

論文 91-28B-10-4

多重시리얼 샘플링 시스템의 最適制御

(Optimal Control for Multiple Serial Sampling Systems)

崔 然 旭*

(Yeon Wook Choe)

要 約

多數의 出力변수를 가지고 있는 實시스템에서, 出力변수의 測定値가 어떠한 사정(하드웨어上 혹은 制御對象의 特性 等)에 依하여 同時に 全部 檢出되어지지 않고, 測定方式이나 成分이 類似한 것끼리 몇개씩 서로 조금씩 틀린 時刻에 測定되어 차례로 디지털 計算器에 入力되어지는 경우가 있다. 다시 말하면, P개의 檢出량이 조금씩 틀린 時刻 $kT_0+t_1, kT_0+t_2, \dots, kT_0+t_r (0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r < T_0)$ 에 각각 $P_1, P_2, \dots, P_r (P = P_1 + P_2 + \dots + P_r)$ 개씩 測定되어 얻어지게 된다. 本 論文에서 말하는 多重 시리얼 샘플링이라고 하는 것은 이와같은 데이터의 取得方式을 意味하고 있다.

從來의 觀測器理論에서는 P개의 檢出량을 가진 制御對象의 狀態推定에는 P개가 데이터를 同時に 必要로 하고 있다. 따라서 從來의 觀測器理論을 그대로 上記와 같은 對象에 適用하게 되면, P개의 測定値가 全部 얻어지는 시간 T_0 마다 狀態의 推定値를 更新하는 觀測器가 얻어진다. 그러므로, 이와같은 觀測器를 使用하게 되면 任意的 時刻에 한組의 出力變數가 檢出되더라도 그 情報를 직접 利用하지 못하고 나머지의 出力變數가 전부 檢出될 때까지 기다리지 않으면 안되지 되므로, 하드웨어上的 機能을 最大한 利用하지 못하고 있는 것이 아닌가 생각된다.

本 論文에서는 上記와 같은 시스템에 있어서, 한組의 出力變數가 檢出될 때마다 觀測器의 内部狀態를 更新해서 새로운 狀態推定値를 얻을 수 있는 “多重시리얼 샘플링型 觀測器”를 提案하고 그의 構成可能性을 證明한다. 또한, 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 出力으로 閉루프를 構成하였을 경우, 全體 制御系의 安定性에 關한 問題를 檢討하고, 시뮬레이션에 依하여 本 論文에서 提案된 觀測器의 有效性을 確認한다.

Abstract

In industrial multivariable plants, it is often the case that the plant outputs are measured in similar components not simultaneously but serially. In this paper, the problem of estimating the state vector of the plant based on the data obtained from such a measuring scheme is considered, and a special type of observer (referred to as a “multiple serial-sampling” type observer) which renews its internal states whenever a new group of data is obtained is proposed. It is proved that such an observer can be constructed for almost every sampling period if the plant is observable as a continuous-time multivariable system, and that the poles of the closed-loop system using the multiple serial-sampling type observer consist of the poles of the observer and those of the state feedback system. The behaviors of the observer and the closed-loop system are studied by simulation. The results of simulation indicate that a multiple serial-sampling type observer can estimate the state of the plant more accurately than the ordinary type observers and improve the closed-loop performance, especially, in the existence of measuring noise.

*正會員, 釜山工業大學 制御計測工學科
(Dept. of Cont. Inst., Pusan Nat'l of Tech. Univ.)
接受日字: 1991年 8月 1日

(※ 이 논문은 1990년도 문교부지원 한국학술진흥재단의 학술연구조성비에 의하여 연구되었음)

I. 序 論

狀態空間에 그 期礎를 두고 있는 多變數制御系는, 制御特性이 良好함으로써 최근 많은 실용화가 이루어지고 있다. 이는 마이크로 프로세서 등의 발달에 의해 복잡한 制御法則이, 요구되는 짧은 時間内に 計算이 可能하게 되었기 때문이다. 그러나 실제로 制御器를 設計하여 制御시스템을 構成하였을 경우, 一般的으로는 制御對象의 모든 상태變數가 測定可能한 경우는 드물거나 혹은 可能하다해도 많은 費用이 所要되기 때문에 通常, 既知의 操作量과 制御量으로 觀測器에 의하여 内部狀態의 推定値를 구해서 狀態 변환 등에 利用하고 있다.

그런데, 多數의 出力變數를 가지고 있는 實시스템에서, 出力變數의 測定値가 同時に 全部 檢出되지 않고 測定方式이나 成分이 類似한 것끼리 몇개씩, 조금씩 틀린 時刻에 檢出되어 차례로 디지털 計算器(즉, 制御器)에 入力되어지는 경우가 있다. 예를 들면, 化學 플랜트등에서 제품이나 中間 生成物의 成分을 測定하는 경우 그 測定値(成分)의 분석에는 상당한 時間이 所要되고 또한 그 分析裝置도 高價이다. 이와 같은 경우에는 한組의 分析裝置를 利用하여 數個所의 成分을 測定하는 方式을 채용함으로써 서로 틀린 時刻, 틀린 位置에 있어서의 成分의 測定値가 成分別로 順次的으로 연결지게 된다. 本 論文에서 말하는 多重시리얼 샘플링(Multiple Serial Sampling)이라고 하는 것은 이와 같은 데이터의 取得方式, 즉 P個의 檢出量이 조금씩 틀린 時刻 $kT_0 + t_1, kT_0 + t_2, \dots, kT_0 + t_r$ ($0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r < T_0$)에 각각 P_1, P_2, \dots, P_r 個 ($P = P_1 + P_2 + \dots + P_r$)씩 測定되어 연결되는 方式을 意味하고 있다.

Luenberg의 理論에 期礎를 두는 從來의 觀測器 理論에서는 P個의 檢出量을 가진 制御對象의 狀態 推定에는 P個의 데이터를 同時に 必要로 하고 있다. 따라서 從來의 觀測器 理論을 그대로 上記와 같은 플랜트에 適用하게 되면, P個의 測定値가 全部 연결되는 시간 T_0 마다 推定値를 更新하는 觀測器가 연결된다.

디지털制御系에 있어서는 通常, 마이크로 프로세서等 使用되는 하드웨어의 限界와 制御法則의 演算時間等으로 인해, 出力變數의 測定과 그것에 의한 制御入力の 印加는 어떤 一定한 샘플링 區間마다 行해진다. 따라서, 從來의 觀測器理論을 상기와 같은 多重 시리얼 샘플링 制御系에 그대로 適用한다면, 한組의 出力變數가 檢出되더라도 그 情報를 직접 利用하지 못하고 나머지의 出力變수가 전부 檢出될 때까지 기다리지 않으면 안되게 되므로, 주어진 하드웨어의 機能을 最大한

利用하지 못하고 있는 것이 아닌가 생각된다. 따라서 한번의 測定이 行하여져서 즉시 그 값에 따르는 制御를 수행할 수 있다면 制御系 전체의 性能 向上을 기대할 수 있을 것이다. 특히, 雜音등의 混入에 依해 豫測式이 正確하게 成立하지 않을 경우에, 豫測時間을 T_0 에서 t_1 로 줄임으로써 極력 雜音의 影響을 減少시킬 수 있는 하나의 方法이 될 것이다.

本 論文에서는 한組의 檢出量이 연결될 때마다 觀測器의 内部狀態를 更新해서 새로운 狀態推定値를 얻을 수 있는 “多重시리얼 샘플링 型 觀測器”를 제안하고 그의 有效性을 시뮬레이션을 통하여 確認한다. 以下에서는 먼저, 多重시리얼 샘플링 型 觀測器가, 주어진 制御對象이 連續系로서 觀測可能하다면 거의 대부분의 샘플링 周期에 대해서도 構成 可能함을 보이고, 이러한 觀測器를 使用하여 制御系를 構成하였을 경우, 制御系 전체의 安定性에 關한 問題를 檢討한다. 또한 觀測器의 最初 周期(즉, 全出力 變數가 1회씩 測定되어질 때까지)에서, 推定値의 決定方法에 對한 하나의 指針을 提案한다. 表現上의 簡略化를 위하여 本 論文에서는 出力變數의 그룹別 測定 間隔이 一定하다고 假定한다. 즉, $t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = \dots$ 이다.

II. 制御對象과 用語의 기술

다음과 같은 連續時間의 制御對象을 생각한다.

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = A_c x_c(t) + B_c u_c(t) \quad (1)$$

$$y_c(t) = C_c x_c(t) \quad (2)$$

단, $x_c(t), u_c(t), y_c(t)$ 는 각각 n 次元의 狀態벡터, m 次元의 操作벡터, P 次元의 檢出벡터를 意味하며, (A_c, B_c, C_c) 는 적당한 크기의, 常數行列이며, 可制御 可觀測하다고 假定한다. 上記와 같은 制御對象에서 P個의 檢出量은 서로 다른 時刻에 각각 P_1, P_2, \dots, P_r ($P = P_1 + P_2 + \dots + P_r, r \leq P$)個씩 연결되는 것으로 가정한다. (단, P_1 가 전부 1인 特別한 경우에 대해서는 文獻(9)를 參照). 즉, 檢出벡터 $y_c(t)$ 의 제 $(P_1 + \dots + P_i + 1)$ 번째 成分에서 제 $(P_1 + \dots + P_i + P_{i+1})$ 번째 成分까지를 포함하는 檢出量 $y_{ci}(t)$ 가 時刻

$$t = kT_0 + \tau + (i-1)T, k=0, 1, 2, \dots, i=1, 2, \dots, r \quad (3)$$

에서 測定되어지는 것으로 하고, $(P_i \times 1)$ 크기인 測定 值 벡터를

$$y(k, i) = y_{ci}[kT_0 + \tau + (i-1)T] \quad (4)$$

로 둔다. 以下에서는 上記의 測定值를 使用해서 時刻

$$t = kT_0 + iT \quad k=0, 1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, r \quad (5)$$

에서 制御對象의 狀態를 推定하는 觀測器를 생각한다. 단, 操作量 $u_c(t)$ 는 (5)의 時刻에서 스텝狀으로 變換되어지는 것으로 假定한다. 즉,

$$u_c(t) = u(k, i) \quad kT_0 + iT \leq t < kT_0 + (i+1)T \quad k=0, 1, 2, \dots; i=0, 1, 2, \dots, r \quad (6)$$

이다. 操作量에 關한 上記와 같은 假定은 本質적인 것이 아니고, 보다 一般적인 操作條件 아래에서도 本論과 同一한 結果가 유도될 수 있다.⁹⁾

먼저, 必要한 用語와 記號를 導入한다. 檢出量의 測定時刻 (3) 및 狀態를 推定해야 할 時刻 (5)의 關係를 圖示하면 그림1과 같이 된다. τ 는 操作量의 入力으로부터 다음의 檢出量을 읽어 들일 때까지의 時間이며, 대략 (測定時間 - 演算時間)으로 생각할 수 있다. 그림1에서, 時刻 kT_0 에서 $(k+1)T_0$ 까지의 時間區間을 本論文에서는 (k번째의)프레임(Frame)이라하며, T_0 를 프레임周期라고 부르기로 한다. 또한, 檢出量을 測定하는 주기 T 를 샘플링周期라 하며 T_0 와 T 사이에는

$$T_0 = rT \quad (r \leq P) \quad (7)$$

의 關係가 있는 것으로 假定한다. 이와 같이 시스템이 2종류의 周期를 가지고 있는 것에 對應해서, 時刻 $kT_0 + iT$ 에 있어서 制御對象의 狀態를 2가지의 因數를 가지는 記號

$$x(k, i) = x_c(kT_0 + iT) \quad k=0, 1, 2, \dots; i=0, 1, 2, \dots, r \quad (8)$$

로서 나타낸다. 단, 이 定義에 있어서 $i=r$ 과 다음 프레임에서의 $i=0$ 는 同一한 狀態를 意味하고 있다. 즉,

$$x(k+1, 0) = x(k, r), \quad u(k, r) = u(k+1, 0) \quad (9)$$

인 것에 注意를 必要로 한다.

다음에 (4)와 (8)로 표현되는 狀態 $x(k, i)$ 및 出力 $y(k, i)$ 에 대한 狀態方程式을 誘導하면 아래와 같다. 즉, (1)을 샘플링 주기 T 로 離散化하면 $x(k, i)$ 에 關한 遷移方程式

$$x(k, i+1) = Ax(k, i) + Bu(k, i) \quad k=0, 1, 2, \dots; i=0, 1, 2, \dots, r \quad (10)$$

가 얻어진다. 단,

$$A = \exp(A_c T), \quad B = \int_0^T \exp(A_c \tau) B_c d\tau \quad (11)$$

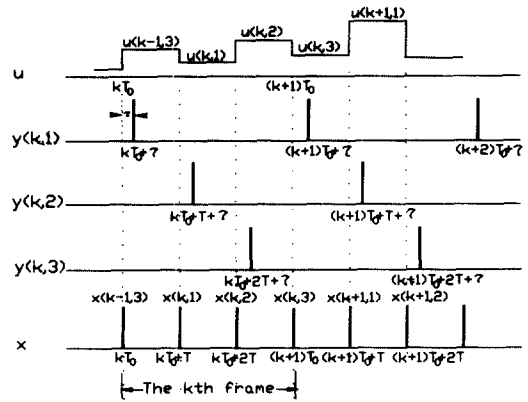


그림 1. 出力의 測定과 狀態推定의 時刻 (r=3의 경우)

Fig. 1. Timing of output measurement and state estimation (in case of r=3).

이며, 제k번째 프레임에서 제k+1번째 프레임으로의 접속은 (9)로 주어진다. 더우기, (1), (2)에 의해 測定值 벡터 $y(k, i)$ 는

$$y(k, i+1) = c_{i+1}x(k, i) + d_{i+1}u(k, i) \quad k=0, 1, 2, \dots; i=0, 1, 2, \dots, r \quad (12)$$

으로 되는 것을 간단히 確認할 수 있다. 여기서, c_{i+1} 및 d_{i+1} 는 각각 다음과 같이 定義되는 $(P_{i+1} \times n)$, $(P_{i+1} \times m)$ 크기의 行列이다.

$$c_{i+1} = Cc_{\sigma_{i+1}, \sigma_{i+1}} \exp(A_c \tau) \quad (13)$$

$$d_{i+1} = Cc_{\sigma_{i+1}, \sigma_{i+1}} \int_0^T \exp[A_c(\tau - \sigma)] B_c d\sigma \quad i=0, 1, 2, \dots, r-1 \quad (14)$$

$$\sigma_k = \sum_{i=0}^k P_i \quad k=0, 1, 2, \dots, r \quad (15)$$

단, $P_0=0$ 이며 $Cc_{\sigma_{i+1}, \sigma_{i+1}}$ 는 出力行列 C_c 의 σ_{i+1} 번째 行에서 σ_{i+1} 번째 行까지를 포함하는 $(P_{i+1} \times n)$ 크기의 行列을 意味한다.

以上의 (10) 및 (12)는, 制御對象을 出力의 샘플링周期 T 로 Zero-Order Holder 모델을 使用하여 離散化했을 경우의 狀態方程式이다. 檢出이 多重시리얼 샘플링型인 것에 對應해서 時間에 關한 變數가 2種類 (k 및 i)로 되어있는 점이 通常의 離散型 狀態方程式과 틀린 점이다.

다음 章에서는 上記의 式들을 利用해서, 操作量이 變화하는 時刻에서의 制御對象의 狀態를 推定하는 觀測器를 유도한다.

Ⅲ. 多重시리얼 샘플링型 觀測器와誤差方程式

여기서는 (8)로 주어진 制御對象의 狀態 $x(k, i)$ 를 推定하는 多重시리얼 샘플링型 觀測器에 대한 基本構造를 설명하고 觀測器에 依한 推定值의 眞值에 대한 誤差의 遷移를 나타내는 方程式을 유도한다.

狀態方程式 (10), (12)에 相應해서, 다음 式과 같은 動的 시스템을 생각한다.

$$z(k, i+1) = Az(k, i) + Bu(k, i) + h_{i+1}[c_{i+1}z(k, i) + d_{i+1}u(k, i) - y(k, i+1)]$$

$$k=0, 1, 2, \dots; i=0, 1, 2, \dots, r-1 \quad (16)$$

위 式에서, h_1, h_2, \dots, h_r 은 觀測器 設計者에 의하여 決定되어야 할 $(n \times P_{i+1})$ 크기의 常數行列이다. 上記의 動的시스템에서, $(k+1)$ 번째 프레임에서 觀測器의 初期條件은, (9)에 對應해서 다음 式에 의하여 결정된다.

$$z(k+1, 0) = z(k, r) \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

다음章에서 證明하는 것처럼, h_i 를 適當히 選擇하면 上記 動的시스템의 狀態 $z(k, i)$ 가

$$k \rightarrow \infty \text{ 일 때 } z(k, i) \rightarrow x(k, i) \quad i=0, 1, 2, \dots, r-1 \quad (18)$$

를 滿足시키도록 하는 것이 可能하다. (16), (17)의 動的 시스템이 (18)을 滿足할 경우 이 式을 多重시리얼 샘플링型 觀測器로 부른다. 또한, (18)의 成立與否에 關係없이 常數행렬 h_1, h_2, \dots, h_r 을 觀測器 利得이라 한다. (16)의 形態로부터 알 수 있는 바와 같이 多重시리얼 샘플링型 觀測器는, 直前의 測定值벡터 $y(k, i+1)$ 와 操作벡터 $u(k, i)$ 를 利用해서 時刻 $kT_0 + (i+1)T$ 에서의 觀測器 内部狀態를 更新해가는 순次元型 觀測器이다.

다음章의 준비로서, 觀測器의 推定誤差

$$\epsilon(k, i) = z(k, i) - x(k, i), \quad i=0, 1, 2, \dots, r \quad (19)$$

에 關한 基礎方定式을 유도하고 그의 期本的인 性質을 살펴본다. (12)를 (16)에 代入하면

$$z(k, i+1) = (A + h_{i+1}c_{i+1})z(k, i) + Bu(k, i) - h_{i+1}c_{i+1}x(k, i) \quad (20)$$

이 얻어진다. 또, (10)에서 (20)를 빼면 다음式이 얻어진다.

$$\epsilon(k, i+1) = (A + h_{i+1}c_{i+1})\epsilon(k, i) \quad (21)$$

또한, (9)와 (17)로부터

$$\epsilon(k+1, 0) = \epsilon(k, r) \quad (22)$$

가 됨을 알 수가 있다. 위의 두 式을 使用해서 時刻 $[kT_0 + iT]$ 에서 時刻 $[(k+1)T_0 + iT]$ 까지의 誤差의 遷移를 計算해 보면

$$\epsilon(k+1, i) = \Phi_i \epsilon(k, i) \quad i=0, 1, 2, \dots, r \quad (23)$$

로 된다. 여기서

$$\Phi_i = (A + h_1c_1) \cdots (A + h_1c_1) (A + h_rc_r) (A + h_{r-1}c_{r-1}) \cdots (A + h_{i+1}c_{i+1})$$

$$h_0 = h_r, \quad c_0 = c_r \quad (24)$$

이다. (24)의 係數行列은 프레임周期 T_0 에 대한 觀測器 推定誤差의 遷移를 意味하고 있다. 만약, 遷移行列 $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{r-1}$ 가 전부 安定하도록 h_i 를 決定할 수가 있다면 (다시 말하면, $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{r-1}$ 의 모든 固有值가 複素平面上에서 單位圓內에 存在한다면), 收斂條件(18)은 명백하게 만족하게 된다. 그런데, (24)를 보면 알 수 있는 바와 같이, $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{r-1}$ 은 同一한 正方形行列을 순서만 하나씩 차례로 바꾸어서 곱한 것이다. 이 事實로부터, 遷移行列 Φ_i 中的 어느 하나에 대해서만 그의 安定性 問題를 證明함으로써 모든 $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{r-1}$ 에 대해서도 安定性을 確信할 수 있게 된다!! 따라서, 어느 하나의 Φ_i 를 安定化시킬 수 있는 觀測器 利得行列 h_1, h_2, \dots, h_r 의 存在를 證明함으로써 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性을 結論지을 수 있다. 다음章에서는 遷移行列 Φ_0 에 注目하여 이 事實을 證明한다. (24)에서 $i=0$ 로 두고 右邊을 展開하면

$$\Phi_0 = (A + h_rc_r) (A + h_{r-1}c_{r-1}) \cdots (A + h_1c_1) = A^r + KG \quad (25)$$

단,

$$K = [(A + h_rc_r) \cdots (A + h_2c_2)h_1, (A + h_rc_r) \cdots (A + h_3c_3) (A + h_3c_3)h_2, \dots, (A + h_rc_r)h_{r-1}, h_r] \quad (26)$$

$$G = [c_1^T, (c_2A)^T, \dots, (c_{r-1}A^{r-2})^T, (c_rA^{r-1})^T]^T \quad (27)$$

이다. 以上이 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 推定誤差에 대한 基本的인 性質이다.

Ⅳ. 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構性可能性의 證明

먼저, (1), (2)의 制御對象에 대하여 (25)로 주어지는 (A^r, G) 가 可觀測함을 證明한다. 이를 위하여 다음의 보조정리가 必要하다.

<보조정리> : (A_0, C_0) 를 可觀測한 쌍으로 가정하고, (n_1, n_2, \dots, n_p) 을 그의 可觀測性指數벡터

(Observability Index Vector)라 한다. 또한, $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in_i}$ ($i=1, \dots, P$)를 적당한 實數로 假定했을 경우 다음 式으로 定義되는 正方形行列 M 은 거의 대부분의 常數(즉, 연속時間의 制御對象(1)을 離散化시켰을 때 그의 可制御性이 保存되는 주기) T 에 대하여 正則이다.

$$M = [M_{11}^T, \dots, M_{1n_1}, M_{21}^T, \dots, M_{2n_2}^T, \dots, M_{p1}^T, \dots, M_{pn_p}^T]^T \quad (28)$$

$$M_{ij} = c_{ci} \exp(A_c \alpha_{ij} T) \quad i=1, 2, \dots, P; j=1, \dots, n_i \quad (29)$$

단, (A_c, C_c) 의 可觀測性指數벡터는 $n_1+n_2+\dots+n_p=n$ 을 滿足하는 整數벡터로서 다음행렬

$$[c_{c1}^T, \dots, (c_{c1} A_c^{n_1-1})^T, c_{c2}, \dots, (c_{c2} A_c^{n_2-1})^T, \dots, c_{cp}^T, \dots, (c_{cp} A_c^{n_p-1})^T]^T$$

가 正則이 되도록 定義된다. 여기서 c_{cj} ($j=1, \dots, P$)는 C_c 의 j 번째 行을 나타낸다.

上記의 보조정리는 실질적으로 參考文獻(2)와 같은 내용이지만 本 論文의 目的에 맞추기 위하여 그의 表現을 약간 변경하여 表示하였다. 이 보조정리로부터 다음의 定理가 얻어진다.

〈定理 1〉 (A^r, G) 는 거의 대부분의 샘플링주기 T 에 대하여 可觀測하다.

〈證明〉 $(n_{11}, n_{12}, \dots, n_{1p_1}, n_{21}, \dots, n_{2p_2}, \dots, n_{rp_r})$ 를 (A_c, C_c) 의 可觀測性指數벡터로 한다. 단,

$$\sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^{p_i} n_{il} = n \quad (30)$$

이다. (A^r, G) 의 可觀測性行列로부터 다음의 과정을 통하여 서로 독립한 n 개의 行을 선택한다. 즉, G 의 第1行으로 만들어지는 行(다시말하면 c_{c1} 을 포함하는 行)을 위에서부터 n_{11} 個, G 의 第2行으로 만들어지는 行(다시말하면 c_{c2} 를 포함하는 行)을 위에서부터 n_{12} 個, ..., G 의 第 P 行으로 만들어지는 行(다시말하면 c_{cp} 를 포함하는 行) 위에서부터 n_{lp} 個를 각각 取한다. 이와 같은 과정을 可觀測性指數벡터의 나머지 요소 n_{21}, \dots, n_{rp_r} 에 대해서도 반복하면 전부 n 개의 行이 얻어진다. 이들의 各行은, (11), (13), (27)로부터 알 수 있는 바와 같이

$$c_{ci} \exp(A_c \tau) \exp\{A_c(j-1)T\} \exp\{A_c(k-1)T\} \quad (31a)$$

$$i=1, \dots, P; k=1, \dots, n_{je}; j=1, \dots, r; l=1, \dots, P_j \quad (31b)$$

의 形態로 주어지는데, 이들을 出力行列 C_c 의 行과 같은

順序로 나열하면 (28)과 같은 形態인 n 次の 正方形行列이 얻어진다. 여기서 보조정리1의 (28), (29)에서

$$\alpha_{ij} = i-1+r(j-1) + (\tau/T) \quad (32)$$

로 두면, (28)의 各行은, (31a)의 i, j, k, l 을 (31b)의 範圍內에서 적당히 變化시킨 것과 일치하게 된다. 따라서, (28)의 正方形行列과 (31)로 만들어진 正方形行列은 (32)의 條件下에서 서로 同 一하게 됨을 알 수가 있다. 그러므로, 보조정리1의 結果로부터 (31)의 行으로 이루어지는 正方形行列은 거의 대부분의 샘플링주기에 대하여 正則이 된다. 다시 말하면, (A^r, G) 의 可觀測性行列은 거의 대부분의 샘플링주기에 대해 플랭크(full-rank)를 가진다.

〈證明略〉

위 定理의 結果로부터, 絶對值가 1보다 작은 n 개의 複素數 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 이 指定되었을 때, 적당한 크기의 行列

$$K^* = [k_1^*, k_2^*, \dots, k_r^*] \quad (33)$$

을 선택함으로써 行列

$$\Phi_0^* = A^r + K^* G \quad (34)$$

의 固有值가 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 로 되도록 할 수가 있음을 알 수가 있다. 여기서 만약

$$(A + h_r c_r) \dots (A + h_2 c_2) h_1 = k_1^* \quad (35a)$$

$$(A + h_r c_r) \dots (A + h_3 c_3) h_2 = k_2^* \quad (35b)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(A + h_r c_r) \dots (A + h_{i+1} c_{i+1}) h_i = k_i^* \quad (35c)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(A + h_r c_r) h_{r-1} = k_{r-1}^* \quad (35d)$$

$$h_r = k_r^* \quad (35e)$$

가 成立하면, (25)의 遷移行列 Φ_0 는 上記의 Φ_0^* 와 같아지게 된다. 따라서, 絶對值가 1보다 작은 적당한 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 에 대해서 式(35)를 滿足하는 $n \times P_i$ 인 利得行列 h_i 가 存在하는 것을 보이면 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性이 證明된 것으로 된다. 以下, 이와 같은 方針에 따라서 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性을 證明한다.

〈定理 2〉 (多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性) : (A_c, C_c) 가 可觀測하다면, 거의 대부분의 샘플링주기 T 에 대하여 多重시리얼 샘플링型 觀測器가 항상 構成可能하다. (즉 動的의 시스템 (16)이 조건 (18)을 滿足하도록 하는 常數行列 h_1, h_2, \dots, h_r 이 항상 存在한다)

〈證明〉 R 을 $n \times n$ 인 正則行列로 假定하고 다음과 같이 狀態變數를 等價 변환한다.

$$\tilde{x}_c = R x_c \quad (36)$$

이 變換式에 의하여 行列 A^r 와 G 는 다음과 같이 된다.

$$\tilde{A}^r = R A^r R^{-1} \quad (37)$$

$$\tilde{G} = G R^{-1} \quad (38)$$

定理1의 結果에 의하여, 거의 대부분의 샘플링周期 T 에 대하여 (A^r, G) 는 可觀測함이 保證됨을 알았다. 따라서, 任意的 샘플링周期 T 에 있어서 (A^r, G) 는 可觀測하다고 假定할 수가 있다. 이 假定과 (37), (38)의 等價變換에 의하여, (A^r, G) 가 다음과 같은 可觀測標準形을 가지도록 正則行列 R 을 선택할 수가 있다.¹⁾

$$\hat{A}^r = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \cdots \hat{A}_{1q} \\ 0 & \hat{A}_{22} \cdots \hat{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots \hat{A}_{qq} \end{bmatrix} \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \hat{e}_2 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots \hat{e}_q \\ \hat{G}_1 & \hat{G}_2 \cdots \hat{G}_q \end{bmatrix} \quad (39)$$

여기서 A^r 의 對角線上的 블록行列 \hat{A}_{ii} 는 다음과 같은 스칼라 可觀測標準形을 가진다.

$$\hat{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0, & \cdots, & 0, & -a_{i1} \\ 1, & & 0, & -a_{i2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0, & & 1, & -a_{in} \end{bmatrix} \quad (l_i \times l_i) \quad (40)$$

또, A^r 의 對角線 오른쪽위의 블록 行列은

$$\hat{A}_{i, i'} = \begin{bmatrix} a_{i, i', 1} \\ a_{i, i', 2} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ a_{i, i', n} \end{bmatrix} \quad (l_i \times l_{i'}) \quad (41)$$

의 形態를 가진다. 또한, G 의 對角線上的 블록 行列은

$$\hat{e}_i = [0 \cdots 0 \ 1] \quad (42)$$

인 l_i 次的 構벡터의 形態를 하고 있으며, 블록 行列 \hat{G}_i ,

는 크기가 $(P-q) \times l_i$ 인 任意的 行列이다. 以下에서는, (A^r, G) 가 처음부터 (39)와 같은 可觀測標準形으로 주어졌다는 假定下에서, 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性을 證明한다. 만약, 그렇지 못할 경우에는 (36)에 의한 等價變換을 遂行함으로써 上記의 標準形을 얻을 수 있다. 즉, 等價變換된 시스템에 대해서 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 構成한 다음, 다시 逆變換을 取함으로써 원래의 시스템에 대한 觀測器를 얻을 수 있다.

l_i 개의 $\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in}$ 을, 絶對值가 1보다 작으며 同時에 0이 아닌 複素數로 둔다. 上記의 標準形으로부터 알 수 있는 바와 같이 $(\hat{A}_{ii}, \hat{e}_i)$ 는 可觀測한 쌍이므로, 적당한 l_i 次 벡터 k_i 를 利用해서 行列 $\hat{A}_{ii} + k_i \hat{e}_i$ 의 固有值가 $(\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in})$ 가 되도록 만들 수가 있다. 이와 같은 k_i 를 用해서 n 次 n 의 벡터를 다음과 같이 定義한다.

$$k_i^* = [0^T, \dots, (\hat{k}_i)^T, \dots, 0^T]^T \quad i=1, \dots, q \quad (43a)$$

$$k_i^* = 0 \quad i=q+1, \dots, p \quad (43b)$$

이 값에 의해, Φ_0^* 는 (33)과 (34)로부터

$$\Phi_0^* = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} + \hat{k}_1 \hat{e}_1 & \hat{A}_{12} & \cdots & \hat{A}_{1q} \\ 0 & \hat{A}_{22} + \hat{k}_2 \hat{e}_2 & \cdots & \hat{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{A}_{qq} + \hat{k}_q \hat{e}_q \end{bmatrix} \quad (44)$$

와 같이 되므로, 그의 固有值는 $\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{nq}$ 로 됨을 알 수가 있다. 이는 遷移行列 Φ_0^* 가 安定함을 意味하고 있다. 따라서, n 次 벡터인 (43)의 k_i^* ($i=1, \dots, P$)로 (33)의 行列 K^* 를 구성한 뒤, 이를 다시 크기 $(n \times P_j)$ 인 行列 k_j^* ($j=1, \dots, r$)로 각각 나누고, 이에 대해 聯立方程式 (35)가 解를 가지는 것을 나타내면 證明은 完了하게 된다.

먼저, (11)에 의해 A 는 正則이므로 \hat{A}^r 및 \hat{A}_{ii} 도 正則임을 알 수가 있다. 또, 假定에 의해 λ_{i1} 로서는 0이 아닌 것을 선택하였으므로, $\hat{A}_{ii} + k_i \hat{e}_i$ ($i=1, \dots, q$)도 전부 正則으로 된다. 여기서 聯立方程式 (35)를 아래로부터 (즉, (35, r)로부터) 풀어가기로 한다. $i=q+1, \dots, P$ 에 대해서는, $k_i^*=0$ 이므로

$$\sum_{i=1}^s P_i = q \quad (45)$$

를 만족하는 s ($s \leq r$)에 대해서

$$h_i = 0, \quad i = s+1, \dots, r \quad (46)$$

로 두면된다. 이때 (35)의 s 번째 식은

$$A^{r-s} h_s = k_s^* \quad (47)$$

로 된다. A가 正則이기 때문에 (47)은 唯一解

$$h_s = A^{-r-s} k_s^* \tag{48}$$

를 가진다. 여기서 만약, (45)를 만족하는 s가 存在하지 않을 경우는, $\sum P_i$ 가 q보다 커지는 첫번째의 P_i의 값을 (45)가 滿足되도록 조정하고, P_i에 對應하는 (nx P_i)의 크기인 利得行列 h의 P_i個의 列벡터 중에서, 조정된 量만큼의 列벡터를 0벡터로 바꾸면 된다. 따라서 h_s를 (48)과 같이 선택한다면, 그 다음 方程式 (35. s-1) 다음과 같이 된다.

$$A^{r-s}(A+h_s c_s) h_{s-1} = k_{s-1}^* \tag{49}$$

여기서, 行列 A+h_sc_s가 正則이 됨을 보이기 위하여, K_s*를

$$K_s^* = [0, \dots, 0, k_{s1}^*, 0, \dots, 0] \tag{50a}$$

$$k_s^* = [k_{s1}, k_{s2}, \dots, k_{sps}] \tag{50b}$$

$$k_{si} (i=1, \dots, P_s) : n\text{次의 벡터} \tag{50c}$$

와 같이 두고 行列 (A^r+K_s*G)를 생각한다. (A^r, G)가 처음부터 (39)와 可觀測標準型의 形態를 하고 있다는 假定과 觀測器가 原點에 固有值를 가지지 않는다는 주어진 前提下에서 다음식을 얻을 수가 있다.

$$\begin{aligned} \det[A^r + K_s^* G] &= \det \hat{A}_1 \cdots \det \hat{A}_{\sigma_{s-1} \sigma_{s-1}} \cdot \\ &\det(\hat{A}_{\sigma_{s-1}+1, \sigma_{s-1}+1} + k_{s1}^* \hat{e}_{q-\rho_{s-1}+1, q-\rho_{s-1}+1}) \cdots \\ &\det(\hat{A}_{q,q} + k_{sps}^* \hat{e}_{qq}) \neq 0 \end{aligned} \tag{51}$$

그러므로, (A^r+K_s*G)는 正則임을 알 수가 있다. 또 (47), (27)등을 (A^r+K_s*G)에 직접 代入하여 計算해보면,

$$\begin{aligned} A^r + K_s^* G &= A^r + A^{r-s} h_s c_s A^{s-1} \\ &= A^{r-s} (A + h_s c_s) A^{s-1} \end{aligned} \tag{52}$$

을 얻을 수 있다. 따라서, (A+h_sc_s)의 正則性은 (A^r+K_s*G)의 正則性에 달려 있으므로, 方程式(49)은 唯一解

$$h_{s-1} = (A + h_s c_s)^{-1} A^{-r-s} k_{s-1}^* \tag{53}$$

를 가진다. 上記와 같은 方法을 되풀이하면 聯立方程式 (35. s-1), ..., (35. 2), (35. 1)은 각각 h_{s-2}, ..., h₂, h₁에 대하여 唯一解를 가진다는 것을 證明할 수가 있다. 이 과정에서, 方程式 (35. i)의 係數行列의 正則性을 보이기 위해서는

$$K_i^* = [0, \dots, 0, k_i^*, k_{i+1}^*, \dots, k_{s-1}^*, k_s^*, 0, \dots, 0] \tag{54}$$

로 놓고 (여기서, k_i*는 (nxP_i) 行列이다). 동시에 (A^r+K_i*G)가 正則임을 고려해 두고 (52), (53)를 計算해보면

간단히 알 수가 있다. 聯立方程式 (35. 1, ..., (35. r)가 解를 가진다는 사실로부터, 連續系로서 觀測可能한 制御對象에 대한 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成可能性이 證明되었다. (證明略)

上記의 定理2의 證明은 構成的方法(즉, 觀測器의 固有值를 먼저 指定하고, 그것에 대한 觀測器의 利得行列 h_i를 실제로 求하는 方法)을 使用했다. 그러나, 이 方法은 실제로 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 設計한다는 觀點에서 보면 致命的인 弱點을 內包하고 있다(定理2의 證明으로서는 充分하다). 즉, 證明에서는 먼저 시스템을 Wonham의 可觀測標準形으로 變形해서 證明을 遂行하고 있기 때문에, 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 構成에는 단지 q개의 出力變數만을 使用하게 된다. 여기서 q는 標準形으로 變形했을 때의 블록行列의 갯수이다. Wonham의 標準形에서, 一般的으로 q는 서로 獨立한 出力變數의 수p보다 작은 경우가 많다. 극단적인 例로서, 만약 (A_c, c_c)이 可觀測한 쌍이라면 q는 거의 대부분의 샘플링 周期에 관해서 1로 된다. 따라서, 上記의 方法에 의하여 觀測器를 設計하면 檢出量의 극히 一部分만을 利用하게 되어 “多重시리얼 샘플링”型 觀測器의 主된 目的에서 벗어나게 된다. 그러므로, 실제로 觀測器를 設計하기 위해서는 다른 方法이, 必要하게 된다. 제7節의 例題에서는 다음의 課程에 의해 觀測器를 設計하였다.

먼저 Kimura-Hikita^[45] 方法을 使用하여 目的에 맞는 케환利得 K*를 計算한 다음 (35)의 聯立方程式을 풀으므로써, 利得行列 h_i를 얻고 있다. 現時點에서, 임의의 K*에 대하여 方程式 (35)가 반드시 解를 가진다는 것에 대해 理論的인 證明은 아직 얻어지지 않았지만, 現在까지 (35)가 解를 가지지 않는 例를 發見하지 못했다. 따라서, 0이 아닌 極을 指定하는 거의 대부분의 K*에 대하여 聯立方程式(35)가 解를 가진다고 推測할 수가 있으나, 이 점은 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 利得計算法으로서 앞으로 더욱 研究가 되어야 할 점이다.

V. 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 가진 制御系

이 章에서는 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 出力으로 狀態케환을 遂行하는 閉루프系の 特性을 조사한다. 一般的으로, 케환制御系의 構成에 있어서 觀測器는 狀態케환

$$u = -Fx \tag{55}$$

를 出力케환으로 實現하기 위하여 使用된다. 즉, (55)의 狀態x를 觀測器에 의한 推定值 z로 代置한

$$u = -Fz \quad (56)$$

를 制御入力로 利用한다. 여기서는 出力變數의 檢出이 (5)의 形態로 이루어진다는 假定下에서, (16), (17)式으로 주어지는 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 設計하여 (56)에 代入했을 경우 전체 시스템의 움직임을 살펴본다. 먼저 (56)는, (6)과 (8)의 表現式을 利用하면

$$u(k, i) = -Fz(k, i) \quad k=1, 2, \dots; \quad i=0, 1, 2, \dots, r-1 \quad (57)$$

과 같이 나타낼 수가 있다. 上記式에서 F는 狀態계환則 (55)가 전체 閉루프系를 安定化시킬 수 있도록 선택되어진다. 그러한 行列F는 極配置方法이나 離散形 LQG方法에 의하여 求해될 수 있다.

閉루프系의 움직임을 해석하기 위하여 (57)를 (10)과 (16)에 代入하면 다음의 式을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} x(k, i+1) \\ z(k, i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BF \\ h_{i+1}c_{i+1} & A+h_{i+1}c_{i+1}-BF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k, i) \\ z(k, i) \end{bmatrix} \quad (58)$$

(58)을 다음 관계

$$\begin{bmatrix} x(k, i) \\ \varepsilon(k, i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k, i) \\ z(k, i) \end{bmatrix} \quad (59)$$

를 利用하여 等價變換하면

$$\begin{bmatrix} x(k, i+1) \\ \varepsilon(k, i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BF & -BF \\ 0 & A+h_{i+1}c_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k, i) \\ \varepsilon(k, i) \end{bmatrix} \quad (60)$$

이 얻어진다. (60)를 r번 전개하면 프레임周期 T_0 에 관한 閉루프系의 狀態遷移方程式

$$\begin{bmatrix} x(k+1, i) \\ \varepsilon(k+1, i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A-BF)^r & A_i \\ 0 & \Phi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k, i) \\ \varepsilon(k, i) \end{bmatrix} \quad (61)$$

이 얻어진다. 단,

$$\Phi_i = (A+h_{rc_1}) \cdots (A+h_{rc_r}) \cdots (A+h_{i+1}c_{i+1}) \quad (62a)$$

$$A_i = (A-BF)^{r-1}BF + (A-BF)^{r-2}BF\Phi_{r-1} + \cdots + (A-BF)BF\Phi_2 + BF\Phi_1 \quad (62b)$$

$$\Phi_1 = (A+h_{rc_1}) \cdots (A+h_{i+1}c_{i+1}) \quad (62c)$$

이다. (61)로부터, 閉루프系의 固有值(즉, 프레임周期 T_0 에 대한 狀態의 遷移)의 集合은, 狀態계환 레귤레이터의 固有值의 集合과 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 固有值의 集合으로 構成되어 있음을 알 수가 있다. 이는 全體 閉루프系가 安定함을 意味하고 있다.

VI. 初期值 設定을 위한 한 方法

多重시리얼 샘플링의 定義로부터 알 수 있는 바와 같이, 本 論文에서 提案하고 있는 觀測器는 全 出力變數가 한번이상 檢出되어질 때까지는 觀測器로써 正確하게 作動하지 못한다. 다시 말하면, 多重시리얼 샘플링型 觀測器는 작동 후 첫번째 프레임에서는 觀測器로써 그 役割을 다하지 못하기 때문에 주어진 여건(즉, 觀測器를 처음으로 가동시키거나 觀測도중에 임펄스상의 雜音이 들어오는 경우등)하에서 가능한 한 正確한 推定値를 얻기 위하여서는 觀測器 出力값에 대해 補正이 必要하게 된다. 여기서 (55)의 레환利得行列 F를 얻기 위하여 LQG理論을 적용했을 경우, 平價함수의 最小값을 利用한 最初 r-1개의 狀態 推定値를 얻기위한 하나의 方法을 提案한다.

다음 式으로 주어지는 評價函數의 값을 最小으로 하는 最適歸還利得을 求한다.

$$J(x_c(0), u(\cdot), \infty; T) = \sum_{k=0}^{\infty} [x_c^T(kT)Qx_c(kT) + u_c^T(KT)Ru_c(KT)] \quad (63)$$

단, Q, R은 크기가 각각 $n \times n, m \times m$ 인 對稱이고 正定인 行列이다. LQG理論等에 의하여 上記 評價函數의 最小値는 다음과 같이 주어진다.^[6]

$$J^0(x_c(0), u(\cdot), \infty; T) = x_c^T(0)Px_c(0) \quad (64)$$

단, P는 出力의 샘플링周期 T에 대한 離散形 리카티方程式의 解이며, $x_d(0)$ 는 制御對象의 未知의 初期狀態이다. 여기서 첫번째 프레임에서 i번째로 얻어지는 P_i 個의 檢出量 $y_c(i-1T+\tau) = y(0, i)$ 를 初期狀態 $x_d(0)$ 로 나타내면

$$y(0, 1) = c_1 A^{-1} x_c(0) + d_1 u(0, 1) + c_1 \sum_{j=1}^{i-1} A^{j-1} B u(0, j-1) \quad (65)$$

로 된다. 이 式으로부터 첫번째 프레임 동안 測定된 檢出量을 벡터 形式으로 表示하면 다음과 같다.

$$\zeta(i) = \beta(i)x_c(0) + \gamma(i)\eta(i), \quad i=1, 2, \dots, r-1 \quad (66)$$

$$\zeta(i) = [y(0, 1), y(0, 2), \dots, y(0, i)]^T \quad (67a)$$

$$\beta(i) = [c_1^T, c_2^T, \dots, c_i^T]^T \quad (67b)$$

$$\eta(i) = [u^T(0, 0), u^T(0, 1), \dots, u^T(0, i-1)]^T \quad (67c)$$

$$\gamma(i) = \begin{bmatrix} d_1 & , & 0 & , & \cdots & , & 0 & , & 0 \\ c_2 B & , & d_2 & , & \cdots & , & 0 & , & 0 \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & \\ c_1 A^{i-2} B & , & c_1 A^{i-3} B & , & \cdots & , & c_1 B & , & d_1 \end{bmatrix} \quad (67d)$$

式66)으로부터 簡單히

$$\zeta(i) - \gamma(i)\eta(i) = \beta(i)x_c(0) \quad (68)$$

가 얻어진다. 따라서, 既知의 檢出量 $\zeta(i)$ 와 操作量 $\eta(i)$ 로부터 初期狀態 $x_c(0)$ 을 얻기 위해서는 $\beta(i)$ 의 逆行列을 計算해야 한다. 그러나, (67b)로부터 알 수 있는 바와 같이 $\beta(i)$ 는 $\alpha_i \times n (\alpha_i < n)$ 인 行列이므로 一般的으로 그의 逆行列이 存在하지 않는다. 그러므로, 本 論文에서는 未知의 初期狀態값에 대한 評價函數값을 最小化시키는 意味에서 $\beta(i)$ 의 擬似逆行列(Moore-Penrose inverse matrix) $\beta(i)^+$ 使用함으로써 初期狀態값을 計算하고 있다. 즉, 64은

$$P = x_c^T(0) P x_c(0) = (P^{1/2} x_c(0))^T (P^{1/2} x_c(0)) \leq x_0^T x_0 \quad (69)$$

로 變形되므로 68을 上記의 x_0 를 利用하여 表示하면

$$\zeta(i) - \gamma(i)\eta(i) = \beta(i)P^{-1/2}x_0 \quad (70)$$

가 얻어진다. (70)의 解로써

$$x_0 = [\beta(i)P^{-1/2}]^+ [\zeta(i) - \gamma(i)\eta(i)] \quad (71)$$

를 使用하면, (71)은 (70)(따라서, (68))의 解일 뿐만 아니라 (70)의 任意의 解 \hat{x}_0 에 對해서

$$\|x_0\|_2 \leq \|\hat{x}_0\|_2 \quad (72)$$

을 만족하는 最小norm 解이다.^[7] 따라서 i 번째의 測定을 遂行한 뒤의 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 出力 $z(0, 1)$ 는, 다음과 같이 計算되는 觀測器 内部의 前狀態 값

$$z(i, i-1) = A^{i-1}(P^{-1/2}x_0) + [A^{i-2}B, \dots, AB, B] \eta(i-1) \quad i=2, 3, \dots, r-1 \quad (73)$$

를 利用하여 (16)에 의하여 計算한다.

VII. 例 題

[例題 1] 먼저 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 動作을 獨立의(즉, 오픈 루프의 狀態下에서)으로 살펴보기 위하여 다음과 같이 3個의 出力을 가진 자유시스템을 생각한다.

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = A_c x_c(t) \quad y_c(t) = C_c x_c(t) \quad (74)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

上記시스템은 각각 1쌍씩 複素平面上의 虛數軸上과 左半面上에 極을 가지고 있다. 여기서 出力變數의 測定은 2미로 나누어서 이루어진다고 가정한다. 즉, $r=2$ 이며 $P_1=2, P_2=1$ 로 둔다. 또한 $T=1, \tau=0.8$ 로 두고, $0.1 \pm j0.1, \pm 0.05$ 에 固有值를 가지는 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 設計하면 觀測器 利得은 다음과 같다.

$$h_1^T = \begin{bmatrix} 1.9547 & -0.7527 & 0.0740 & -0.8735 \\ 1.5933 & 0.0236 & 0.1584 & -8.8979 \end{bmatrix}$$

$$h_2^T = [-0.5676 \quad -1.0516 \quad -0.8106 \quad -0.3910]$$

상태의 各成分의 推定値는 그림2에 眞値와 함께 表示하고 있다. 比較를 위해 上記의 觀測器와 同一한 位置에 固有值를 가지는 從來의 觀測器와 $T_0=1$ (즉, $r=1, P_1=3$ 인 경우)인 觀測器를 設計하여, 그의 出力을 그림3에 나타내었다. 이 그림으로부터 推定値의 更新周期가 짧은 만큼 多重시리얼 샘플링型 觀測器가 從來의 觀測器보다 더욱 正確한 推定値를 나타내고 있는 것을 알 수가 있다.

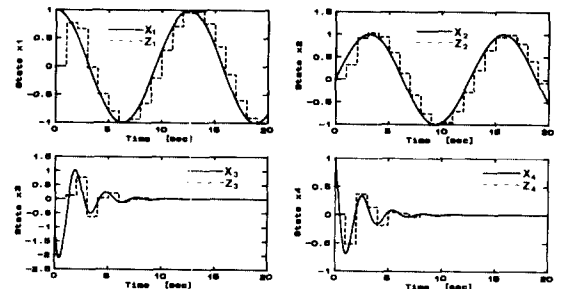


그림 2. 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 출력 ($T_0=2, T_0=1$)

Fig. 2. Outputs of multiple serial-sampling type observer.

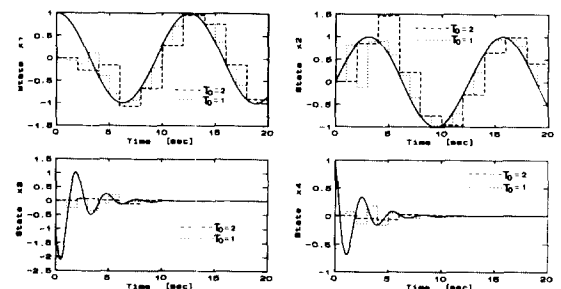


그림 3. 從來型의 觀測器의 출력 ($T_0=2, T_0=1$)
Fig. 3. Outputs of general type observer ($T_0=2, T_0=1$).

[例題 2] 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 實 시스템의 制御에 적용하였을 때 전체시스템의 움직임, 다음과 같은 結合倒立振子の 安定化 制御問題⁸⁾에 대하여 살펴본다.

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & I_4 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u_c(t) \quad (73)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9.94 & -9.94 & 3.23 & -4.79 \\ -9.94 & 9.94 & -4.79 & 3.23 \\ -585.9 & -234.8 & -244.8 & 282.4 \\ 585.9 & 282.4 & 282.4 & -244.8 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -13.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13.8 & 0 & 0 \\ 45.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45.8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2^T = \begin{bmatrix} 3.64 & 0 \\ 0 & 3.64 \\ -12.1 & 0 \\ 0 & -12.1 \end{bmatrix}$$

여기서 (73)의 8個의 狀態變數는, 2개의 대차(cart)의 位置를 나타내는 x_1, x_2 와 두개의 振子の 垂直較에 대한 기울기를 表示하는 ψ_1, ψ_2 및 그들의 微分값에 의해

$$x_c = [x_1, x_2, \psi_1, \psi_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2]^T \quad (75)$$

와 같이 定義된다. 또한 시스템의 出力로서는, 대차의 位置 x_1, x_2 와 振子の 각도 ψ_1, ψ_2 가 각각 同時에 觀測되는 것 (즉, $r=2, P_1=2, P_2=2$ 이다)으로 하여

$$y_c = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.61 & 0 & \dots & \dots \\ & 4.61 & & \\ & 0 & 2.76 & \\ & & & 2.76 \end{bmatrix} x_c \quad (76)$$

와 같이 表示한다. 上記시스템에 대하여 $T=0.01, \tau=0.005$ 로 두고, $0.1 \pm j0.1, 0.2 \pm j0.2, 0.005 \pm j0.05, \pm 0.1$ 에 固有值를 가지는 多重시리얼 샘플링型 觀測器를 설계한 뒤, 다음식과 같은 連續時間系로 주어지는 評價函數값을 변환利得을 計算하여 閉루프계를 구성한다.

$$J = \int_0^\infty [x_c^T(t) Q_c x_c(t) + u_c^T(t) R_c u_c(t)] dt \quad (77)$$

단, $Q_c = \text{diag}[500, 500, 1000, 1000, 2, 2, 0.15, 0.15]$, $R_c = \text{diag}[0.1, 0.1]$ 이다. 制御對象의 初期條件을

$$x_c^T(0) = [0.1, -0.1, -3.2, 0, 0, 0, 0] \quad (78)$$

두고 시뮬레이션을 遂行한 結果는 그림4와 같다. 여기서는 抵面上의 이유로 2個의 出力 y_1 과 y_3 만을 나타내지만, 나머지도 그림4와 거의 같은 정도로 수렴한다. 上記의 觀測器와 같은 位置에 極을 가지는 從來의 觀測器를 사용했을 경우의 시스템의 應答을 比較를 위하여 같이 표시했다. 豫想했던 바와 마찬가지로 多重시리얼 샘플링型의 觀測器를 사용한 경우가 從來의 觀測器의 경우보다 더 좋은 遷移應答特性을 나타내고 있음을 알 수 있다. 그림5는, 6章에서 제안한 多重시리얼 샘플링型 觀測器의 初期值設定法에 관한 結果이다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이, 만약 시스템의 設計를 LQG理論等에 의하여 遂行한다면 本論文에서 提案된 觀測器의 初期值設定方法이 상당한 效果가 있음을 알 수가 있다.

Ⅷ. 結 論

本論文에서는, 出力變數의 檢出이 同時에 이루어지지 않고 類似한 成分끼리 그룹별로 順次的으로 行하여지는 시스템 (즉, 多重시리얼 샘플링 시스템)을 對象으로 하여, 한組의 出力情報가 얻어질 때마다 그의 内部狀態를 更新하는 새로운 形態의 觀測器를 提案하고, 주어진 制御對象이 連續時間系로서 可觀測하다면 거의 대부분의 샘플링 周期에 대하여 그러한

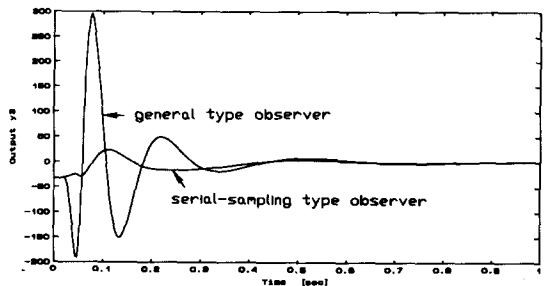
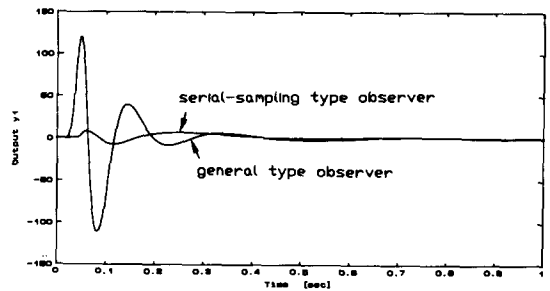


그림 4. 例題 2의 結果
Fig. 4. Results of example 2.

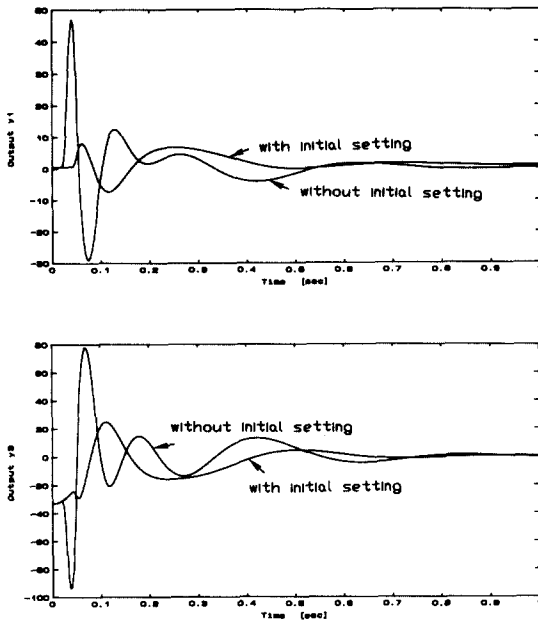


그림 5. 初期値設定에 대한 결과
Fig. 5. Results of with or without initial setting.

觀測器가 構成可能함을 證明하였다. 또한, 여기서 提案된 觀測器를 利用하여 閉루프系를 構成하였을 경우 전체 시스템이 安定하게 될 수 있음을 보였다. 시뮬레이션에 의하여 本 論文에서 提案된 觀測器가 從來의 觀測器에 比하여 眞値에 더욱 가까운 推定値를 얻을 수 있다는 것을 確認하였다.

本 論文에서 提案된 觀測器의 使用시의 計算時間에 대해 약간의 설명이 必要하다. 多重시리얼 샘플링형 觀測器를 실제로 사용할 경우 觀測器의 内部狀態의 更新을 위한 計算時間이 必要하게 된다. 序論에서 밝힌바와 같이 多重시리얼 샘플링 시스템의 代表的인 例로서 化學 플랜트를 들었다. 이와 같은 시스템에서는, 마이크로프로세서의 計算速度가 플랜트의 時定數보다 훨씬 빠르기 때문에 計算時間은 問題가 되지 않는다. 그러나, 上記의 多重시리얼 샘플링형 觀測器를 서보시스템에 적용할 경우 다음과 같은 점에 留意해야 한다. 즉 3章에서 提案된 觀測器는 각 段階에 있어서 P個의 檢出量만을 必要로 하지만 狀態遷移의 計算은 각 段階마다 必要하다. 따라서,

計算에 必要한 곱셈의 횟수는 從來의 觀測器의 그것에 比效해서 조금밖에 줄지 않는다. 그러므로 샘플링 周期가 制御法則에 포함된 計算量에 따라서 決定되는 狀況下에서는, 多重시리얼 샘플링형의 觀測器의 프레임 周期 T 가 從來의 觀測器의 샘플링 周期보다 더 길게 선택되어질 수도 있다. 이와같은 경우에는 多重시리얼 샘플링형 觀測器가 從來의 觀測器보다 항상 利點을 가지고 있다고는 할 수가 없다. 그렇지만, 샘플링 周期가 어떠한 要因에 의해 미리 定해져 있고, 또한 그 周期내에 多重시리얼 샘플링형 觀測器의 計算이 可能한 한 狀況下에서는 從來의 觀測器보다 더 나은 結果를 얻을 수 있을 것이다.

參 考 文 獻

- [1] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea, 1959.
- [2] T. Hagiwara and M. Araki, "Controllability indices of sampled-data systems," *Int. J. Sys. Science*, vol. 19-12, pp. 2449-2457, 1988.
- [3] W.M. Wonham, "On pole assignment in multi-input controllable linear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-12, no. 6, pp. 660-665, 1967.
- [4] H. Kimura, "Pole assignment by gain output feedback," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-20, no. 4, pp. 509-516, 1975.
- [5] H. Hikita, S. Koyama, and R. Miura, "The redundancy of feedback gain matrix and the derivation of low feedback gain matrix in pole assignment," *Trans. SICE*, vol. 11, no. 5, pp. 556-560, 1975.
- [6] H. Kwakernaak, and R. Sivan, *Linear Optimal Control*, Wiley, 1972.
- [7] S. Kodama, and N. Suda, *Matrix Theory for System Control*, SICE, 1981.
- [8] A. Sugie, Y. Inoue, and H. Kimura, "Stabilizing Control of the Coupled Inverted Pendulums," *Trans. SICE*, vol. 14, no. 5, pp. 591-597, 1978.
- [9] Y.W. Choe, and M. Araki, "Serial-Sampling Type Observer," *Trans. SICE*, vol. 25, no. 10, pp. 1076-1082, 1989.

 著 者 紹 介



崔 然 旭 (正會員)

1974年 3月~1978年 2月 한양
 대학교 공과대학 전자공학과 (공
 학사). 1978年 3月~1980年 2月
 한양대학교 공과대학 전자공학과
 실험조교. 1978年 3月~1980年
 2月 한양대학교 대학원 전자공
 학과 (공학석사). 1980年 5月~1982年 8月 군복무
 1982年 9月~1985年 2月 한양대학교 대학원 전자
 공학과 박사과정. 1983年 3月~1985年 2月 한양대
 학교 공과대학 전자공학과 조교. 1985年 4月~1986
 年 3月 일본 京都大學 공학부 연구원. 1986年 4月
 ~1990年 3月 일본 京都大學 대학원 공학부 (공학박
 사)
