

大韓造船學會論文集
 第28卷 第1號 1991年 4月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 28, No. 1, April 1991

탄성지반 위에 놓여있는 다지지 보의 동적해석 제 2 보 : 움직이는 하중에 대한 동적응답

최교준*, 김용철**

Dynamic Analysis of the Multi-Span Beam on Elastic Foundation Part two : Dynamic Response for the Moving Loads

by

K. J. Choi* and Y. C. Kim**

要 約

일반적으로 철조 교량과 같은 구조물은 탄성지반위에 놓여있는 다지지보로 모형화 시킬 수 있다. 이러한 구조물 들에 항상 움직이는 하중이 작용하게 된다. 움직이는 하중은 특히 고속일때 구조물 에 심한 운동을 일으키며 또한 구조물의 동적응력에 큰 영향을 미치게 된다.

본 연구에서는 탄성지반위에 놓여있는 다지지보의 동적응답을 Galerkin방법과 수치시간적분방법 을 사용하여 구하였다.

시도함수로서는 제1보(고유진동수)에서 구한 직교 다항식 함수를 사용하였다. 일반적으로 가정된 해의 첫번째 항만을 사용하여도 정확한 해를 구할 수 있으나, 병진 스프링 상수값이 크거나 회전 스프링이 제일차 모우드의 기울기가 영인 지점에 위치할 경우에는 반드시 고차 모우드를 포함하여 해석해야 정확한 해를 구할 수 있다.

Abstract

The structures such as railway bridges can be modelled as the multi-span beam on the elastic foundation. These structures are usually subject to the moving load, which has a great effect on dynamic stresses and can cause severe motions, especially at high velocities. In this paper, the dynamic responses of the multi-span beam on the elastic foundation were obtained by using the Galerkin's method and the numerical time integration technique. As trial functions, the same orthogonal

발표 : 1990년 대한조선학회 춘계연구발표회('90. 4. 15)

접수일자 : 1990년 6월 15일, 재접수일자 : 1990년 10월 24일

*학생회원, 영남대학교 정밀기계공학과

**정회원, 영남대학교 정밀기계공학과

polynomial functions obtained in part 1, were used. From the numerical results, it was found that the one term expansion of the assumed solution usually leads to the accurate solutions. However, in the case that the stiffness of the translational spring is very high or the rotational spring is placed where the slope of the first mode is zero, the higher modes must be included to obtain the accurate solutions.

사용기호

- c : 하중의 이동속도
- C_d : 보의 감쇠 계수
- K : 탄성지반의 강성계수
- K_t, K_r : 병진 및 회전 스프링 상수
- K_0, K_L : $x=0, x=L$ 에서 회전 스프링 상수
- \underline{L} : 단위 길이당 Lagrangian
- L_0 : $x=0, x=L$ 에서 Lagrangian
- Q : 정현파 하중의 진폭
- $\underline{T}, \underline{V}$: 단위 길이당 운동 및 위치 에너지
- ν : 보의 횡 변위
- ν_0 : 단순지지보의 $L/2$ 에서 하중 P_c 에 의한 중앙점의 처짐(= $P_c L^3/48EI$)
- x_b : 중간 지지점의 위치
- x_t, x_r : 병진 및 회전 스프링의 위치
- $\delta\nu$: 가상 변위
- δW_{ac} : 단위 길이당 비 보존 가상 일
- ω_1 : 보의 최저차 고유진동수
- ω_d : 보의 감쇠 고유진동수($C_d=2m \omega_d$)
- ω_h : 정현파 하중의 기진 주파수
- α : 속도인자(= ω/ω_1)
- β : 감쇠인자(= ω_d/ω_1)
- r : 기진인자(= ω_h/ω_1)

1. 서 론

철도, 교량과 같은 구조물의 동적응답을 해석하는 경우에는 중간지지점이 있고 구속조건이 있는 보로 간주하여 문제를 해석할 수 있다. 이러한 구조물에 움직이는 하중이 작용할 경우에는 정적하중이 작용하는 경우보다 일반적으로 더 큰 응답과 응력이 발생하므로 동적응답을 정확히 추정할 필요가 있다.

움직이는 하중에 대한 최근의 연구를 간단히 살펴보면, Fryba[1]는 일정한 속도로 움직이는

하중의 여러가지 경우에 대한 연구결과를 정리하여 발표하였고, Hamada[2]는 이중 Laplace 변환방법을 이용하여 동적응답을 구하였다. Hino, Yoshimura, Konishi와 Ananthanarayana [3], [4]는 유한요소법을 이용하여 교량에 대한 연구를 수행하였고, 진폭이 큰 경우에 대하여 비선형항을 고려하여 Galerkin방법을 사용하여 동적응답을 구하였다. Katz, Lee, Ulsoy와 Scott[5], [6], [7]는 Galerkin방법을 사용하여 회전축에 움직이는 하중이 작용하는 경우에 대하여 동적안정성과 동적응답을 연구하였고, 움직이는 하중이 작용하는 회전축을 모우드 해석 방법, Galerkin방법과 적분변환방법 등으로 해석하였다. 그러나 구속조건이 있는 경우, 참고 문헌[8], [9] 등에서는 회전스프링이 보의 중간부분에 부착되어 있는 경우에 대하여 운동방정식의 집중모우멘트 항을 잘못 유도하여 사용한 경우가 있다.

본 논문에서는 스프링힌지, 고정(Clamped), 단순지지, 탄성지반, 다수의 병진 및 회전스프링 그리고 중간지지점의 조합으로 구성되어 있는 보에 대하여 우선 Hamilton원리에 의하여 정확한 보의 특성방정식을 유도하고 Galerkin방법과 수치적분 방법을 사용하여 동적응답을 구하였다. 또한 구속조건 및 경계조건이 변함에 따라 동적응답에 미치는 영향을 연구하였다.

2. 운동 방정식 및 경계조건

운동 방정식을 유도하기 위하여 Fig.1과 같은 형태의 보를 생각하기로 한다. 보는 세장형이고 회전관성효과 및 전단변형을 무시한다고 가정한다. 양단이 프스링 힌지로 되어 있고, p개의 병진스프링, q개의 회전스프링, 중간지지점을 가지고 Winkler형태의 지반에 놓여있는 보

의 운동방정식은 Hamilton 원리를 이용하여 다음과 같이 유도된다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L [\delta L + \delta W_{nc}] dx + \delta L_0 \right\} dt = 0 \quad (1)$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\nu}^2 - \frac{1}{2} EI \nu'^2 - \frac{1}{2} K \nu^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p K_{ii} \delta(x-x_{ii}) \nu^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q k_{ij} \delta(x-x_{ij}) \nu^2$$

$$L_0 = -\frac{1}{2} K_0 \nu^2 \Big|_{x=0} - \frac{1}{2} K_L \nu^2 \Big|_{x=L}$$

$$\delta W_{nc} = -C_d \nu \delta \nu + P_t \delta(x-ct) \delta \nu$$

$$P_t = P_c + Q \sin(\omega_h t)$$

여기서 δ 는 Dirac delta 함수, \cdot 는 시간에 대한 미분, $'$ 는 x 에 대한 미분을 나타내고, 이동하중 P_t 는 정적하중(P_c)과 기진주파수가 ω_h 인 동적하중($Q \sin(\omega_h t)$)으로 구성되어 있다. 식(1)을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[-m \ddot{\nu} - EI \nu'' - K \nu - \sum_{i=1}^p K_{ii} \delta(x-x_{ii}) \nu + \sum_{j=1}^q k_{ij} (\delta(x-x_{ij}) \nu)' - C_d \dot{\nu} + p_t \delta(x-ct) \delta \nu \right] dx - EI \nu'' \delta \nu \Big|_0^L + EI \nu'' \delta \nu \Big|_0^L - K_0 \nu \delta \nu \Big|_{x=0} - K_L \nu \delta \nu \Big|_{x=L} \right\} dt = 0 \quad (2)$$

윗 식으로부터 다음과 같은 운동방정식과 경계조건을 구할 수 있다.

$$m \ddot{\nu} + EI \nu'' + K \nu + \sum_{i=1}^p K_{ii} \delta(x-x_{ii}) \nu - \sum_{j=1}^q k_{ij} \delta(x-x_{ij}) \nu' = 0 \quad (3)$$

$$(\delta(x-x_{ij}) \nu)' + C_d \dot{\nu} = P_t \delta(x-ct) \quad (3)$$

$$EI \nu'' - K_0 \nu = 0 \quad \text{at } x=0 \quad (4)$$

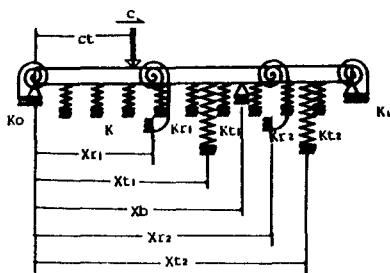


Fig.1 The restrained beam with an intermediate support

$$EI \nu'' + K_L \nu = 0 \quad \text{at } x=L$$

$$\nu = 0 \quad \text{at } x=0, L$$

$$\nu = 0 \quad \text{at } x=x_{bi} (i=1, 2, \dots, m)$$

식(3), (4)와 초기조건을 설정하여 해를 구할 수 있다.

3. 해석방법

무차원화된 운동방정식, 경계조건 및 초기조건은 다음과 같다.

$$\frac{L^4 m}{EI} \ddot{\nu}^* + 2\omega_d \frac{L^4 m}{EI} \dot{\nu}^* + \nu^{*iv} + \frac{L^4 m}{EI} \nu^* + \sum_{i=1}^p \frac{L^3 K_{ii}}{EI} \delta(x^* - x_{ii}^*) \nu^* - \sum_{j=1}^q \frac{L K_{ij}}{EI} \delta(x^* - x_{ij}^*) \nu^{*j} = 0 \quad (5)$$

$$\{\delta(x^* - x_{ij}^*) \nu^{*j}\}' = P \delta^*(x^* - \omega t / \pi)$$

$$\nu^{*j} = S_0 \nu^* \quad \text{at } x^* = 0$$

$$\nu^{*j} = -S_L \nu^* \quad \text{at } x^* = 1$$

$$\nu^* = 0 \quad \text{at } x^* = 0, 1, x_{bi}^*$$

$$\nu^* = \dot{\nu}^* = 0 \quad \text{at } t = 0$$

여기서, $\nu^* = \nu / \nu_0$, $\delta^* = \delta \times L$, $x^* = x / L$, $C_d = 2m \omega_d$, $C^* = C / L = \omega / \pi$ 이다. 특성길이 ν_0 는 단순지지보의 중간점에 정적하중 P_c 혹은 Q 가 작용하는 경우 중간점($x=L/2$)에서의 정적처짐을 나타내며, 식(5)에서 $P_c=0$ 일 경우는 $\nu_0 = QL^3 / 48EI$, $P=48 \sin(\omega_h t)$ 이고, $P_c \neq 0$ 일 경우에는 $\nu_0 = PL^3 / 48EI$, $P=48(1 + Q/p_c \sin(\omega_h t))$ 이다. (이하 무차원을 의미하는 기호* 생략) 보의 횡방향 변위는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\nu^*(x, t) = \sum_{k=1}^n \phi_k(x) Y_k(t)$$

여기서 $\phi_k(x)$ 는 모든 경계조건과 직교조건을 만족하는 다항식 시도함수로서, 자세한 유도과정은 제1보(고유진동수)에 기술되어 있다. 이 식을 식(5)에 대입하면, 오차함수는 다음과 같다.

$$R(\nu^*, x) = \sum_{k=1}^n \phi_k^{iv} Y_k + G \sum_{k=1}^n \phi_k \ddot{Y}_k + 2\omega_d \sum_{k=1}^n \phi_k \dot{Y}_k + S \sum_{k=1}^n \phi_k \dot{Y}_k + S \sum_{k=1}^n \phi_k Y_k + \sum_{i=1}^p S_{ii} \delta(x-x_{ii}) \sum_{k=1}^n \phi_k Y_k - P \delta(x-\omega t / \pi)$$

$$G \sum_{k=1}^n \phi_k \dot{Y}_k + S \sum_{k=1}^n \phi_k Y_k + \sum_{i=1}^p S_{ii} \delta(x-x_{ii}) \sum_{k=1}^n \phi_k Y_k - P \delta(x-\omega t / \pi)$$

$$Y_k - \sum_{j=1}^q S_{ij} (\delta(x-x_{ij}) \sum_{k=1}^n \phi_k Y_k)' - P \delta(x-\omega t / \pi)$$

여기서, $G = \frac{L^4 m}{EI}$, $S = \frac{L^4 K}{EI}$, $S_{ij} = \frac{L^3 K_{ij}}{EI}$, $S_{ij} = \frac{LK_{ij}}{EI}$ 이다.

Galerkin 방법을 이용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$(\phi_m, R) = \int_0^1 \phi_m R dx$$

$$= G \sum_{K=1}^n \int_0^1 \phi_K \phi_m dx \ddot{Y}_K + 2\omega_0 G \sum_{K=1}^n \int_0^1 \phi_K \phi_m dx \dot{Y}_K$$

$$+ \sum_{K=1}^n F_{K_m} Y_K - P \phi_m |_{x=\omega t/\pi} = 0 \quad (6)$$

($m=1, 2, \dots, n$)

여기서,

$$F_{K_m} = \delta_{K_m} S - \phi_K'' \phi_m' |_0 + |_1 \phi_K'' \phi_m' dx$$

$$+ \sum_{i=1}^p S_{ui} \phi_K \phi_m |_{x=x_{ui}} + \sum_{j=1}^q S_{vj} \phi_K' \phi_m' |_{x=x_{vj}}$$

식(6)로부터 다음과 같은 형태의 연립된 미분 방정식을 얻을 수 있으며, 이 식을 수치적분하여 동적응답을 구할 수 있다.

$$\sum_{K=1}^n \{ G \delta_{K_m} (\ddot{Y}_K + 2\omega_0 \dot{Y}_K) + F_{K_m} Y_K \}$$

$$= P \phi_m |_{x=\omega t/\pi} \quad (7)$$

($m=1, 2, \dots, n$)

여기서, 고유진동수 ω_1 은 $[F_{ij}] \{D\} = G\omega_n^2 \{D\}$ 인 고유치문제로부터 구한다[참고 (제1보 : 고유진동수)].

4. 수치해석 결과 및 고찰

본 논문에서 제시한 방법을 검증하기 위하여

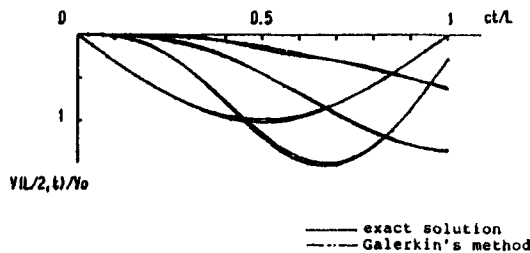


Fig.2 The dynamic response of the system at $x=L/2$

기존의 문헌[1]중에서 완전해가 구하여진 간단한 경우에 대하여 수치계산을 수행하여 비교하였다. Fig.2에서는 단순지지보에서 감쇠인자 β 가 0.1인 경우, 속도인자 $\alpha=0, 0.5, 1, 2$ 에 대하여 중간점($x=0.5$)에 대한 동적응답을 완전해와 Galerkin방법에 의하여서 구하여진 해를 비교하였다. $\alpha=0$ 인 경우는 정적하중의 위치 x_p 를 0에서 1까지 변화 시킬 때 중간점에서의 처짐을 나타내었다. 이는 단순지지보에서 중간점에 정적하중이 작용할 경우, 보의 처짐을 나타낸 것과 같다. α 가 값을 가지는 경우는 하중이 보를 떠나는 순간까지 강제진동을 하며, 이에 대하여 동적응답을 나타내었다. $\alpha=1$ 인 경우는 무차원화 된 속도 c 가 3.5149 sec^{-1} 로서, 보의 길이 L 이 100m 라고 하면 속도가 1265km/hour 로서 실제 문제보다 대단히 큰 속도이다. 이 경우는 하중이 보를 떠나는 순간 변위는 증가하고 있다. Fig.3은 단순지지보에서 정적하중 $P_c=0$, 속도인자 $\alpha=0.1$, 감쇠인자 $\beta=0$ 이고 기진인자 $\gamma=1$, 즉 하중의 기진주파수가 보의 최저차 고유진동수와 공진을 일으키며 이동하는 경우로서, 감쇠작용이 없기 때문에 동적응답은 증가한다. Fig.4는 Fig.3의 경우와 같은 조건에서 $\beta=0.15$ 로 계산하여 완전해와 Galerkin 방법에 의하여서 구하여진 해를 비교하였다. 이 경우는 하중이 보의 끝점에 도달하기 전에 감쇠의 영향으로 동적응답이 적어지는 것을 볼 수 있다. Fig.2, 3, 4에서 완전해와 Galerkin 방법으로 구한 해가 한개의 모우드를 사용하여서 계산하여도 두 결과가 거의 일치되는 것을 알

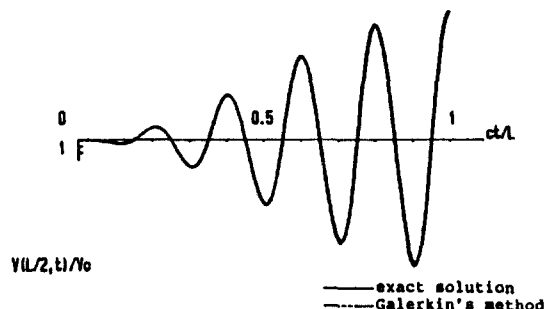


Fig.3 The dynamic response of the system at $x=L/2$

수 있다. Fig.5는 단순지지보에서 회전스프링의 영향으로서 $\alpha=0.5$, 스프링상수 $S_{r1}=200$ 인 회전스프링의 위치 x_{r1} 의 변화에 대한 중간점의 동적응답을 나타낸다. 회전스프링이 보의 중간점에 위치할 경우, 모우드의 형상($\phi_1'(x=0.5)=0$)에 의하여 한개의 모우드를 사용하여 계산하면 회전스프링의 영향을 나타낼 수 없다. 그러나 모우드 수를 증가하여서 계산하면 회전스프링의 영향을 나타낼 수 있지만 그 영향은 매우 적다. 회전스프링의 위치에 대한 영향은 회전스프링의 위치에서 실제 운동에 가장 큰 영향을 미치는 모우드 ϕ_1 의 기울기에 의하여 결정된다. 따라서 운동방정식의 회전 모우멘트항을 정확히 나타내기 위하여서는 본 논문에서 유도된 항을 사용하여야 한다. Fig.6은 단순지지보에서 동적하중 $Q=0$ 인 경우 속도인자 α 와 탄성지반의 스프링상수 S 가 동적응답에 미치는

영향을 나타낸다. 스프링상수가 클수록 동적응답이 적어지는 것을 알 수 있다. 하중의 이동속도가 적은 경우($\alpha=0.3$)의 최대 응답은 하중이 보의 중간 부분에 도달할 때 일어나지만 이동속도가 커질수록 중간 이후 부분에서 일어난다. Fig.7은 경계조건이 동적응답에 미치는 영향을 나타낸다. 양단이 고정될 수록 동적응답의 크기가 적어지는 것을 알 수 있다. Fig.8은 단순지지보에서 병진스프링의 영향으로서 $\alpha=0.5$, 스프링상수 $S_{t1}=200$ 인 병진스프링의 위치 x_{t1} 의 변화에 대한 동적응답을 나타낸다. 중간점을 기준으로 대칭거리에 있는 병진스프링에 대한 응답은 한개의 모우드를 사용하여서 계산할 경우 모우드의 형상에 의해 같은 동적응답을 나타내지만, 모우드 수를 증가시켜서 계산하면 다른 결과를 얻는다. Fig.9는 단순지지보에서 중간지지점의 위치 x_b 가 0.9일 경우 α 의 변화에 대한 동적응답을 나타내었다. Fig.6의 경우와 같이 α 가 적을수록 진동 응답

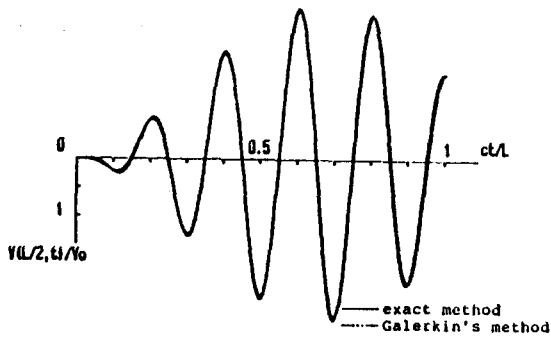


Fig.4 The dynamic response of the system at $x=L/2$

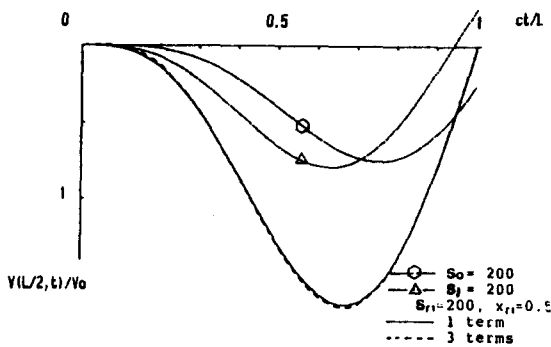


Fig.5 The effects of the rotational spring

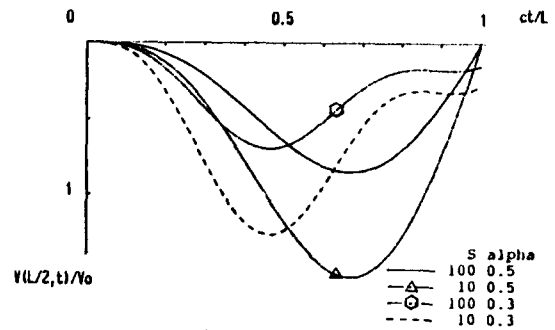


Fig.6 The effects of the elastic foundation

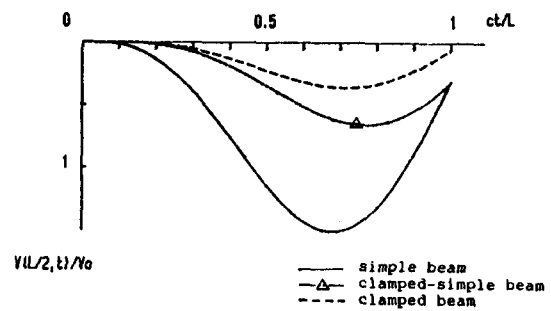


Fig.7 The effects of the various boundary conditions

주파수는 커지는 것을 알 수 있다. Fig.10은 단순지지보에서 $\alpha=0.4$ 이고 스프링상수가 매우 큰 경우를 나타낸다. 한개의 모우드를 사용하여 계산한 결과는 커다란 오차를 나타내지만, 모우드 수를 증가시켜서 계산하면 중간지지점으로 대치한 경우의 응답에 근접하는 정확한 영향을 나타낼 수 있다.

Fig.11은 단순지지보에서 $\alpha=0.5$ 일 경우 중간 지지점의 위치 x_0 가 중간점의 동적응답에 미치는 영향을 나타낸다.

5. 결 론

이상과 같은 수치 해석 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 일반적으로 일차 모우드만을 사용하여 계산하여도 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있으나 스프링 상수가 크거나, 회전스프링이 보의

중간 부분에 위치한 경우에는 고차 모우드를 사용하여야 정확한 동적응답을 구할 수 있다.

2. 탄성지반이 있는 경우에는 지반의 강성계수가 클수록 동적응답의 크기가 작아지며, 하중의 이동 속도가 적은 경우, 최대 응답은 하중이 중간 부분에 도달할 때 일어나지만, 이동 속도가 커질 수록 중간 이후 부분에서 일어난다.

3. 탄성지반이나 중간지지점이 있는 경우에는 속도인자 α 가 0.5보다 적은 범위에서 진동 응답의 크기는 작아지나, 진동 응답주파수는 커진다.

4. 구속 조건이 많고 중간지지점이 있는 보에서 움직이는 하중에 대한 동적응답 해석은 본 논문의 방법으로 효과적으로 수행할 수 있다.

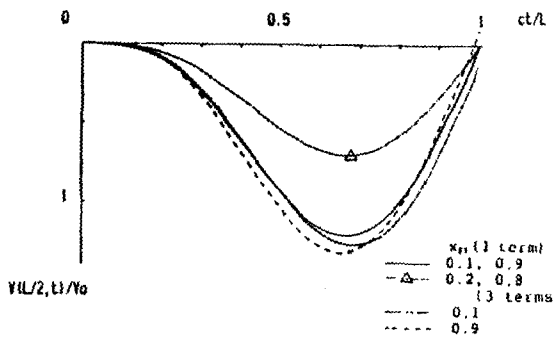


Fig.8 The effects of the translational spring

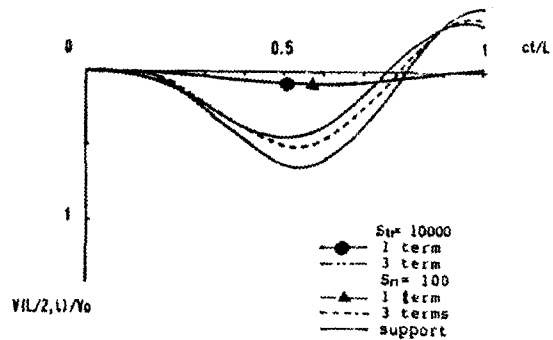


Fig.10 The effects of the spring and mode number

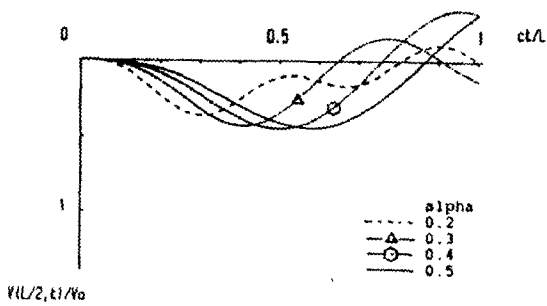


Fig.9 The effects of the alpha with an intermediate support

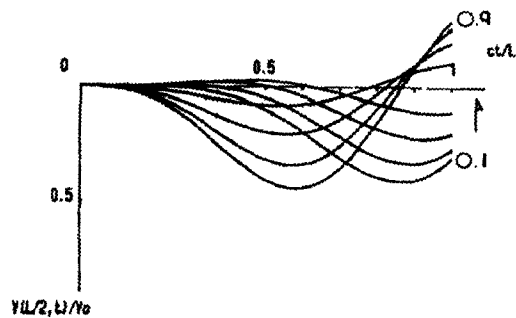


Fig.11 The effects of the location of the intermediate support

참 고 문 헌

- [1] L. Fryba, "Vibration of Solids and Structures under Moving Loads", Groningen : Noordhoff International Publishing, 1972.
- [2] T. R. Hamada, "Dynamic Analysis of a Beam under a Moving Force : A Double Laplace Transform Solution", Journal of Sound and Vibration, 74, pp.221-223, 1981.
- [3] J. Hino, T. Yoshimura, K. Konishi and N. Ananthanarayana, "A Finite Element Method Prediction of the Vibration of a Bridge Subjected to a Moving Vehicle Load", Journal of Sound and Vibration, 96, pp.45-53, 1984.
- [4] T. Yoshimura, J. Hino and N. Ananthanarayana, "Vibration Analysis of a Non-linear Beam Subjected to Moving Loads by Using the Galerkin Method", Journal of Sound and Vibration, 104, pp.179-186, 1986.
- [5] R. Katz, C. W. Lee, A. G. Ulsoy and R. A. Scott, "Dynamic Stability and Response of a Beam Subject to a Deflection Dependent Moving Load", Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, 109, pp.361-365, 1987.
- [6] C. W. Lee, R. Katz, A. G. Ulsoy R. A. Scott, "Modal Analysis of a Distributed Parameter Rotation Shaft", Journal of Sound and Vibration, 122, pp.119-148, 1988.
- [7] R. Katz, C. W. Lee, A. G. Ulsoy and R. A. Scott, "The Dynamic Response of a Rotating Shaft Subject to a Moving Load", Journal of Sound and Vibration, 122, pp.131-148, 1988.
- [8] R. G. Jacquot and J. D. Gibson, "The Effects of Discrete Masses and Elastic Supports on Continuous Beam Natural Frequencies", Journal of Sound and Vibration, 23, pp.237-244, 1972.
- [9] L. Ercoli and P. A. A. Laura, "Analytical and Experimental Investigation on Continuous Beams Carrying Elastically Mounted Masses", Journal of Sound and Vibration, 114, pp.519-533, 1987.
- [10] M. Sasaki and S. Chonan, "Parametric Instability of Elastically Supported Multi-span Beams", Journal of Sound and Vibration, 109, pp.181-191, 1986.
- [11] C. W. Cai, Y. K. Cheung and H. C. Chan, "Dynamic Response of Infinite Continuous Beams Subjected to a Moving Force— and Exact Method", Journal of Sound and Vibration, 123, pp.461-472, 1988.
- [12] Meirovitch, L., "Computational Methods in Structural Dynamics", Sijthoff & Noordhoff International Publishers, The Netherlands, 1980.
- [13] Meirovitch, L., "Method of Analytical Dynamics", McGraw-Hill Book Co, New York, 1970.