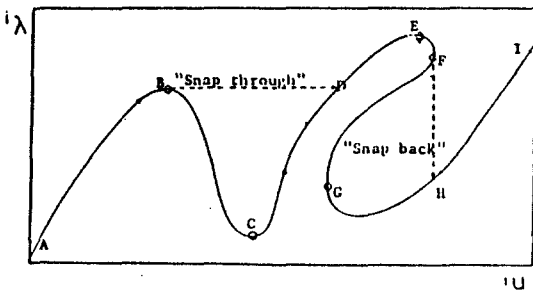


Fig. 1 Snap buckling

method로써 접선강성벡터에서 수직방향으로 비선형 경로에 접근하는 방법(Normal arc-length method; 이하 N. A. L.)과 접선강성벡터가 원호를 그리면서 비선형 경로에 접근해 가는 방법(Cylindrical arc-length method; 이하 C. A. L.)을 사용하였다. 또한 각 하중 증분단계에서 비선형의 정도에 따라 arc-length를 조절하는 자동하중 증분법을 사용하였다.

2. Normal arc-length method(N.A.L.)

N. A. L. 방법은 비선형 해석의 하중증분단계에서 구속조건 식(1)을 사용하여 하중증분  $\Delta\lambda^{(i)}$ 을 제한하는 방법으로 ds의 "arc-length"를 갖는 접선강성벡터에 수직인 방향으로 비선형 경로에 접근하는 방법이다[13~15].

$$\Delta U^{(i)T} \Delta U^{(i)} + (\Delta\lambda^{(i)})^2 = ds^2 \tag{1}$$

여기서  $\Delta U^{(i)}$ 는 변위증분이며 ds는 time t 상태에서 접선의 "arc length"이다. 반복계산되는 경로는 Fig. 2에서와 같이 접선에 수직인 평면을 따라 계산되므로 접선 벡터  $\vec{t}^{(i)}$ 와 변위증분 벡터  $\Delta \vec{U}^{(i)}$ 는 서로 수직이다.

$$\vec{t}^{(i)} \cdot \Delta \vec{U}^{(i)} = 0 \tag{2}$$

식(2)를 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\Delta U^{(i)T} \Delta U^{(i)} + (\Delta\lambda^{(i)})^2 \Delta\lambda^{(i)} = 0 \tag{3}$$

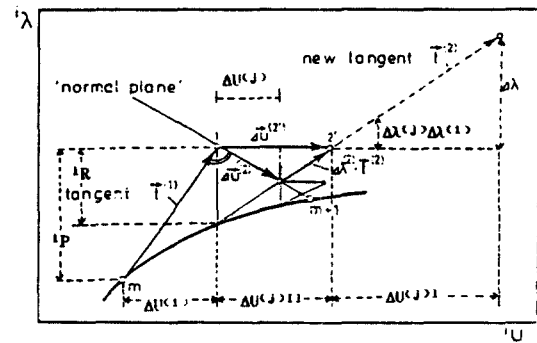


Fig. 2 Modified normal arc-length method

식(3)을 직접 사용하면 참고문헌[11, 14]에서 조사된 바와 같이 지배방정식의 대칭성과 band성질이 파괴되므로 변위증분  $\Delta U^{(j)}$ 를 두 부분으로 나누어서 외부하중 'P( $\Delta \lambda^{(j)}$ )'에 의해 계산된  $\Delta \lambda^{(j)} \Delta U^{(j)}$ 와 불평형힘 'R'에 의해 계산되는  $\Delta U^{(j)}$ 로 구분하여 계산한다[11, 14].

$$\begin{aligned} \text{K} \Delta U^{(j)} &= P(\Delta \lambda^{(j)}) \\ \text{K} \Delta U^{(j)} &= \text{R} \\ \Delta U^{(j)} &= \Delta \lambda^{(j)} \Delta U^{(j)1} + \Delta U^{(j)2} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 식(4)를 구속조건 식(3)에 대입하면 하중 증분 계수  $\Delta \lambda^{(j)}$ 를 얻을 수 있다.

$$\Delta \lambda^{(j)} = \frac{-\Delta U^{(j)1T} \Delta U^{(j)2}}{\Delta U^{(j)1T} \Delta U^{(j)1} + (\Delta \lambda^{(j)})^2} \quad (5)$$

하중증분계수 식(5)는 자유도수가 매우 큰 시스템(many degrees of freedom system)에서  $(\Delta \lambda^{(j)})^2$ 의 영향이 매우 작아 무시하면 하중증분계수는 식(6)으로 표시된다.

$$\Delta \lambda^{(j)} = \frac{-\Delta U^{(j)1T} \Delta U^{(j)2}}{\Delta U^{(j)1T} \Delta U^{(j)1}} \quad (6)$$

식(6)은 standard Newton-Raphson 방법이며  $\Delta U^{(j)2}$ 을  $\Delta U^{(j)1}$ 으로 수정하여 계산하면 modified Newton-Raphson 방법이 된다. 식(6)은 반복계산 과정에서 접선강성벡터  $\vec{t}^{(j)}$ 에 항상 수직인 방향으로 접근하는 방법이며 식(6)의  $\Delta U^{(j)}$ 을  $\Delta U^{(j)}$ 로 사용하면 반복계산 과정에서 수직인 방향이 매번 수정되어 계산되는 방법이다. 두 방법중에서 첫번째 방법이 계산과정이 적으므로 효율적이다.

### 3. Cylindrical arc-length method (C.A.L.)

비선형 수치해석의 하중증분단계에서 하중증분을 구속하는 조건식(7)을 사용해서 접선강성벡터  $\vec{t}^{(j)}$ 이 ds의 "arc-length"로 원호를 그리

면서 비선형 경로에 접근하는 방법으로 Fig. 3에 도시하였다[13~15].

$$\vec{r}^{(j)} \cdot \vec{r}^{(j)} - ds^2 = 0 \quad (7)$$

$$\vec{r}^{(j)} = \vec{r}^{(j)} + \Delta \vec{U}^{(j)} \quad (8)$$

Fig. 3의 벡터  $\vec{r}^{(j)}$ 에 의해서 그려지는 원주상의 점 j에서 벡터  $\Delta \vec{U}^{(j)}$ 와 벡터  $(\Delta \vec{U}^{(j)} + 2\vec{r}^{(j)})$ 는 서로 수직이므로 식(9)로 표현된다.

$$\Delta \vec{U}^{(j)} \cdot (\Delta \vec{U}^{(j)} + 2\vec{r}^{(j)}) = 0 \quad (9)$$

식(9)를 행렬형태로 표현하면 다음과 같다.

$$A(\Delta \lambda^{(j)})^2 + 2B\Delta \lambda^{(j)} + C = 0 \quad (10)$$

$$A = (\Delta \lambda^{(j)})^2 + (\Delta U^{(j)1})^T \Delta U^{(j)1}$$

$$B = \Delta \lambda^{(j)} \Delta \lambda^{(j)} + (\Delta U^{(j)1})^T (\Delta U^{(j)2} + U^{(j)})$$

$$C = (\Delta U^{(j)2})^T (\Delta U^{(j)1} + 2U^{(j)})$$

여기서  $\Delta U^{(j)2}$ 을  $\Delta U^{(j)1}$ 로 수정하여 계산하면 modified Newton-Raphson 방법이 된다. 식(10)은 2차 방정식이므로 두개의 근  $\Delta \lambda 1, \Delta \lambda 2$ 를 얻을 수 있으며 반복계산 과정에서 원래의 평형경로로 되돌아가는 "doubling back"을 피하기 위해 적절한 근의 선택이 필요하다. 선택방법은 i번째까지의 변위증분과 두 근을 사용해서 구한 j번째의 변위증분과의 angle( $\delta 1, \delta 2$ )를 구하여  $\delta$ 의 값이 양수인  $\Delta \lambda^{(j)}$ 을 결정한다.

$$\begin{aligned} \delta &= U^{(j)} \Delta U^{(j)} \quad \text{for } i \geq 1 \\ \delta &= U^{(0)} \Delta U^{(1)} \quad \text{for } i = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

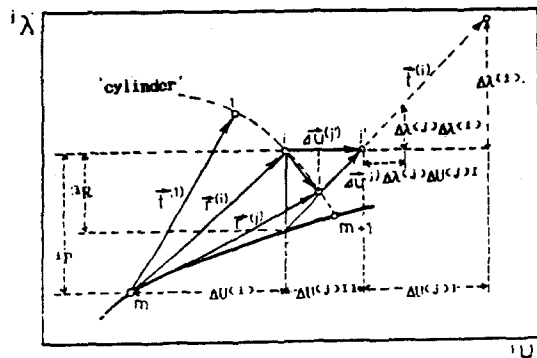


Fig. 3 Modified cylindrical arc-length method.

여기서 angle  $\delta_1, \delta_2$ 가 모두 양수이거나 음수이면 선형해(linear solution) 식(12)에 가까운  $\Delta\lambda^{(i)}$ 을 선택한다.

$$\Delta\lambda^{(i)} = -(C/2B) \quad (12)$$

한편 허근일 경우는 전 단계의 평형상태에서 "arc length"  $ds$ 를 1/2로 감소하여 반복계산을 다시 시작하며 반복계산 과정중 임계점 근처에서는 "arc length"의 적절한 조절이 필요하다.

#### 4. 자동 하중 증분법

비선형 수치해석의 하중증분 각 단계에서 하중의 증분값을 조절하는 방법으로 하중증분이 너무 크면 반복계산 과정에서 수렴에 실패할 수 있으며 하중증분이 너무 작으면 단계하중내에서는 빨리 수렴할 수 있으나 하중의 증분단계가 증가 되므로 적절한 하중 증분의 자동조절이 필요하다.

본 연구에서는 접선강성의 기울기 변화와 반복계산 회수의 변화를 고려하여 하중증분을 자동으로 조절하였다.

##### \* 접선강성의 기울기 변화

접선강성의 기울기가 변화하면 일정한 하중증분에 의해서도 매우 큰 변위를 일으킬 수 있다. 특히 임계점 근처에서는 접선강성이 매우 작아서 일정한 하중증분에 의해서도 변위가 크게 증가하므로 일정한 하중증분에 대한 첫번째 단계의 변위와 m번째 단계의 변위의 변화를 이용해서 각 단계의 하중을 조절한다.

$$m\lambda_1 = ({}^1U^{(0)T} {}^1U^{(0)} / mU^{(0)T} mU^{(0)})^{1/2} \quad (13)$$

##### \* 반복계산 회수의 변화

반복계산 과정에서 비선형경로가 선형적인 경향을 보이는 지점에서는 일정한 하중증분에 대해 반복계산 회수가 적으며 심한 비선형을 보이는 임계점 근처에서는 반복계산 회수가 증가하므로 반복계산 회수를 이용하여 "arc

length"를 조절하는 방법을 사용하였다.

$$m\lambda_2 = (N1/N2)^{1/2} \quad (14)$$

여기서 N1은 지정된 반복회수로 5 혹은 6이며 N2는 전 단계에서 수행했던 반복계산회수이다.

본 연구에서는 접선강성의 기울기 변화와 반복계산 회수의 변화를 고려하여 단계하중의 하중계수(load factor)로 사용하였다.

$$m\lambda^{(1)} = \pm(m\lambda_1 \times m\lambda_2) \times m^{-1}\lambda \quad (15)$$

여기서 부호는 접선강성의 행렬식의 부호에 따라 결정되며 임계점 근처에서는  $m\lambda_1, m\lambda_2$ 가 서로 상대적인 값을 갖는 경우가 발생될 수 있으므로 수렴의 가속화(acceleration)를 위해서는 적절한 조절이 필요하다.

#### 5. 수치해석의 예

비선형 수치해석의 예제로 경사진 외팔보의 비선형 거동해석을 total Lagrangian approach (T.L.)와 updated Lagrangian approach(U.L.)로 수행하여 ADINA(T.L.) 및 KNISA\*(T.L.)의 수치해석 결과와 비교하였으며 해석결과 Fig. 4, 5에서와 같이 동일한 결과를 얻었다. 또한 "snap through"가 발생하는 예제로 단순 아치구조(simple arch structure)와 단순지지 원통형 셸구조(hinged cylindrical shell structure)의 비선형 해석을 N.A.L.방법과 C.A.L.방법을 사용하여 해석 비교하였으며 "snap back"이 발생하는 예제로 편심 보강평판의 비선형 거동을 추적 조사하였다.

단순 아치구조에서 집중하중을 받는 절점의 z방향 처짐을 Fig. 6에 도시하였으며 집중하중을 받는 원통형 셸 구조에서는 center 및 side 의 처짐을 Fig. 7에 도시하였다. Fig. 6에서 U.L.과 T.L.해석의 차이를 보여주는 것은 단순아

\* KNISA : 본 program에서 U.L.과 N.A.L. 및 C.A.L.이 개발되기 전 program.

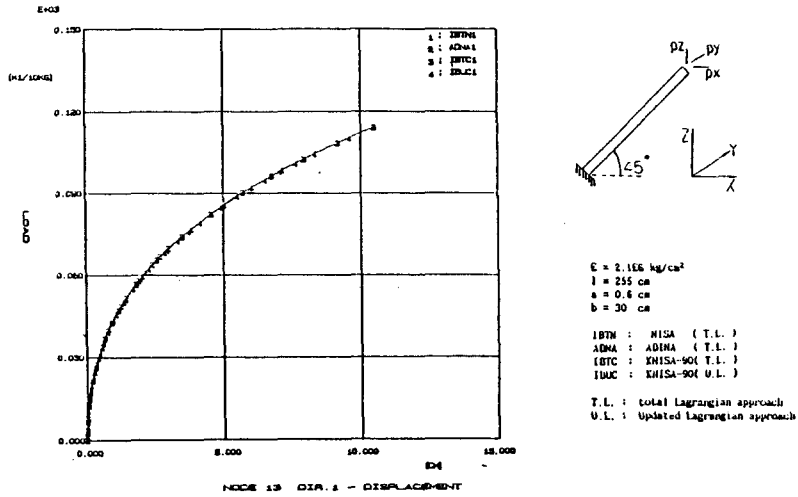


Fig. 4 Geometrical nonlinear analysis of cantilever

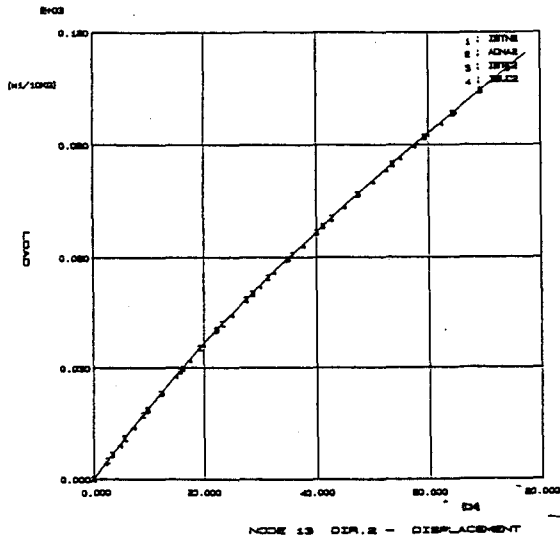


Fig. 5 Geometrical nonlinear analysis of cantilever

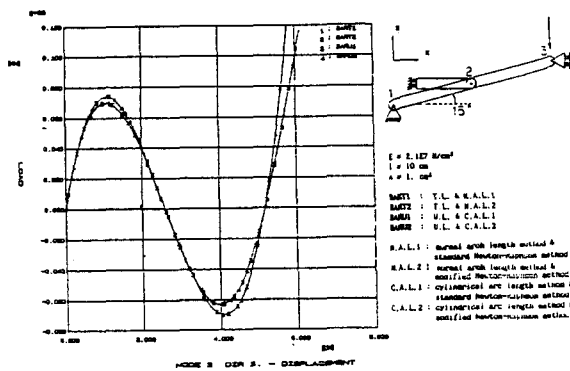


Fig. 6 Simple arch structure(ref. 15)

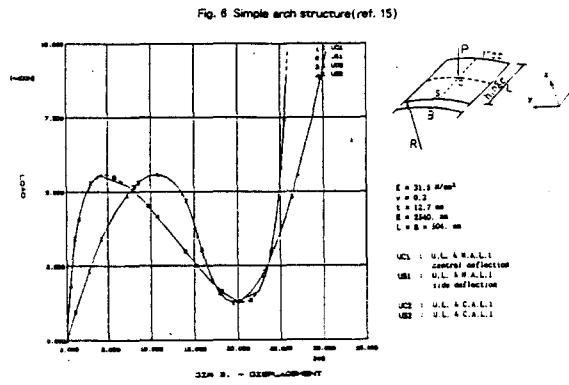


Fig. 7 Hinged cylindrical shell structure. (ref. 15)

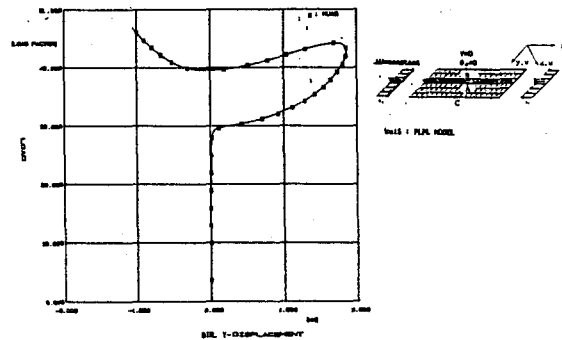


Fig. 8 Pre and post buckling behavior of node point B.

치구조와 같이 심한 비선형 거동이 있는 경우 U.L.해석시 time상태의 요소형상에서 위치변화가 크므로 수치 계산과정에서의 차이를 의미한다.

비선형 경로를 추적 조사하는 수치해석법 N.A.L.방법과 C.A.L.방법에서 동일한 결과를 얻었으나 Fig. 7에서 비선형이 심한 임계점 근처에서는 차이를 보여주는데 이것은 C.A.L.방법에서 비선형이 심한 경로(path)인 임계점 근처에서 "arc length"가 증가하기 때문에 일어나는 현상이다. 따라서 C.A.L.방법에서는 구조물의 강성변화에 따른 "arc length"의 적절한 조정이 필요하다.

편심 보강평판에서 비선형 수치해석은 N.A.L. 방법을 사용하여 비선형 거동을 추적 조사하였으며 보강재(절점B)의 y방향 처짐을 Fig. 8에 도시하였다. Fig. 8에서 비선형 경로가 하중계수 44.에서 39.로 감소하는 동안 변위도 감소하는 "snap back"현상을 보여준다.

## 6. 결 론

비선형 수치해석결과를 비교하기 위해 KNISA(T.L.), ADINA(T.L.)의 해석결과 및 참고문헌(15)의 예제와 수치해석을 비교하였으며 동일한 해석결과를 얻었다. 기하학적 비선형의 수치해석에서 U.L.과 T.L.수식이 비선형이 심하지 않는 경우는 동일한 결과를 보여주었으며 snap through가 발생하는 문제에서는 2%미만의 차이를 보여준다. 또한 편심 보강평판의 비선형 거동을 해석한 결과 snap back현상을 계산하였다.

N.A.L. 방법과 C.A.L. 방법을 사용한 수치해석에서 구조물의 비선형거동을 조사하는데 적합한 방법으로 판단되었다. 이상의 수치해석 비교를 통하여 본 연구의 Normal arc-length method와 Cylindrical arc-length method는 비선형 유한요소 해석에서 유용하게 활용될 수 있다.

## 參 考 文 獻

- [1] 이재욱, 정기태, 양영태, "선체구조 부재의 좌굴강도 해석 프로그램 개발"인하대학교 산업 기술연구소, 1990
- [2] K.J.Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis" Prentice-Hall, 1982
- [3] O.C.Zienkiewicz, "The Finite Element Method" Third Edition Mcgraw-hill, 1982
- [4] Tore h. Soreide and Torgeir Moan, "Non-linear Material and Geometric Behavior of Stiffened Plates" Report SK/M 31, Trondheim, 1975
- [5] D.R.J.Owen and E.Hinton, "Finite Elements in Plasticity", 1980
- [6] K.J.Bathe, "A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis" ADINA, Report 82448-1
- [7] 전승문, "유한요소법을 이용한 원통형 복합적층 판넬의 비선형 좌굴해석", 한국과학기술원, 박사학위논문, 1987
- [8] K.J.Bathe and Arthur P. Cimento, "Some Practical Procedures for The Solution of Nonlinear Finite Element Equations", J. Comp. Meths.Appl.Mech. Eng.22(1980)59-85
- [9] Pal G.Bergan and Ray W.Clough, "Convergence Criteria for Iterative Processes", AIAA, Aug, 1972
- [10] P.G.Bergan, G.Horrigmoe, B.Krakel and T.H.Soreide, "Solution Techniques for Nonlinear Finite Element Problems", Int.J. Num.Meth.Eng. Vol.12, 1677~1696, 1978
- [11] J.L.Batoz and G.Dhatt "Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems", Int.J.Num.Meth.Eng. Vol.14, 1262~1266, 1979
- [12] E.Riks "An Incremental Approach to The Solution of Snapping and Buckling Problems" Int.J.Solids Structures Vol.15,

- 529~551, 1978
- [13] M.A.Crisfield "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles Snap-Through", *Comp. & Struc.* Vol. 12, 55~62, 1980
- [14] Ekkehard Ramm, "The Riks/Wemmpner Approach : an extension of the displacement control method in nonlinear analyses", Edited by : E. Hinton, D.R.J.Owen and C.Taylor, "Recent Advances in Non-Linear Computational Mechanics" Swansea, U.K. 1982
- [15] P.X.Bellini and A.Chulya, "An Improved Automatic Incremental Algorithm for the Efficient Solution of Nonlinear Finite Element Equations" *Comp. & Struc.* Vol. 26, No.12, PP 99~110, 1987