**特輯** 技術解說

# 퍼지의 수학적 이론

閔 庚 燦
延世大學校 理科大 數學科

## I. 서 론

우리는 어떠한 일이든지 각자 두뇌의 판단에 따라 결정하고 행동에 옮긴다. 그런데 이러한 판단과 결정을 위해 우리의 두뇌에 접수되는 필요한 정보들은 물론, 이 정보들을 종합, 분석하여 결정하는 과정은 모두 정확한 수학적 논리에 기초를 두기보다는 대부분이 애매하고 부정확한 상황속에서 이루어진다. 그러나 우리의 두뇌는 숫자등 확실한 개념보다는 불분명한 개념들을 더욱 쉽게 분류, 정리하고, 판단 결정하는 특별한 능력을 가지고 있다. 예를 들어 「그 사람은 키가 크다」, 「이것은 뜨겁다」, 「오늘은 날씨가 좋다」등 우리가 사용하는 언어들을 생각해 보면 쉽게 이해가 된다. 그러므로 이러한 애매하고 불분명한 상황에서의 여러 문제들을 우리 두뇌가 판단 결정하는 과정에 대하여 수학적으로 접근하려는 것이 바로 이 퍼지이론이다. 그런데 이 퍼지이론은 언어등의 애매함을 정량적으로 표현하기 위하여 1965년 Zadeh[8]에 의해 도입된 퍼지집합(fuzzy set)의 사고 방법을 기초로 하고 있다.

일상생활에서 우리가 정하는 대상 중에 명확하게 그 소속을 정의할 수 없는 경우가 많다. 예를 들면, "아름다운 여인들의 모임," "키가 큰 사람들의 모임," 또는 "1보다 훨씬 큰 수들의 모임"이다. 이러한 대상들은 보통 개념의 「집합」을 이룰 수 없다. 왜냐하면 이러한 모임의 대상들은 어떤 집합(set)에 「속한다」, 「안속한다」를 결정할 수 있는 기준이 명확히 제시될 수 없기 때문이다. 그런데 이러한 대상들은 우리의 일상적인 사고에서 중요한 역할을 한다. 이 퍼지집합 개념은 각 대상이 어떤 모임에 「속한다, 안속한다」라는 이원론적인 논리로 부터, 각 대상을 그 모임에 「속하는 정도」 (grade of membership)로 이해함으로써 일반화된 개념이다. 예를 들면, $X=\{-1, 1, 5, 8, 10, 100, 500\}$일 때 "집합 X에서 5보다 훨씬 큰 수들의 모임" A를 일반적인 집합의 개념으로는 분류할 수 없다. 그러나 $\mu_A(-1)=0$, $\mu_A(1)=0$, $\mu_A(5)=0$, $\mu_A(8)=0.05$, $\mu_A(10)=0.1$, $\mu_A(100)=0.95$, $\mu_A(500)=1$로 정의되는 소속함수(membership function) $\mu_A: X\rightarrow[0, 1]$로 집합 X의 각 원소들이 "5보다 훨씬 큰 수들의 모임" A에 속하는 정도를 나타냄으로써 이 모임을 수학적으로 표현할 수가 있다. A가 일반집합일 때는 A를 특성함수 $\chi_A$로 표현할 수 있다. 왜냐하면 $x\in A$이면 $\chi_A(x)=1$, $x\notin A$이면 $\chi_A(x)=0$이다. 그러므로 일반집합은 퍼지집합의 특별한 경우가 된다.

한편, "퍼지"의 개념은 퍼지측도(fuzzy measure)라는 또 다른 관점에서 도입되기도 한다. 일반집합 X에서 "위치가 모호한(unlocated) 원소 x가 X의 부분집합 A에 속한다"라는 말의 퍼지한 정도 $g_x(A)$를 나타냄으로써 x와 A의 관계를 수학적으로 표현하게 된다. 특히 이 퍼지측도는 어떤 일을 판단함에 대한 애매성을 취급하게 된다. 다음 예를 통하여 퍼지집합과 퍼지측도의 차이점을 소개한다. X는 가구들의 집합이라 하자.

퍼지집합 : A=오래된 가구들의 모임(퍼지집합)이고 가구 x마다 만들어진 년수를 알고 있는 경우, $\mu_A(x)$는 임의로 택한 가구 x의 오래된 정도를 나타낸다.

퍼지측도 : A=200년 이상된 가구들의 모임(일반집합)이고, 가구들의 만들어진 년도를 모르는 경우, $g_x(A)$는 가구 x의 상태를 보고 x가 200년 이상된 가구들의 일반집합인 A에 속하는 정도를 나타낸다.

위의 두 개념이 퍼지이론에서 가장 기본적인 관점

이 된다. 이 두 개념을 합쳤을 때 $g_X(A)$는 만들어진 년수를 모르는 가구 x가 오래된 가구들의 모임 A에 속하는 정도를 나타나게 된다.

## Ⅱ. 퍼지집합 (Fuzzy Set)

### 1. 기본정의

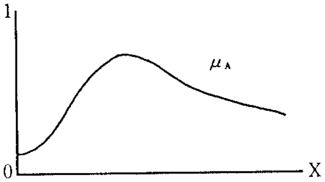
정의 : 집합 X에서 퍼지집합 A는 소속함수 $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$로 이해하고, $\mu_A(x)$는 x가 A에 속하는 정도를 의미한다.

Notation : 퍼지집합 A의 표현방법은 여러가지가 있다.

$A = \{(\mu_A(x), x) : x \in X\}$

$A = \int_X (\mu_A(X)/x)$

$A = \sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x_i)/x_i)$ (X가 유한집합일때)




예 : ① 서론에서 소개한 "집합 X에서 5보다 훨씬 큰 수들의 모임"

$A = \{(0, -1), (0, 1), (0, 5), (0.05, 8), (0.1, 10), (0.95, 100), (1, 500)\}$

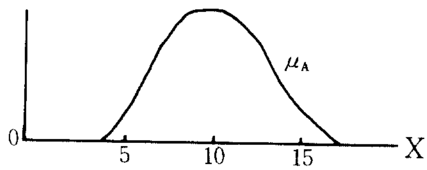
$= 0/-1 + 0/1 + 0/5 + 0.05/8 + 0.1/10 + 0.95/100 + 1/500$

또는 A =

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 1 | 5 | 8 | 10 | 100 | 500 |
| 0 | 0 | 0 | 0.05 | 0.1 | 0.95 | 1 |

② X=R (실수들의 집합), A="10에 가까운 실수들의 모임"

$A = \{(\mu_A(x), x) : \mu_A(x) = (1 + (x-10)^2)^{-1}\}$




참고 : 퍼지전체집합 : $X \Leftrightarrow \mu_X(x) = 1, \forall x \in X$

퍼지공집합 : $\phi \Leftrightarrow \mu_\phi(x) = 0, \forall x \in X$

### 2. 연산

일반집합의 연산과 같은 개념으로 퍼지집합 사이의 연산을 정의한다.

정의 : 집합 X에서의 퍼지집합 A, B에 대하여,

합집합 (union) : $A \cup B \Leftrightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in X$

교집합 (intersection) : $A \cap B \Leftrightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in X$

여집합 (complement) : $A' \Leftrightarrow \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X$

부분집합 (subset) : $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X$

같은집합 : $A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X$,

주의 : 일반 집합론에서와는 달리, $A \cup A' \neq X$, $A \cap A' \neq \emptyset$이다.

예를 들어, 상수함수 $\mu_A = 1/2$을 택하면 $\mu_{A \cup A'} = \mu_{A \cap A'} = 1/2$이다.

참고 : 위에서 소개한 것 외에 다양한 연산이 가능하다. 예를 들면,

확률적 합 : $A + B \Leftrightarrow \mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$

확률적 곱 : $A \cdot B \Leftrightarrow \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$

유계합 : $A \uplus B \Leftrightarrow \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$

유계곱 : $A \mathbin{\hat{\cap}} B \Leftrightarrow \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$

이들 사이의 관계는 $A \mathbin{\hat{\cap}} B \subseteq A \cdot B \subseteq A \cap B$, $A \cup B \subseteq A + B \subseteq A \uplus B$.

### 3. 기타 중요 개념

(1) $\alpha$-cut : 집합 X에서의 퍼지집합 A의 $\alpha$-cut는 $A = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$를 의미한다. ($\alpha \in (0, 1)$)

퍼지집합 A는 $\alpha$-cut들로 표현된다.

$$\mu_A(x) = \sup_{0 < \alpha < 1} \min\{\alpha, \chi_{A_\alpha}(x)\}, \forall x \in X$$

또한, $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$, $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$, 그러나 $(A_\alpha)' \neq (A)'_\alpha$.

(2) 집합 X에서 퍼지집합 A에 대하여, A의 support는 $\mathrm{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$을 의미하고, A의 높이 (height)는 $\mathrm{hgt}(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$을 의미한다.

그리고 $\mu_A(x) = 1$되는 원소 x가 존재할 때, A는 정상화 (normalized)되었다고 한다. 이때, $\mathrm{hgt}(A) = 1$이다.

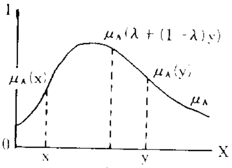
(3) 퍼지집합의 cardinal : $\mathrm{supp}(A) < \infty$일 때, 퍼지집합 A의 cardinality(크기) $|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$이다.

(4) 퍼지집합의 entropy : 퍼지집합 A가 얼마나 퍼지한가를 측정하기 위하여 여러가지 개념이 정의된다. 예를 들면 유한집합 X에서 퍼지집합 A의 entropy

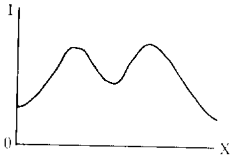
$$e(A) = -\sum_{x \in X} [\mu_A(x) \log \mu_A(x) + (1-\mu_A(x)) \log(1-\mu_A(x))]$$ 로 준다.

이때 $e(A) = 0 \Leftrightarrow$ A는 퍼지하지 않음.

(5) 볼록퍼지집합 : $X = R$ (Euclidean space)에서의 퍼지 집합 A가 볼록 (convex) $\Leftrightarrow \mu_A(\alpha x + (1-\alpha) y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}, \forall x, y \in X, \forall \alpha \in [0,1]$. $\Leftrightarrow$ A가 볼록, $\forall \alpha \in [0,1]$. A, B가 볼록하면 $A \cap B$도 볼록하다.



볼록



비볼록

### 4. 다른 종류의 퍼지집합

(1) 1967년 Goguen은 퍼지집합의 소속함수의 공역 [0,1]을 일반적인 격자(lattice) L로 대치시켜, L-퍼지집합 개념을 도입하였다. 즉, 집합 X에서의 L-퍼지집합 A는 $\mu_A : X \rightarrow L$로 이해한다. [0,1]이 membership scale로 적합하지 않을 때, 필요에 따라 적당한 격자 L을 선택함으로써 퍼지이론을 적용할 수 있다.

$L = [0,1]$이면 퍼지집합, $L = \{0,1\}$이면 일반집합이 된다.

(2) Type 2 퍼지집합 : $L = F([0,1])$ (=집합 [0,1]에서의 모든 퍼지집합들의 집합)일 때, 집합 X에서의 L-퍼지집합 A를 type 2 퍼지집합이라 부른다. 소속정도 $\mu_A(x)$가 [0,1]에서의 퍼지집합으로 나타난다.

(3) Level 2 퍼지집합을 집합 $F(X)$ (=집합 X에서의 모든 퍼지집합들의 집합)에서의 퍼지집합 A를 의미한다. 이때 $\mu_A : F(X) \rightarrow [0,1]$, 즉 퍼지집합들의 퍼지집합이다.

## Ⅲ. 퍼지측도 (Fuzzy Measure)

### 1. 정의 및 예

먼저 일반집합의 퍼지측도를 소개한다.

정의 : $\mathcal{P}(X)$ = 집합 X의 모든 부분집합들의 집합일 때, 다음 세가지 조건을 만족하는 함수 $g : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0,1]$를 퍼지측도라 부른다.

① $g(\emptyset) = 0, g(X) = 1$

② $A, B \in \mathcal{P}(X), A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B)$ (monotonicity)

③ $A_n \in \mathcal{P}(X), A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \Rightarrow \lim_n g(A_n) = g(\lim_n A_n)$ (continuity)

참고 : ① 퍼지측도 g를 $\mathcal{P}(X)$ 대신 Borel field $\mathcal{B}$ 위에서도 정의할 수 있다.

② $g(A \cup B) \geq \max\{g(A), g(B)\}$, $g(A \cap B) \leq \min\{g(A), g(B)\}$.

예 : (1) 확률측도(probability measure) : 다음 두 조건을 만족하는 함수 $P : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0,1]$를 확률측도라 부른다.

① $P(X) = 1$

② $A_n \in \mathcal{P}(X), \forall n \neq m, A_n \cap A_m = \emptyset$일 때, $P(\bigcup_n A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (additivity)

참고 : 퍼지측도의 조건 ②는 확률측도의 조건 ② 보다 약한 조건이다. 인간의 사고활동에 있어서는 확률의 additivity보다 퍼지측도의 monotonicity가 더 적합하고 자연스럽다.

(2) 가능측도(possibility measure) : 다음 세가지 조건을 만족하는 함수 $\Pi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0,1]$를 가능측도라 부른다.

① $\Pi(\emptyset) = 0$

② $A, B \in \mathcal{P}(X), A \subseteq B \Rightarrow \Pi(A) \leq \Pi(B)$

③ $\Pi(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sup_{i \in I} \Pi(A_i)$, (I는 집합)

(3) 디락측도(Dirac measure) : 집합 X에서 원소 $x_0$를 고정했을 때,

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$ 라 하자.

이 함수 $\mu$를 Dirac측도라 부른다.

(4) $\lambda$-퍼지측도 : 다음 조건을 만족하는 퍼지측도 $g_\lambda : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0,1]$를 $\lambda$-퍼지측도라 부른다.

$A, B \in \mathcal{P}(X), A \cap B = \emptyset$일 때,

$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - \lambda g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B)$ $(\lambda > -1)$

참고 : $\lambda$-퍼지측도는 확률측도의 additivity를 약화시킨 것으로, $\{g_\lambda(\{x\}) : x \in A\}$로 부터 $g_\lambda(A)$가 계산된다. $\lambda = 0$일 때, $g_0$는 확률측도이다. 서론의 마지막 부분에서 소개하였던 퍼지

집합의 퍼지측도를 퍼지적분(fuzzy integral)을 이용하여 정의한다.

정의 : 퍼지측도 $g : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$와 함수 $h : X \to [0,1]$와 X의 부분집합 A가 주어졌을때, g에 관한 A위에서의 h의 퍼지적분은

$$\int_A h(x) \circ g(\cdot) = \sup_{0<\alpha<1} \min\{\alpha, g(A \cap H\alpha)\},$$

$(H\alpha = \{x \in X : h(x) \geq \alpha\})$

주 : 퍼지적분은 Lebesgue 적분과 유사하다.

정의 : 퍼지측도 $g : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$가 주어졌을때, 집합 X에서의 퍼지집합 A의 퍼지측도는

$$g(A) = \int_X \mu_A(x) \circ g(\cdot) = \sup_{0<\alpha<1} \min\{a, g(A_\alpha)\}.$$

주 : g(A)는 "unlocated된 변수 u가 퍼지집합 A에 속한다"의 확실성 정도를 나타낸다.

### 2. 확률(probability)과 가능성(possibility)

어떤 사건(event)이 일어나는지 일어나지 않는지를 확실히 알지 못할 때, 그 사건이 일어나는 확실성을 수량적으로 정한 값을 확률이라 한다. 표본공간 X에 대한 확률분포 $P : X \to [0,1]$는 $\sum_{x \in X} p(x) = \int_X p(x)dx = 1$을 만족하는 함수이고, X의 부분집합인 사건 A에 대한 확률은 $P(A) = \sum_{x \in A} p(x) = \int_A p(x)dx$이다.

독립된 사건 A, B에 대하여 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$이다. 주사위를 던졌을 때, "표면에 작은 수가 나오는 사건"은 퍼지집합으로 표현하여 퍼지사건이라 부른다. 퍼지사건 A에 대한 확률은 다음과 같이 소속함수 $\mu_A$의 기대값으로 준다.

$$P(A) = E(\mu_A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x) \cdot p(x) = \int_X \mu_A(x)\,dp.$$

일상언어에서 피할 수 없는 부정확성은 확률적(probabilistic)이기 보다는 가능성(possibilistic)에 비추어 이해하는 것이 더 자연스럽다. 집합 $X = \{x \in N : 1 \leq x \leq 20\}$일 때, "unlocated된 변수 u는 작은 수이다"라는 정보로부터 u가 집합 $A = \{3, 4, 5\}$에 있을 가능성 정도를 다음과 같이 계산한다. 먼저 "u는 작은 수이다"를 나타내기 위한 가능성 분포 $\pi_u$를 X에서의 퍼지집합으로 준다. 가능성분포(possibility distribution) $\pi_u : X \to [0,1]$는 $\sup_{x \in X} \pi(x) = 1$을 만족하는 함수이고, u가 A에 있을 가능성 정도 (측도) $\Pi(A) = \sup_{x \in X} \pi(x)$이다. 역으로, 가능성 측도가 주어지면, 가능성 분포 $\pi(x) = (\{x\})$를 얻게된다. 집합 A, B에 대하여 $\Pi(A \cap B) = \min\{\Pi(A), \Pi(B)\}$이다.

또한 u가 X에서의 퍼지집합 A(예를 들어, "작지 않은 수들의 모임")에 속할 가능성 측도 $\Pi(A) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \Pi(\{x\})\}$이다.

### 3. 확률과 가능성의 비교

(1) 사건이 일어날 가능성이 없음 $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ 사건이 일어날 확률이 없음.

일반적으로 $\Pi \geq P$

(2)

| 구 분 | 확 률 | 가 능 성 |
|---|---|---|
| 정 의 역 | $\sigma$ - algebra | 제한없음 |
| 공 역 | [0,1] | [0,1] |
| 제한사항 | $\sum_{x \in X} p(x) = 1$ | $\sup_{x \in X} \pi(x) = 1$ |
| $\cup$ | $P(\dot{\cup} A_n) = \sum P(A_n)$ | $\Pi(\cup_{i \in I} A_i) = \sup_{i \in I} \Pi(A_i)$ |
| $\cap$ | $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (A, B 독립사건) | $\Pi(A \cap B) = \min\{\Pi(A), \Pi(B)\}$ |

## Ⅳ. 퍼지관계(Fuzzy Relation)와 퍼지함수 (Fuzzy Function)

### 1. 퍼지관계

집합 X, Y에서 X×Y의 부분집합 R을 관계라 부른다. 이때 $(x, y) \in R$이면 x와 y는 관계가 있고 $(x, y) \notin R$이면 x와 y는 관계가 없다고 말한다. 예를 들어 「x와 y는 키가 같다」는 x와 y의 관계는 명확하다. 그러나 「x는 y보다 훨씬 크다」, 「x는 y를 좋아한다」 또는 「x와 y는 매우 닮았다」등은 애매한 관계이다. 이러한 애매한 관계를 일반적 관계의 일반화로 수량화시킨 것이 바로 퍼지관계이다.

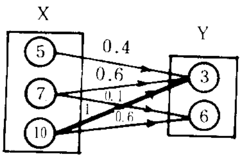
정의 : 집합 X, Y의 카테션곱 X×Y에서의 퍼지집합 R을 집합 X에서 집합 Y로의 퍼지관계라 부른다. 특히, X=Y 일때 R을 집합 X에서의 퍼지관계라고 부른다.

$\mu_R(x, y)$는 x와 y사이의 관계정도(the strength of the relation)를 의미한다. 집합 X에서의 퍼지관계 R은 정점(vertex, node)들의 집합 X위에서 호(arc) $(x, y) \in X \times X$가 weight $\mu_R(x, y)$를 갖는 퍼지그래프(fuzzy graph)로 생각할 수 있다. X와 Y가 유한집합이면, 행렬 $T_R$와 퍼지그래프 $\Gamma_R$로 표현될 수 있다.

예 : 집합 $X = \{5, 7, 10\}$, $Y = \{3, 6\}$에서 R="x는 y보다 훨씬 큰 (x, y)들의 모임"

$$T_R = \begin{array}{c|cc} & 3 & 6 \\ \hline 5 & 0.4 & 0 \\ 7 & 0.6 & 0.1 \\ 10 & 1 & 0.6 \end{array}$$

$\Gamma_R =$



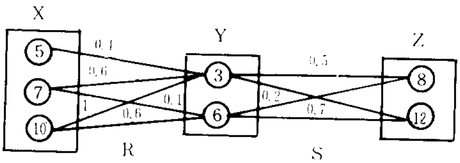

집합 X에서 집합 Y로의 퍼지관계 R과 집합 Y에서 집합 Z로의 퍼지관계 S의 합성(composition) R·S는 X에서 Z로의 퍼지관계를 의미하며

① sup-min 합성 : $\mu_{R\circ S}(x, y) = \sup_{y \in Y} \min\{\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)\}$

② sup-product 합성 : $\mu_{R\circ S}(x, z) = \sup_{y \in Y} \mu_R(x, y) \cdot \mu_S(x, z)$

주 : sup-min 합성에서 "min" 대신에 여러가지 연산(유계곱 등)을 적용함으로써 문제의 성격에 따라 선택하게 되는 다양한 합성을 얻을 수 있다. 특히, 이 합성연산은 퍼지시스템의 표현, 퍼지추론등 퍼지이론의 응용에 매우 중요하게 사용된다.

예 : sup-min 합성

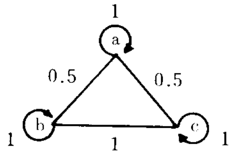



$$T_{R\cdot S} = \begin{array}{c|cc} & 8 & 12 \\ \hline 5 & 0.4 & 0.4 \\ 7 & 0.5 & 0.6 \\ 10 & 0.2 & 1 \end{array}$$

정의 : 집합 X에서의 퍼지관계 R을 다음과 같이 부른다.

- 반사적(reflexive) ⇔ $\mu_R(x, x) = 1, \forall_x \in X$
- 대칭적(symmetric) ⇔ $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$, $\forall x, y \in X$
- 반대칭(antisymmetric) ⇔ $x \neq y$이고 $\mu_R(x, y) > 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) = 0$, $\forall x, y \in X$
- 전이적(transitive) ⇔ $\mu_R(x, y) \geq \mu_{R\circ R}(x, y)$, $\forall x, y \in X$
- Proximity ⇔ 반사적+대칭적
- Preorder ⇔ 반사적+전이적(sup-min 합성)
- 반순서(partial order) ⇔ 반사적+반대칭+전이적(sup-min 합성)
- 유사(similarity) ⇔ 반사적+대칭적+전이적(sup-min 합성)

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | 1 | 0.5 | 0.5 |
| b | 0.5 | 1 | 1 |
| c | 0.5 | 1 | 1 |




참고 : ① R이 유사관계이면 R′은 ultrametric이 된다.

② 유사관계의 조건 "전이적"에서 sup-min 합성 대신 sup-유계곱 합성을 사용할 때 likeness 관계라 부르는데, pseudo-metric과 깊은 관계가 있다.

③ 유사관계는 일반 집합론에서의 동등관계(equivalence relation)의 일반화로 퍼지 clustering의 기본적인 도구가 된다.

정의 : $A \in F(X)$, $B \in F(Y)$일 때, 집합 $X \times Y$에서의 퍼지집합 R이 다음식을 만족하면 퍼지집합 A에서의 퍼지집합 B로의 퍼지관계라 부른다.

$$\mu_R(x, y) \leq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}, \forall (x, y) \in X \times Y.$$

위에서 전개한 방법으로, 퍼지집합 위에서 퍼지관계이론을 전개할 수 있다.

## 2. 퍼지함수

우리가 다루는 문제의 성격에 따라서 여러가지 종류의 퍼지함수를 정의할 수 있다. 사실, 퍼지관계도 퍼지함수의 일종으로 볼 수 있다.

(1) $A \in F(X)$, $B \in F(Y)$ 일 때, 퍼지함수 $f : A \to B$는 일반함수 $f : X \to Y$로서 $\mu_A \leq \mu_B \circ f$를 만족함을 의미한다. X는 트럭들의 집합, Y는 속도눈금들의 집합, f(x)는 트럭 x의 속도한계(speed limit), A는 큰 트럭들의 모임이고 B는 낮은 속도들의 집합일 때, 퍼지함수 $f : A \to B$는 "트럭이 클수록 속도한계는 더 낮아짐"을 의미한다.

(2) X, Y가 집합일 때, 함수 $f : X \to F(Y)$를 X로 부터 Y로의 퍼지화(fuzzifying) 함수라고 부른다. X로부터 Y로의 퍼지화함수 f와 퍼지관계 R은 수학적으로 동치인 개념이다. 즉 일대일 대응관계이다. 이 관계는

$\mu_{f(x)}(y)=\mu_R(x,y)\ \forall\ (x,y)\in X\times Y$이다. 그러므로, 퍼지화 함수의 합성도 퍼지관계의 sup-min 합성으로 정의된다.

$$\mu_{g\circ f(X)}(z)=\sup_{y\in Y}\ (\mu_{f(X)}(x),\mu_{g(y)}(z))$$

(3) X, Y가 집합일 때, 일반함수 $f: F(X)\rightarrow F(Y)$를 생각할 수 있다. 합성도 일반적인 방법으로 가능하다. 예를 들어, X=책방에 있는 모든 책들의 집합, $Y=(0,\infty)$일 때, "좋은책"→"비싼값," "나쁜책"→"싼값"이라는 관계를 함수 f로 나타낼 수 있다.

(4) 일반함수의 퍼지확장 : X, Y가 집합일 때, 일반함수 $f: X\rightarrow Y$로부터 함수 $f: F(X)\rightarrow F(Y)$로 확장할 수 있다.

$$\mu_{f(A)}(y)=\begin{cases}\sup\limits_{x\in f^{-1}(y)}\ \mu_A(x) & \text{if } f^{-1}(y)\neq\emptyset,\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

두개의 확장된 함수의 합성은, 원래의 두 함수 합성의 확장이 된다.

## 3. 확장원리 (extension principle)와 퍼지수 (fuzzy numbers)

일반 집합론에서의 개념을 퍼지이론으로 일반화시키는 데 가장 중요한 도구중의 하나가 확장원리이다. 이 원리는 일반 수학적 개념과 퍼지관점에서의 개념과의 관계를 명확히 제시한다.

정의 : 집합 $X_i$에서의 퍼지집합 $A_i(i=1,2)$의 카테션 곱(cartesian product)은 다음과 같이 정의되는, 집합 $X_1\times X_2$에서의 퍼지집합 $A_1\times A_2$를 의미한다.

$$\mu_{A1\times A2}(x_1,x_2)=\min\{\mu_{A1}(x_1),\mu_{A2}(x_2)\}$$

정의(확장원리) : 집합 $X_i$에서의 퍼지집합 $A_i(i=1,2)$와 함수 $f: X_1\times X_2\rightarrow Y$가 주어졌을때, 집합 Y에서의 퍼지집합 B가 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_B(y)=\begin{cases}\sup\limits_{(x_1,x_2)\in f^{-1}(y)}\min\{\mu_{A1}(x_1),\mu_2(x_2)\}, & \text{if } f^{-1}(y)\neq\phi,\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

주 : 정의역을 두개의 카테션 곱으로부터 일반적인 n개의 곱으로 일반화할 수 있다.

참고 : ① n=1일 때의 확장원리는 2-(4)의 일반함수의 퍼지확장을 의미한다.

② 확장원리는 퍼지관계합성의 특별한 경우이다.

$B=(A_1\times A_2)\circ R$,

(이때 R은 일반관계(crisp relation)):

$$\mu_R(x_1,x_2,y)=\begin{cases}1, & \text{if } y=f(x_1,x_2)\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

③ 확장원리를 가능성의 관점에서 이해할 수 있다(참조 u가 X에서 퍼지집합 A에 속할 가능성 측도). 이 외에도 퍼지관계, 퍼지함수들의 합성등 여러가지 방향에서 확장원리가 매우 중요하게 사용된다.

일상생활에서 우리는 매우 애매한 수의 개념을 자주 사용한다. 예를 들면, 「5 정도」, 「0에 가까운」, 「10Km 내외」등이다. 이러한 애매한 수의 개념을 다음과 같은 퍼지집합으로 이해한다.

정의 : 퍼지수(fuzzy number) A는 다음을 만족하는 실수 집합 R에서의 퍼지볼록집합을 의미한다.

① $\mu_A(x_0)=1$ 되는 점 $x_0$가 유일하게 존재 ($x_0$를 A의 평균값이라 부른다)

② $\mu_A$는 piecewise 연속함수

우리가 통상 받아들이는 5정도+2정도=7 정도를 얻기 위한 퍼지수들 사이의 연산은 덧셈함수의 퍼지 확장을 이용하여 정의한다.

퍼지수 A, B에 대하여

덧셈 : $A\oplus B$ : $\mu_{A\oplus B}(z)=\sup\limits_{x+y=z}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}$

뺄셈 : $A\ominus B$ : $\mu_{A\oplus B}(z)=\sup\limits_{x-y=z}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}$

곱셈 : $A\otimes B$ : $\mu_{A\otimes B}(z)=\sup\limits_{x\cdot y=z}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}$

이다.

## 參考文獻

[1] D. Dubois and H. Prade, *Outline of fuzzy set theory: an introduction*, Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. North-Holland, pp. 27-48, 1979.

[2] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, 1980.

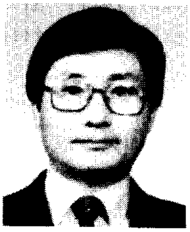
[3] J.A. Goguen, L-fuzzy sets, J. of Math. Anal. & Appl., vol.18, pp. 145-174, 1967.

[4] A. Kaufmann, *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets*, Academic Press, 1975.

[5] G.J. Klir and T.A. Folger, *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information*, Prentice-Hall, 1988.

[6] C.V. Negoita and D.A Ralescu, *Applications of Fuzzy Sets to System Analysis,* Birkhäuser-Verlag, 1975.
[7] R.K. Ragade and M.M. Gupta, Fuzzy set theory: Introduction, Fuzzy Automata and Decision Processes, North-Holland, pp. 105-131, 1977.
[8] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information & Control 8, pp. 338-353, 1965.
[9] L.A. Zadeh et al. (Ed.), *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes,* Academic Press, 1975.
[10] H.J.Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and Its Applications,* Kluwer-Nijhoff, 1985.

## 筆 者 紹 介



**閔 庚 燦**

1949年 12月 5日生

1972年 2月 연세대학교 이과대학 수학과 (공학사)

1976年 8月 연세대학교 대학원 수학과 (공학석사)

1981年 8月 캐나다 Carleton대학교 수학과 (박사)

1981年 9月～1982年 2月 캐나다 Ottawa대학교 강사

1982年 3月～1987年 2月 연세대학교 이과대학 수학과 조교수

1982年 12月～1983年 2月 독일 Hannover대학교 방문교수

1988年 1月～1989年 2月 캐나다 Carleton 대학교 방문교수

1987年 3月～현재 연세대학교 이과대학 수학과 부교수