

論文 91-28A-5-3

3 차원 유한요소법에 의한 도파로의 불연속 특성 해석

(Analysis of Transmission-line Discontinuities
by 3-dimensional Finite Element Method)

李 相 洙*, 安 昌 會**, 鄭 奉 植**, 李 壽 永**

(Sang Soo Lee, Chang Hoi Ahn, Bong Sik Jeong, and Soo Young Lee)

要 約

도파로의 불연속 특성의 해석을 3차원 유한요소법을 사용하여 해석하였다. 본 연구에서는 quasi-static으로 근사하여 Laplace 방정식을 3차원 유한 요소법으로 풀어 등가회로정수(equivalent circuit parameter)를 계산하였다. 그리고 capacitance 계산시 오차를 줄이기 위하여 불연속 효과만에 의한 전계변수를 도입하여 수식화하였다. 먼저 coaxial cable 문제를 해석하여 다른 방법의 결과와 비교하였으며, 나아가 유한한 길이를 가지고 높은 유전율의 내부 매질을 가진 2 및 4-conductor 도파관의 경우를 해석해 보았다.

Abstract

A transmission-line discontinuities are analyzed by Finite Element Method. We use quasi-static approximation to determine the circuit parameters of discontinuities. Delta formulation is introduced so that the cancellation error of potential calculation is reduced. To verify this method, capacitance of coaxial cable with discontinuous end is calculated. Furthermore, multi-conductor transmission-line discontinuities is analyzed and coupling capacitances are calculated by modal expansion. This approach can be used for arbitrary discontinuous conducting patterns of micro-wave devices.

I. 서 론

지금까지 Matrix inversion method,^[1] 변분법(variational method),^[2] 파수영역의 Galerkin방법,^[3] 모드 정합법,^[4] Wiener-Hopf 방법을 비롯한 각종 변환등 다양한 도파로(waveguide)의 불연속(discontinuity) 특성 해석 방법이 개발되었다. 간단히 살펴보면, Mat-

rix inversion method는 해석 영역을 작은 요소(element)로 나누고 각 절점에서 만족하는 선형방정식을 행렬로 만들어 이것을 푸는 것이며, 변분법은 구조내의 전계분포를 적당히 가정하고 이것을 이용하여 회로정수를 구하는데 이는 전계의 크기에는 민감하지 않으므로 전계를 잘 가정하면 근사한 값을 얻을 수 있다. 모드 정합법은 불연속 경계면 양쪽에서 나타날 수 있는 모드를 급수 전개시켜 경계조건을 사용하여 정합시키고 그밖에 모드 직교성등을 이용하여 계수를 구하는 것이며, Wiener-Hopf 방법은 양갈래도파로(bifurcated waveguide)등에 나타나는 Wiener-Hopf 형태의 적분방정식의 해법에 사용된다.

*準會員, 國防部

(Ministry of National Defence)

**正會員, 韓國科學技術院 電氣및 電子工學科

(Dept. of Elec. Eng., KAIST)

接受日字: 1991年 3月 5日

여기서는 quasi-static으로 가정하고 불연속만의 효과를 등가 capacitance parameter로 표시하였는데 이는 불연속의 효과가 자계보다는 전계에 대부분 영향을 미치기 때문이다. Capacitance의 해석은 수치해석 기법인 3차원 유한요소법(finite element method)을 도입하여 구하였다.

먼저 해석해가 존재하는 그림 1과 같은 간단한 coaxial cable 문제를 유한요소법으로 풀어서 비교해 보았다. Multi-conductor waveguide의 경우는 그림 1의 경우를 그대로 확장하여 capacitance 행렬을 구할 수 있다. 나아가서 본 연구에서는 그림 2와 같이 유한한 길이를 가지고 내부 매질이 유전율이 높은 ($\epsilon_r=90$) 세라믹으로 되어있는 multi-conductor의 capacitance 행렬을 계산해 보았다. 이 때 불연속 패턴은 $z=0$ 평면에 존재하며, 2 및 4-conductor 도파로의 경우에 대하여 해석하였다. 유전율이 높은 매질은 최근들어 도파로나 소자의 소형화를 위해 많이 사용하는데, 그림 2의 양끝의 경계조건을 법선미분이

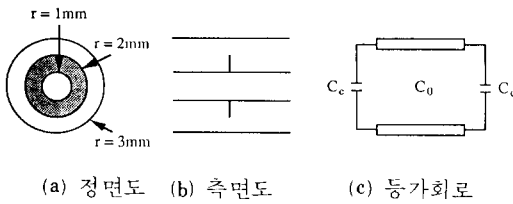


그림 1. 정전 불연속면이 있는 coaxial guide
(a) 단면도 (b) 측면도 (c) 등가 회로

Fig. 1. Capacitive window in coaxial guide.
(a) cross sectional view,
(b) side view,
(c) equivalent circuit.

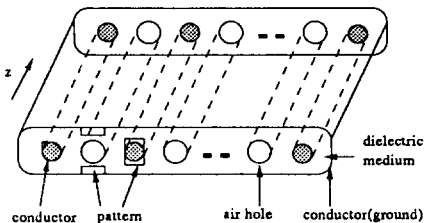


그림 2. 고주파 전자소자로 이용되는 multi-conductor guide.
Fig. 2. Multi-conductor waveguide device.

0이라고 근사 할 수 있으므로 해석을 간단하게 할 수 있다.

II장에서 불연속 capacitance를 계산하는 방법과 오차를 줄이기 위하여 도입된 delta formulation과 유한요소법 및 전하량과 capacitance 계산 방법을 보았으며, III장에서 coaxial cable과 2 및 4-conductor 도파로 문제의 capacitance matrix를 계산해 보았다.

II. 도파로 (waveguide)의 불연속 (discontinuity) 특성 해석

1. 불연속 capacitance 계산 방법^{15,6)}

불연속에 의한 capacitance는 불연속 영역에 추가로 생기는 전하량을 계산함으로써 구할 수 있다. 등가회로는 그림 1(c)와 같이 길이가 무한대 일때의 특성 capacitance C_0 와 불연속에 의해 추가로 생기는 전하량에 의한 등가 capacitance C_c 로서 표현될 수 있다.

그러므로 C_c 는 아래의 식에 의해 계산되어질 수 있다.

$$C_c = \lim_{L \rightarrow \infty} (C_t(L) - C_0 L) \tag{1}$$

여기서 C_t 는 길이 L에대한 총 capacitance의 합인데 3차원 유한요소법으로 구하며, 길이 L을 무한대로 잡아야 정확한 값을 구할 수 있으나 이것은 수치해석상 불가능하므로 처음 적당히 L을 정하여 계산한후 L을 늘리면서 C_c 가 어떤값에 수렴할때까지 L을 증가시킨다.

2. 차전계 변수에 의한 수식화(delta formulation)

C_t 와 C_0 은 각각 아래의 식(2)와 (3)과 같은 Laplace 방정식을 풀어서 구한다.

$$\nabla^2 \phi^{3D} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla^2 \phi^{2D} = 0 \tag{3}$$

여기서 ϕ^{3D} 는 3차원 해석시 전위(potential)이고 ϕ^{2D} 는 2차원 해석시 전위이다. 그러나, C_t 와 C_0 모두 큰 값이고 큰값에서 큰값을 빼서 작은 C_c 를 얻는것(total variable)은 오차가 크게 되므로 정확한 C_t 와 C_0 L의 계산이 요구된다. 그러므로 여기서는 아래의 식(4)에서 보는 바와 같이 두개의 전위(potential) 차에 의한 Laplace 방정식을 풀어서 직접 C_c 를 구한다.

(delta variable)

$$\nabla^2 \Psi = 0 \tag{4}$$

$$\Psi = \phi^{3D} - \phi^{2D} \quad (5)$$

경계조건 (boundary condition)은 식(2)와(3)을 계산 할때는 그림 3(a), (c)에서 보는바와 같이 양 단면부 분에서는 Neumann 경계조건으로 그외의 도체경계는 Dirichlet 경계조건으로 각각 그 도체에 인가된 전압 을 값으로 갖는다. 그러나 식(4)의 delta formulation 의 경우는 차에 의한 formulation이므로 Dirichlet 경 계조건은 그 전위의 차에의한 값을 갖는다. 즉 안쪽 및 바깥쪽 도체는 모두 0 을 가지고 불연속 도체 패 턴이 있는 부분에서만 그림 3(b), (d)와 같은 값을 갖 는다. 여기서 ϕ^{3D} 는 도체 패턴에 인가된 전위이고 ϕ^{2D} 는 도체 패턴이 없을 경우의 전위로서 2차원적으 로 구한다.

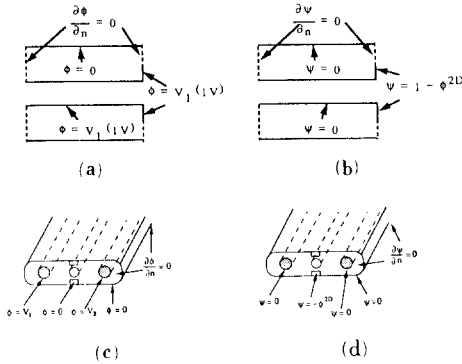


그림 3. 각 전위 변수의 경계 조건
 (a), (c) 전전위 변수의 경계조건(측면도 및 단면도)
 (b), (d) 차전위 변수의 경계조건(측면도 및 단면도)

Fig. 3. Boundary conditions of potential variables.
 (a), (c) boundary conditons of total variable, (side and cross sectional view)
 (b), (d) boundary conditons of delta variable, (side and cross sectional view)

3. 유한요소법^{17,8)}

유한 요소법이란 해석하고자 하는 영역을 그림4(a)와 같이 작은 영역, 즉 요소(element)로 분할하고 계산을 원하는 변수를 요소마다 미지수를 포함하는 함수로 놓은 후, 이 함수를 변수가 만족시켜야 하는 방정식에 대입하여 변수를 계산하는 방법이다.

그림 4(a)의 모든 절점(node)에서 만족하는 연립 선형방정식을 구하여 그것을 풀면 그 절점에서 전위(electric potential)를 구할 수 있다.

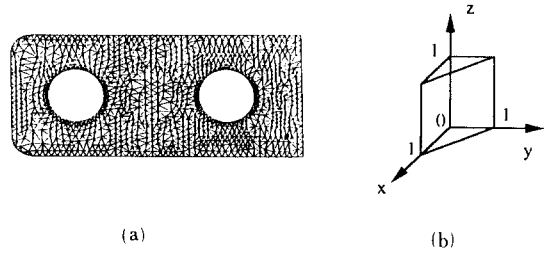


그림 4. 5면체로 영역을 나눈 모양
 (a) 4-conductor의 단면 요소 분할(1/2)
 (b) 5면체 표준 요소

Fig. 4. Configuration of mesh generation.
 (a) tessellation of the half of 4-conductor guide,
 (b) standard prism element.

사용된 mesh는 그림 4(b)와 같은 5면체 프리즘 mesh이며 이때의 표준 국소 기초 함수는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \phi_1^s(x_s, y_s, z_s) &= (1-x_s-y_s)(1-z_s) \\ \phi_2^s(x_s, y_s, z_s) &= x_s(1-z_s) \\ \phi_3^s(x_s, y_s, z_s) &= y_s(1-z_s) \\ \phi_4^s(x_s, y_s, z_s) &= (1-x_s-y_s)z_s \\ \phi_5^s(x_s, y_s, z_s) &= x_s z_s \\ \phi_6^s(x_s, y_s, z_s) &= y_s z_s \end{aligned} \quad (6)$$

식(4)를 경계조건과 함께 다시 쓰면 아래와 같다.

$$Lu = (\Psi_x)_x + (\Psi_y)_y + (\Psi_z)_z = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (7)$$

$$\Psi = \gamma \quad \text{on Dirichlet boundary} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 \quad \text{on Neumann boundary} \quad (9)$$

Ψ 를 아래의 식(10)로 근사 전개하여 위의 식(7)과 함께 풀면 식(11)과 같은 행렬 방정식이 얻어진다.

$$\Psi = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i + \sum_{i \in I_0} \gamma(N_i) \phi_i \quad (10)$$

$$K c = g \quad (11)$$

여기서 K matrix는

$$K_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)_\Omega = \int_\Omega F(\phi_j, \phi_i) dx dy dz \quad (12)$$

이고 ϕ_i, ϕ_j 는 각각 절점 i와 j에서 기초함수이다. 여기서

$$F(\phi_j, \phi_i) = (\phi_j)_x (\phi_i)_x + (\phi_j)_y (\phi_i)_y + (\phi_j)_z (\phi_i)_z \quad (13)$$

이다.

4. 전하량 및 capacitance 계산

유한요소법에 의해 계산된 전위로 부터 도체 표면에서 전위의 법선(normal)미분을 구하고 그 양을 전도체 표면에서 적분하여 전하량(charge)을 계산한다. 법선 미분은 각 표면에 인접한 요소의 절점에서의 전위를 알면 구할 수 있다. 그런데 도체 표면에서는 전위의 법선 미분의 변화가 심하고, delta formulation의 경우는 불연속 도체 부분의 전하량은 증가하므로 양(+)의 값으로 나타나고 불연속이 없는 부분은 상대적으로 전하량이 감소하여 음(-)의 전하량을 나타내므로 두값을 합할때 서로 상쇄되는 부분이 생겨 오차가 커진다. 그래서 다소 큰 폐로(closed loop)를 만들어 그 경계상에서 법선 미분을 구한 다음 적분하여 오차를 줄였다.(Gauss 법칙이용) 폐로의 크기에 따른 효과는 표 1에 나타났다.

표 1. 페루프의 크기에 따른 불연속 효과에 대한 capacitance (r=페루프의 반경)
 (a) 절점수가 14950개 일 때
 (b) 절점수가 20930개 일 때

Table 1. Pattern capacitance depend on the size of closed loop.

- (a) # of nodes=14950,
- (b) # of nodes=20930.

*	total variable				delta variable			
	1	2	3	4	1	2	3	4
C _c	1.20	9.88	9.70	9.48	7.614	7.540	7.528	7.512
%error	84.7	26.1	23.8	20.9	2.9	3.8	4.0	4.2

(a)

*	total variable				delta variable			
	1	2	3	4	1	2	3	4
C _c	3.0	9.82	9.62	9.40	7.480	7.544	7.532	7.516
% error	61.7	25.3	22.7	19.9	4.6	3.8	3.9	4.1

- * 1. r=2.0mm 3. r=2.5mm
- 2. r=2.25mm 4. r=2.75mm

(b)

이제 multi-conductor의 경우는 capacitance 대신 capacitance matrix로서 표시되며, 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$Q = C V \tag{14}$$

$$C_{ij} = \frac{Q_i}{V_j} \Big|_{V_j=1, V_{k \neq j}=0} \tag{15}$$

여기서 C는 행렬이고, Q, V는 각각 charge와 인

가 전위를 나타내는 벡터이며, i, j는 행과 열을 나타낸다. 수치계산시 전체영역을 모두 계산하면 컴퓨터 기억용량이 문제가 되므로 그림 2에서 보는 바와 같이 모드경계면 좌우로 대칭성을 이용하여 1/2만 계산하게 된다. 인가되는 전위의 크기는 I[V]라고 가정하면 C_{ij}는 아래와 같이 계산된다. 먼저 도체의 갯수가 짝수일때에 대하여 알아보면

$$C_{ij} = (Q_i^+ + Q_i^-) / 2, \\ C_{i, n-j+1} = (Q_i^+ - Q_i^-) / 2, \quad i=1, 2, \dots, m. \tag{16}$$

여기서 m=n/2이고, Q_i⁺, Q_i⁻는 각각 좌우 동일한 전위(even potential)이 인가되었을 경우와 좌우 부호가 다른 전위(odd potential)이 인가되었을 경우의 i번째 도체에 유기되는 전하량이며, 각각에 대하여 j를 1에서 m까지 반복한다. 도체의 갯수가 홀수일때도 이와 유사하게 계산되어질 수 있다.

III. 수치해석 결과

표 1은 그림 1의 경우의 해석 결과이며 페루프의 크기에 따른 C_c의 변화를 나타내었다. 여기서 단위는 ×10⁻¹³[F]이다. 전체적으로 절점수가 클때와 delta variable일때가 오차가 적었고, 도체 경계에서 바로 적분한 경우보다 페루프상에서 적분했을 경우가 오차가 적었다.

페루프를 사용했을 경우는 작은 절점들을 가지고도 원하는 정확도를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 수치해석 결과는 약 7.5에 수렴하는 것을 볼 수 있으며 1의 경우 절점수가 20930 일때 7.480, 14950 일 때 7.614가 나왔는데 이는 도체 경계에서 바로 적분했을 경우는 절점수를 더 늘려야 수렴할 것임을 보여준다. 이 문제는 Marcuvitz⁹⁾에 의해 변분법으로 해석된 값은 7.8×10⁻¹³이 이나 이 값은 제한조건 하에서 수 %의 오차를 가정하고 있다.

표 2와 3은 그림 2의 2 및 4-conductor 문제의 불연속 capacitance를 나타내었다.

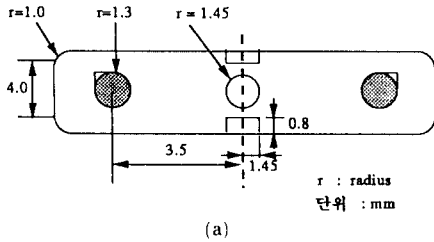
IV. 결 론

도파로의 불연속 특성을 정전계 문제로 근사화시키고, 불연속만의 효과를 3차원 FEM을 사용하여 등가 capacitance로 추출하였다. 수치계산에 의한 오차를 줄이기 위해 불연속 효과만에 의한 전계를 변수로 한 Laplace 방정식을 풀었으며, 또한 법선미분에 의한 오차를 줄이기 위하여 가상의 페루프(closed loop)상에서 전하량을 계산하였다.

해석은 비교 데이터가 있는 1-conductor coaxial

표 2. 2-conductor의 패턴 capacitance 행렬
(a) 2-conductor guide의 사양
(b) capacitance 행렬

Table 2. Pattern capacitance matrix of 2-conductor guide.
(a) geometry of 2-conductor guide,
(b) capacitance matrix.



i \ j	1	2
1	-2.092E-14	2.616E-14
2	2.516E-14	-2.092E-14

(b)

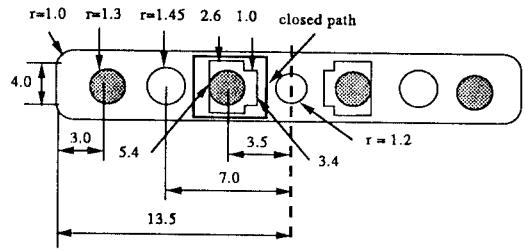
cable의 capacitance 및 유한한 길이를 가지고 매질의 상대유전율이 90인 2 및 4-conductor 도파로의 불연속 capacitance matrix를 계산해 보았다. 계산된 결과는 초고주파 전자 소자의 특성해석에 이용될 수 있다.

参 考 文 献

[1] Farrar, A. and A.T. Adams, "Matrix methods for microstrip three dimensional problems," *IEEE Trans*, vol. MTT-20, pp. 497-504, 1972.
 [2] Maeda, M., "An analysis of gap in microstrip transmission lines," *IEEE Trans*, vol. MTT-20, pp. 390-396, 1972.
 [3] Itoh, T., R. Mittra, and R.D. Ward, "A method for computing edge capacitance of finite and semi-finite microstrip lines," *IEEE Trans*, vol. MTT-20, pp. 847-849, 1972.

표 3. 4-conductor의 패턴 capacitance 행렬
(a) 4-conductor guide의 사양
(b) capacitance 행렬

Table 3. Pattern capacitance matrix of 4-conductor guide.
(a) geometry of 4-conductor guide,
(b) capacitance matrix.



i \ j	1	2	3	4
1	1.100E-16	-7.388E-15	4.560E-18	9.499E-22
2	-7.388E-15	1.0907E-12	-1.054E-13	4.560E-18
3	4.560E-18	-1.054E-13	1.0907E-12	-7.388E-15
4	9.499E-22	4.560E-18	-7.388E-15	1.100E-16

(b)

[4] Mikio Tsuji and Hiroshi Shigesawa, "Edge-effect theory in mode-matching method for the analysis of printed circuits," *The 3rd Asia-pacific Microwave Conference Proceedings*, Tokyo, 1990.
 [5] K.C. Gupta, Ramesh Garg, I.J. Bahl, *Microstriplines and Slotlines*, Artech House, 1979.
 [6] N. Marcuvitz, *Waveguide handbook*, New York, Dover Publication, Inc.
 [7] O. Axelsson, V.A. Barker, *Finite Element Solution of Boundary Value Problem*, Academic Press Inc., 1984.
 [8] 배한업, "유한 요소법에 의한 전자총의 수치학적 모사," 한국과학기술원 석사 학위 논문, 1988.

 著 者 紹 介

李 相 洙 (準會員)

1966年 3月 16日生. 1989年 2月 금오공과대학 전자공학과 졸업. 1991年 2月 한국과학기술원 전기및 전자공학과 석사학위 취득. 1991年 3月~현재 국방부 근무. 주관심분야는 전자장 수치해석 및 초고주파 회로 설계 등임.

鄭 奉 植 (正會員)

1963年 4月 4日生. 1987年 2月 경북대학교 공과대학 전자공학과 졸업. 1990年 2月 한국과학기술원 전기및 전자공학과 석사학위 취득. 1990年 3月~현재 한국과학기술원 전기및 전자공학과 박사과정 재학. 주관심분야는 전자장의 수치해석 등임.

●

安 昌 會 (正會員) 第26卷 第3號 參照
현재 한국과학기술원 전기및 전자공학과 박사과정 재학

●

李 壽 永 (正會員) 第26卷 第3號 參照
현재 한국과학기술원 전기및 전자공학과 부교수