論 文

複合信號－積算性 雜音模型에서 약한 信號檢波

正會員 嚴 泰 相* 正會員 金 相 燁* 正會員 金 炯 明* 正會員 宋 翊 鎬*
正會員 金 善 勇* 正會員 柳 興 均**

Detection of Weak Signals in a Composite Signal-Multiplicative Noise Model

Tae Sang UHM*, Sang Youb KIM*, Hyung Myung KIM*, Iickho SONG*, Sun Yong KIM*,
Heung Gyoon RYU** *Regular Members*

要 約 純加算性 雜音과 積算性 雜音을 함께 나타낼 수 있는 一般化된 雜音 模型에서, 알려진 信號成分과 確率信號成分을 모두 가지고 있는 複合 信號를 檢波하는 方法을 살펴보았다. 이 局所最適 檢波器의 有限 標本 性能을 얻어 이를 다른 檢波器의 有限 標本 性能과 견주어 보았다.

ABSTRACT In a generalized model with which we can represent multiplicative noise as well as purely additive noise, we consider detection of composite signals which contain both deterministic and stochastic signal components. To illustrate the performance of the locally optimum detectors, finite sample-size performance characteristics are obtained and compared with those of other detectors.

I. 머릿말

雜音이 신호에 섞일 때 統計學 理論을 써서 信號가 있는지를 알아내는 硏究를 여러 사람이 오랫 동안 해왔다[보기, 1,2]. 그 가운데서도 信號의 세기가 작을 때 性能이 다른 檢波器보다 좋은 局所最適(locally optimum) 檢波器를 얻는 硏究도 活潑히 진행되어 왔다. 局所最適 檢波器의 얼개는 均一最强 檢波器(uniformly most powerful detector) 또는 最適(optimum) 檢波器와 같은 다른 檢波器들의 얼개보다 具現하기 쉽다는 것이 알려져 있다.

이제까지는 局所最適 檢波器를 얻을 때에 대부분 純加算性 雜音 模型을 (purely additive noise model) 假定하였다. 이것은 純加算性 雜音 模型이 數學的으로 다루기 쉽기 때문이었다. 그러나 좀 더 實際에 가깝게 近似化하려면 非加算性 (non-additive) 雜音을 考慮해야 할 때가 있다. 보기를 들면, 多重經路 또는 진동 현상 때문에 생기는 遲延 信號의 影響과 자동 이득 조절 회로의 동작과 같은 것을 생각할 때에는 純加算性雜音뿐만 아니라 非加算性 雜音을 함께 생각해야 한다.[3].

이 論文에서는 純加算性 雜音 成分과 積算性 (multiplicative) 雜音 成分의 影響을 함께 나타내는 雜音 模型을 생각하였다. 또한 信號는 알려진 信號(known signal) 成分과 確率 信號(random signal) 成分을 모두 가지고 있는 複合(composite) 信號라고[4] 假定하였다. 곧, 이 論文의 目的은 積散性 雜音과 純加算性 雜音이 섞여 있는 複合 信號를 局所最適 檢波하는 檢定 統計量을 얻는 것이다.

II. 一般化된 (Generalized) 觀測模型

純加算性 雜音 模型을 나타내는 一般的인 觀測模型은(observation model) 다음과 같다.

*韓國科學技術院 電氣및 電子工學科
Department of Electrical and Electronic Eng. KAIST
**忠北大學校 電子工學科
Dept. of Electronic Eng., Choongbuk University
論文番號：91－106(接受1991. 6. 12)

$$X_i = \theta Q_i + W_i, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{2.1}$$

여기서 θ는 信號의 세기를 나타내는 媒介 變數이고, Q_i와 W_i는 각각 i번째 標本瞬間에서 信號成分과 純加算性 雜音 成分을 나타낸다. 비록 (2.1)로 나타낼 수 있는 純加算性 雜音 模型은 널리 쓰이고 있으나, 이 模型은 雜音이 섞인 觀測을 나타내는데 가끔 좋은 測定이 되지 않을 때가 있다. 이제 더 넓은 범위에 쓰일 수 있는 觀測模型을, 곧, 觀測 X_i가 다음과 같이 나타나는 模型을 [5] 생각해 보자.

$$X_i = \alpha(\tau)e_i + \beta(\tau)S_i + \{\alpha(\tau)e_i + \beta(\tau)S_i\} N_i + W_i, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{2.2}$$

여기서 e_i와 S_i는 각각 i번째 標本 瞬間에서 알려진 信號 成分과 確率 成分과確率 信號 成分을 나타낸다. 또한 $\alpha(\tau)$와 $\beta(\tau)$는 각각 알려진 信號와 確率 信號의 크기이며, τ는 信號의 세기를 決定하는 媒介變數이다. N_i는 積算性 雜音을, W_i는 純加算性 雜音을 나타낸다. 積算性 雜音 $\{N_i : i=1,\cdots,n\}$과 純加算性 雜音 $\{W_i : i=1,\cdots,n\}$은 確率 密度 函數가 각각 f_N 및 f_W이고서로 獨立이며 같은 分布를 갖는 確率 變數라고 假定한다. 이때 $N_i=0$이면 模型 (2.2)는 純加算性 模型이 된다.

Ⅲ. 局所 最適 檢波器의 檢定 統計量

積算性 雜音 및 純加算性 雜音이 섞여있는 複合 信號를 檢波하는 문제는 다음 두 假說의 檢定問題로 생각할 수 있다.

$$H_0 : X_i = W_i, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{3.1}$$

및

$$H_1 : X_i = \alpha(\tau)e_i + \beta(\tau)S_i + \{\alpha(\tau)e_i + \beta(\tau)S_i\} N_i + W_i, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{3.2}$$

그러므로 우리의 檢波 問題는 觀測 集合 $X=\{X_i\}$의 조건부 結合 密度 函數 $f(x|\tau)$에 대한 歸無 假說과 對立 假說 가운데에서 하나를 고르는 假說 檢定 問題로 나타낼 수 있다. 곧 H_0일때에는 $\tau=0$이고 H_1일때에는 $\tau>0$이며

$$f(x \mid \tau) = \prod_{i=1}^{n} \int f_{NW}(n_i, y_i(\tau))\, dn_i \tag{3.3}$$

인데, 여기서

$$y_i(\tau) = x_i - \{\alpha(\tau)e_i + \beta(\tau)s_i\} - \{\alpha(\tau)e_i + \beta(\tau)s_i\}\, n_i \tag{3.4}$$

이다.

끝으로 세기 函數 $\alpha(\tau)$와 $\beta(\tau)$는 原點을 지나며, 原點에서 알짜 增加(strictly increasing) 函數라고 假定하자. 그 다음에 [5]에서처럼 위 模型을 再媒介變數化하면 觀測 X_i는 다음과 같이 된다.

$$X_i = a(\theta)e_i + b(\theta)S_i + \{a(\theta)e_i + b(\theta)S_i\}N_i + W_i \tag{3.5}$$

여기서 $a(\theta)$와 $b(\theta)$는 각각 $\alpha(\tau)$와 $\beta(\tau)$를 $\theta=\alpha(\tau)$ 또는 $\theta=\beta(\tau)$로 하여 再媒介變數化한 것인데, 이들은 모두 $\theta\to 0$ 일 때에 微分할 수 있는 함수이다. 위와 같이 觀測 模型을 再媒介變數化한 다음의 模型을 다루는 까닭은 觀測 模型을 再媒介變數化하면 지나치게 어려운 數學的 演算을 거치지 않으면서도 再媒介變數化하지 않았을 때와 똑같은 결과를 얻을 수 있기 때문이다.

Neyman Pearson 定理를 [6] 따르면, H_0의 H_1에 대한 最適 檢定은 誤警報(false alam) 確率이 주어 졌을 때 檢波 確率을 가장 크게 하도록 다음과 같이 尤度比(likelihood ration) $T_{opt}(X)$와 문턱값을 견주어 보는 것이다.

$$T_{opt}(X) = \frac{f_1(x)}{f_0(x)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} t \tag{3.6}$$

여기서 $f_1(x)$는 假說 H_1일때 觀測 벡터 X의 確率 密度 函數이다. 雜音과 確率 信號 成分이 統計學的으로 獨立이라고 假定하면 觀測 벡터의 確率 密度 函數는

$$f_0(x) = \prod_{i=1}^{n} \int f_{NW}(n_i, x_i)\, dn_i \tag{3.7}$$

및

$$f_1(x) = \prod_{i=1}^{n} \iint f_{NW}(n_i, x_i - (a(\theta)e_i + b(\theta)s_i)(1+n_i))\, f_s(s)\,ds\,dn_i \tag{3.8}$$

이다. 最適 檢定 統計量을 쓰는 檢波器는 信號 크기가 정해져 있을 때에 檢波 確率을 가장 크게 하지만, 具現하기 힘들며 어떤 때에는 具現할 수 없을 때도 있다.

그런데 一般化된 Neyman-Pearson 定理를 [6] 쓰면 다음과 같은 檢定 統計量을 갖는 局所最適檢波器를 얻을 수 있다.

$$T_{LO}(X) = \frac{f_1^{(v)}(x)\,|_{\theta=0}}{f_0(x)} \tag{3.9}$$

여기서 微分 횟수 v는 (3.9)의 分子가 0이 되지 않는 가장 작은 整數로 正義된다. 局所最適檢波器는 誤警報 確率이 주어졌을 때 $\theta=0$에서 檢波力 函數의 (power function) 기울기를 가장 크게 하는 檢波器이다. 觀測 模型이 (3.2)일 때 局所最適 檢波器의 檢定 統計量을 얻어 $\Delta=q/p$의 값에 따라 나타내면 다음과 같다. (여기서 p와 q는 각각 $\alpha(\tau)$와 $\beta(\tau)$를 급수 전개했을 때 가장 낮은 차수이다).

A) $\Delta>1/2$ 일 때

$$T_{LO}(X) = \sum_{i=1}^{n} \{g_1(X_i) + g_2(X_i)\}\, e_i \tag{3.10}$$

이다. 여기서

$$g_1(x) = -f_W{}'(x)/f_W(x) \tag{3.11}$$

$$g_2(x) = -u'(x)/f_W(x) \tag{3.12}$$

및

$$u(x) = \int n f_{NW}(n, w)\,dn$$

$$= f_W(x) E\{N \mid W=x\} \tag{3.13}$$

이다. 곧, $\Delta>1/2$ 일때에는 알려진 信號 成分이 더 優勢하여 確率 信號 成分은 무시할 수있다고 말할 수 있다.

B) $\Delta<1/2$ 일 때

$$T_{LO}(X) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_s(i,j)\{g_1(X_i) + g_2(X_i)\}\{g_1(X_j) + g_2(X_j)\} + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\{h_1(X_i) + 2h_2(X_i) + h_3(X_i)\} \tag{3.14}$$

이다. 여기서 $K_s(i, j)$는 i번째와 j번째 確率 信號 成分 사이의 共分散 函數이며, σ_i^2은 i번째 確率 信號成分의 分散이다. 또한 h_1, h_2, 및 h_3는 각각

$$h_1(x) = \frac{f_W{}''(x)}{f_W(x)} \tag{3.15}$$

$$h_2(x) = \frac{u''(x)}{f_W(x)} \tag{3.16}$$

및

$$h_3(x) = \frac{v''(x)}{f_W(x)} \tag{3.17}$$

인데, (3.17)에서

$$\begin{aligned} v(x) &= \int n^2 f_{NW}(n, x)\, dn \\ &= f_W(x)\, E\{N^2 \mid W=x\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

이다. 곧 이 때에는 確率 信號 成分만이 共分散函數와 分散으로 檢定 統計量을 이룬다. 이 때 確率 信號 成分이 넓은 뜻의 定常이면 (wide sense stationary) $K_s(i, j) = K_s(|i-j|)$이고

$$\begin{aligned} T_{LO}(X) = & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big| \sum_{i=1}^{n} \{g_1(X_i) + g_2(X_i)\}\, a_{k-i} \Big|^2 \\ & - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \{g_1(X_i) + g_2(X_i)\}^2 \\ & + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \{h_1(X_i) + 2h_2(X_i) + h_3(X_i)\} \end{aligned} \tag{3.19}$$

이 되는데, (3.19)에서 a_i, $i=1, 2, \cdots$, 는 아래와 같이 定義된다.

$$K_s(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{k+l}\, a_l^* \tag{3.20}$$

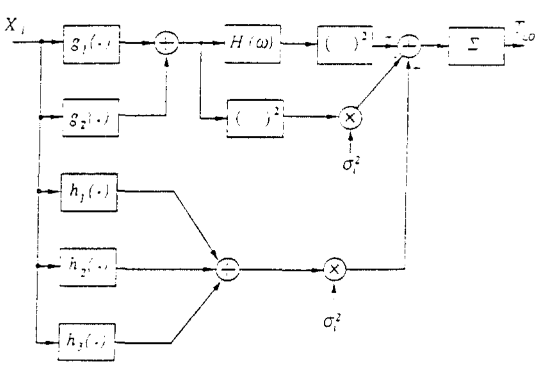


그림 1. Δ=1/2 일 때 국소 최적 검파기의 얼개

이 때의 局所最適 檢波器의 얼개는 그림 1에 나타나 있는데, 그림 1에서 濾波器$H(\omega)$는

$$|H(\omega)|^2 = \Big| \sum_{l=0}^{\infty} a_l e^{-j\omega l} \Big|^2 \tag{3.21}$$

로 定義된다.

C) Δ=1/2 일 때

$$\begin{aligned} T_{LO}(X) = & \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_s(i, j)\{g_1(X_i) + g_2(X_i)\} \\ & \{g_1(X_j) + g_2(X_j)\} \\ & + \sum_{i=1}^{n} \Big[\sigma_i^2 \{h_1(X_i) + 2h_2(X_i) + h_3(X_i)\} \\ & + \frac{2\delta}{\varepsilon^2} \{g_1(X_i) + g_2(X_i)\}\, e_i \Big] \end{aligned} \tag{3.22}$$

이다. 식(3.22)의 檢定 統計量은 식(3.10)과 (3.14)의 檢定 統計量을 線形 組合한 것이다. 여기서 δ와 ε은 각각 $\tau \to 0$의 $\alpha(\tau)/\tau$와 $\beta(\tau)/\tau$의 값이다. 이 식으로부터 Δ=1/2 일때에는 알려진 信號 成分과 確率 信號成分이 모두 檢定 統計量에 影響을 미침을 알 수 있다.

Ⅳ. 局所最適 檢波器의 性能

이제 3절에서 얻은 局所最適 檢波器의 性能을 다른 檢波器의 성능과 견주어 보자. 一般的으로 檢波器의 性能을 견줄 때에는 두가지 方法을 쓴다. 곧, 漸近 性能 比較와 有限 標本 性能 比較가 그것이다. 漸近 性能 比較에서는 標本 크기가 무한하다고 假定한다. 따라서 이것은 標本의 크기가 충분히 클때 檢波器들의 性能을 견주는 데에 자주 쓰인다[7]. 한편, 有限 標本 性能 特性은 漸近 性能보다 實際的으로 더 중요한데,

이는 實際로 쓰이는 標本의 크기는 유한하기 때문이다. 이 論文에서는 有限 標本 性能 特性을 써서 여러 檢波器의 性能을 견주어 보겠다.

이제 線形 相關(linear correlator) 檢波器, 符號 相關(sign correlator) 檢波器 및 제곱 法則(square law) 檢波器의 性能을 局所 最適 檢波器의 性能과 견주어 보자. 線形 相關 檢波器와 符號 相關 檢波器는 알려진 信號-純加算性 雜音 模型에서 雜音이 각각 定規 分布와 겹지수(double exponential) 分布를 따를 때 局所最適 檢波器이다. 또한 제곱 法則 檢波器는 確率 信號-純加算性 雜音 模型에서 雜音의 分布가 定規 分布일 때 局所最適 檢波器이다. 이들 檢波器의 檢定 統計量은 각각

$$T_{LC}(X) = \sum_{i=1}^{n} e_i X_i \qquad (4.1)$$

$$T_{SC}(X) = \sum_{i=1}^{n} e_i \, sgn(X_i) \qquad (4.2)$$

및

$$T_{SL}(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad (4.3)$$

이다. 컴퓨터 모의 실험에서는 雜音과 確率 信號 成分이 定規 分布를 따른다고 假定하고, 積算性 雜音과 純加算性 雜音은 平均은 0, 分散은 각각 0.5 및 1.0, 相關 係數는 0.5인 두변수 (bivariate) 正規 確率 分布를 따르고, $e_i=1$, σ_i^2, $K_S(i, j)=\exp(-|i-j|/5)$라고 假定했다. 이제 再媒介變數化한 다음 $\Delta<1/2$ 일때의 觀測模型

$$X_i = (\theta^3 e_i+\theta S_i) + (\theta^3 e_i+\theta S_i)N_i + W_i, \qquad (4.4)$$

을 생각하자. 곧, $\Delta<1/2$일 때의 $\Delta=1/3$인 模型을 생각하였다. 이 때에는 $2\delta/\varepsilon^2=2$가 됨을 알 수 있다. 確率 變數 $\{(N_i, W_i): i=1,2,\cdots, n\}$과 $\{S_i: i=1,2,\cdots,n\}$은 IMSL의 부프로그램으로부터 $n=20$으로 하여 발생시켰다. 여러 檢波器의 문턱값은 誤警報 確率을 1.3×10^{-3}으로 놓고 Monte Carlo기법을 써서 얻었다.

局所最適 檢波器의 檢波 確率을 다른 檢波器의 검파 확률과 견준 것이 그림 2에 나타나 있다. 이 그림으로부터 局所最適 檢波器의 性能이 다른 檢波器들보다 나음을 알 수 있다. 이것은 積算性 雜音 成分의 影響을 局所最適 檢波器를 얻을 때에 생각해 주었기 때문이다. 그뿐만 아니라 제곱 법칙 檢波器의 性能이 線形 相關 檢波器보다 낫다는 것도 알 수 있다. 이것은 線形 相關 檢波器와 제곱 法則 檢波器가 각각 알려진 信號와 確率 信號를 검파하는 局所最適 檢波器이고, $\Delta=1/3$일 때에는 確率 信號 成分이 더 세다는 것을 생각한다면 마땅한 것이다. 信號의 세기가 커짐에 따라 $\Delta<1/2$ 일때 線形 相關 檢波器가 제곱 法則 檢波器보다 性能이 더 좋은데, 이는 信號의 세기가 커지면 알려진 信號成分을 確率 信號成分보다 더 쉽게 檢波할 수 있기 때문이다.

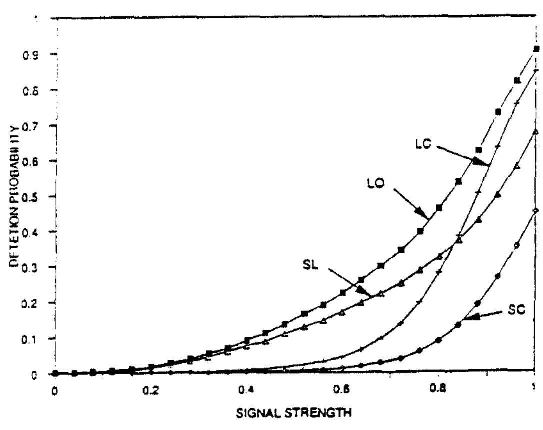


그림 2. $\Delta=1/3$ 일 때 여러 검파기들의 유한 표본 성능

V. 맺 음 말

이 論文에서는 純加算性 雜音과 積算性 雜音을 함께 생각할 수 있는 一般化된 雜音 模型에서

複合 信號를 局所最適 檢波하는 檢波器의 檢定統計量을 얻었다. 아울러 線形 相關 檢波器, 符號相關 檢波器 및 제곱 法則 檢波器와 局所最適檢波器의 有限 標本 性能을 컴퓨터 모의실험을 통하여 비교하였다. 이때 局所最適 檢波器가, 특히 信號가 작을 때에, 다른 檢波器보다 나은 性能을 지녔음을 알 수 있었다.

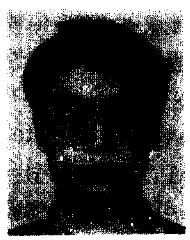
참 고 문 헌

1. G. Fedel, L. Izzo, and L. Paura, "Optimum and Suboptimum Space Diversity Detection of Weak Signals in Non Gaussian Noise", *IEEE Trans. Comm.*, vol. COM-32, pp. 990-997, September 1984.
2. J. L. Brown, Jr., "Detection of Signals in Non-Gaussian Noise A New Coordinate Approach", *IEEE Tarans. Inform. Theory*, vol. IT-13, pp.296-298, March 1987.
3. I. Song and S. A. Kassam, "Locally Optimum Detection of Signals in a Generalized Observation Model: The Random Signal Case", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-36, pp. 516-530, May 1990.
4. I. Song, J.C. Son, and K.Y. Lee, "Detection of Composite Signals: Part I. Locally Optimum Detector Test Statistics", *Signal Processing*, vol. 23, pp. 79-88, April 1991.
5. T.S. Uhm, *Locally Optimum Detection of Composite Signals in a Generalized Noise Model*, M.S.E. Diss., Dept. of Electr. Engr., Korea Adv. Inst. Sci., Tech. (KAIST), Daejeon, January 1991.
6. E.L. Lehmann, *Testing Statistical Hypotheses, 2nd ed.* John Wiley & Sons, New York, 1986.
7. M. Kendall and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, vol. 2, 4th ed., Charles Griffin & Company Limited, London, 1979.

嚴 泰 相(Tae Sang UHM) 正會員
1965년 2월 7일생
1988년 2월 : 연세대학교 전자공학과 졸업
현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 석사과정 재학

金 相 燁(Sang Youb KIM) 正會員
1967년 8월 24일생
1990년 2월 : 경북대학교 전자공학과 졸업
현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 석사과정 재학

金 炯 明(Hyung Myung KIM) 正會員
1952년 10월 24일생
1974년 2월 : 서울대학교 공학사
1982년 4월 : Pittsburgh대학 전기공학과 공학석사
1985년 12월 : Pittsburgh대학 전기공학과 공학박사
1986년 4월 ~ 현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 조교수
※주관심분야 : 디지털 신호및 영상처리, 다차원 시스템이론, 비데오신호 전송 등임



宋 翊 鎬(Iick Ho SONG) 正會員
1960년 2월 20일생
1982년 2월 : 서울대학교 전자공학과 졸업
1984년 2월 : 서울대학교 전자공학과 졸업(석사)
1985년 8월 : Univ. of Pennsylvania 전기공학과 졸업(M.S.E)
1987년 5월 : Univ. of Pennsylvania 전기공학과 졸업(Ph. D.)
현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 조교수

金 善 勇(Sun Yong KIM) 正會員
1968년 1월 30일생
1990년 2월 : 한국과학기술원 과학기술대학 정보통신과학과 졸업

현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 석사과정 재학

柳 興 均(Heung Gyoon RYU) 正會員
1959年 7月 10日生
1982年 2月 : 서울大學校 電子工學科 (B.S)
1984年 2月 : 서울大學校 大學院 電子工學科 (M.S)
1989年 2月 : 서울大學校 大學院 電子工學科(Ph.D)
[illegible]年 1月 ~ 1983年 10月 : 韓國電子通信研究所 委囑研究員
1988年 2月 ~ 現在 : 忠北大學校 工科大學 電子工學科 助教授
※ 主關心分野 : 通信工學, 光通信, 信號處理 等