응용통계연구
제 4 권 제 1 호 1991년

절삭된 연립방정식 모형의 추정에 대한 몬테칼로 비교

이 회 경*

〈요 약〉

절삭된 선형의 단일방정식 회귀모형의 추정은 Tobin(1958)에 의하여 처음으로 조사된 후 Amemiya(1973)를 기점으로 활발한 연구가 진행되었으나, 절삭된 비선형의 연립방정식 모형에 대하여는 연구결과가 거의 전무한 상태이다. 본 논문에서는 단순한 형태의 절삭된 비선형 연립방정식 모형을 가정하고 이 모형을 대상으로 몇가지 가능한 추정방법들 즉, 구조방정식에 대한 최우추정량(MLE)과 Lee and Hurd(1989)에서 소개된 2단계 준최우추정량(2QMLE) 및 또 다른 대안이 될 수 있는 추정량을 서로 몬테칼로 방법으로 비교 검토하였다. 그 결과 MLE의 적용이 실제적으로 불가능한 상황에서는 2QMLE가 MLE의 대안으로 충분히 사용될 수 있음을 보여 주었다.

1. 서론

절삭된(censored) 회귀모형의 추정은 Tobin(1958)에 의하여 처음으로 조사된 후 Amemiya(1973)의 논문을 기점으로 집중적이고도 활발한 연구가 진행되어 왔다. 단순한 형태의 단일방정식 모형에서 출발하였던 이 연구는 그후 절삭된 선형 연립방정식 모형으로 발전되어 많은 연구결과가 발표되었으나(절삭된 단일 혹은 연립방정식 모형의 추정에 대한 정리 문헌으로는 Amemiya(1984) 또는 Maddala(1983) 등을 들 수 있다), 절삭된 비선형 연립방정식 모형에 대하여는 연구결과가 거의 전무한 상태이다. Lee and Hurd(1989)에서는 이러한 절삭된 비선형 연립방정식 모형에 대한 최우추정량(maximum likelihood estimators, MLE)의 문제점과 그 대안이 되는 2단계에 걸친 준 최우추정량(Quasi-MLE, 2QMLE)를 소개한 바 있다.

그러나 이 2QMLE는 2단계에 걸친 근사(approximation)로 인하여 추정량의 분포를 얻기가 힘들므로 Lee and Hurd에서는 그 행태를 몬테칼로(Monte Carlo) 연구로 조사한 바 있

*(305-751) 대전직할시 유성구 구성동 400 한국과학기술원 경영과학과

다. 본 논문에서는 몬테칼로를 통하여 이 2QMLE를 MLE 및 또다른 대안이 될 수 있는 추정량과 비교 검토하고자 하는데 그 목적이 있다. 제 2 장에서는 대상 모형의 표기 및 각 추정방법에 대한 검토가 이루어지고 제 3 장에서는 실험의 계획 및 결과에 대하여 논하여지며 결론은 제 4장에서 다루어진다.

2. 모형 및 추정방법

일반적인 형태의 절삭된 비선형 연립방정식 모형은 함수형태(functional from)왕 절삭의 형태 또는 기준(censoring rule)이 정하여지지 않는 한 문제점의 파악 및 분석이 용이하지 않다. 따라서 본 논문에서는 아래와 같은 특정한 형태의 모형을 가정하고 이에 따른 추정방법에 대하여 보기로 한다. 우리는 비록 분석대상을 아래의 특정한 모형으로 국한시키기는 하였으나, 이것을 기점으로 좀 더 일반적인 모형에 대한 분석으로 발전시킬 수 있으리라고 본다.

모형 Ⅰ:

$$y_{1t}^* = \alpha_1 y_{2t}^* + X_{1t}\beta_1 + u_{1t}$$
$$\log y_{2t}^* = \alpha_2 y_{1t}^* + X_{2t}\beta_2 + u_{2t}$$

모형 Ⅱ:

$$y_{1t}^* = \alpha_1 (y_{2t}^*)^2 + X_{1t}\beta_1 + u_{1t}$$
$$\log y_{2t}^* = \alpha_2 y_{1t}^* + X_{2t}\beta_2 + u_{2t}$$

절삭기준:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= y_{1t}^* && \text{만일 } y_{1t}^* > 0\text{이면} \\ &= 0 && \text{그렇지 않으면} \\ y_{2t} &= y_{2t}^* && \text{만일 } y_{1t}^* > 0\text{이면} \\ &= \text{관찰되지 않음} && \text{그렇지 않으면} \end{aligned}$$

통상적인 정의에 따라 X_{it}는 외생변수, y_{it}^*는 잠재변수(latent variables), y_{it}는 실현된(realized)변수, α, β는 추정해야 하는 모수 u_{it}는 정규분포의 오차항을 가르킨다. 모형 Ⅰ은 노동의 공급결정식에 응용될 수 있으며, 모형 Ⅱ는 직접적인 응용례를 찾기는 어려우나 비선형의 정도에 따라 추정결과가 어떻게 변하는지 보이기 위하여 포함시켰다. 한편 절삭기준이 서로 다르면 두 모형에 대한 추정결과의 비교가 무의미하므로 두 모형은 동일한 절삭기준에 의하여 영향을 받도록 하였다. 추정방법의 검토에 있어서, 어느 한 모형에 대한 논의는 곧바로 다른 모형에 적용되므로 모형 Ⅰ를 주 대상으로 논의하였다.

α, β의 추정에 우선적으로 고려될 수 있는 방법은 최우추정법으로 이를 위한 우도함수는

$$L = \Pi \mid 1/y_{2t} - \alpha_1 \cdot \alpha_2 \mid f(v_{1t},\ v_{2t})$$
$$\cdot \prod_0^0 \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty \mid 1/y_{2t} - \alpha_1\alpha_2 \mid f(v_{1t},\ v_{2t})\, dy_{2t}\, dy_{1t}$$
$$v_{1t} = y_{1t} - \alpha_1 y_{2t} - X_{1t}\beta_1$$
$$v_{2t} = \log y_{2t} - \alpha_2 y_{1t} - X_{2t}\beta_2$$

와 같다.

그러나 우도함수내의 무한대 구간의 중적분으로 인하여 ML의 실제 적용이 어려워지게 되고, Lee and Hurd에서는 그 대안으로 2단계에 걸친 QMLE를 제안한 바 있다. 이 방법(2QMLE)의 골자는 다음과 같다. 비선형의 y_{2t}로 인하여 y_{it}에 대한 닫힌 형태(closed form)의 축소형 방정식(reduced form)이 명시적(explicitly)으로 구하여지지는 않는다. 그러나 X_t가 주어지고 나서의 y_{it}^*의 조건부 기대치는 그 기대치가 존재하는 한 X_t의 함수로 $E(y_{it}^* \mid X_t) = h_{it}(X_t)$와 같이 표기될 수 있다는 점에 근거하여 일단계에서는 h_{it}에 대한 다항식근사(polynomial approximation)가 이루어진다. 이 근사에 의하여 일단계에서는 구조방정식의 오른쪽에 포함되는「내생변수의 함수」(모형 I의 경우 내생변수 그 자체가 됨)에 대한 예측이 QMLE에 의하여 구하여 질 수 있다. 제 2 단계에서는 이렇게 얻어진 y_{it}을 구조방정식의 오른쪽항에 포함되어있는 y_{it} 대신 사용하여 또 한번의 QML이 수행되면 모수의 추정치가 얻어질 수 있다. 이렇게 얻어진 추정치가 언제나 α, β의 일치 추정치가 되는 것은 아니어도 Kullback-Leibler 정보기준(kullback-Leibler information criterion, KLIC)을 최소화하는 값에는 거의 확실하게(almost surely) 수렴하게 된다. 즉 y_t가 독립이며 동일한 분포를 갖는다 가정할 때 Θ을 QMLE에 의한 추정치라하고, g는 y_t의 진정한 분포, k는 QMLE를 위하여 가정된 분포이며, Θ^*는 다음과 같은 KLIC

$$E\left[\log \frac{g(y_t)}{k(y_t,\ \Theta)}\right]$$

을 최소화 하는 값이라 할 때 Θ는 거의 확실하게 Θ^*에 수렴하게 된다. 한편 Bates and White(1985)는 이와 같이 잘못 표기된 모형의 경우 QMLE가 어떤 조건하에서 일치추정량이 될 수 있는지 보이고 있다. 우리의 경우 Lee and Hurd에 의한 추정량은 KLIC를 최소화하는 모수에 거의 확실하게 수렴한다는 점에서 또 우도함수가 y_{it}가 절삭된 경우의 정보도 사용한다는 점에서, 비록 구조방정식의 모수에 대하여 언제나 일치추정량을 주는 것은 아니어도 구조방정식 ML의 대안이 되는 방법으로서 타당성을 갖는다 하겠다.

Lee and Hurd의 방법외에도 ML의 대안으로는 다음과 같은 추정량을 고려해 볼 수 있다. 즉 2QMLE의 제 1단계는 개개의 모수 추정치가 아니라, 단지 오른쪽에 들어있는「내생변수의 함수」의 예측치를 찾는데 있으므로, 이러한 예측치는 QMLE가 아닌 다른 방법에 의하여도 구할 수 있을 것이다. 가장 쉽게 거론될 수 있는 방법은 아마도 관찰된 변수(즉 $y_{1t}>0$인 경우)만을 사용하는 최소자승법일 것이다. 제한된 정보임에도 불구하고 첫번째 단계에서 최소자승법을 사용하는 이론적 근거는 White(1981)에서 찾을 수 있다. White는 잘못 표기된

(misspecified)모형에서 최소자승추정량은 예측의 MSE를 최소화하는 모수에 거의 확실하게 (almost surely) 수렴하는 것을 보이고 있다. 우리 모형의 경우 잘못 표기되는 요인은 오차항의 분포를 모른다는 점 및 그에 덧붙여 오차항이 근사에 의하여 다시 오염된 것에 있으므로 복합적이라 하겠다. 제 1단계에서 관찰되는 y_{it}에 대하여 y_{it}를 선형의 최소자승에 근사시킬 때

$$y_{1t} = X_{1t}\Pi_{11} + X_{2t}\Pi_{12} + w_{1t}$$
$$y_{2t} = X_{1t}\Pi_{21} + X_{2t}X_{12} + w_{2t}$$

와 같은 형태를 생각할 수 있으며 이로부터 y_{it}의 예측치를 구한다. 위에서도 언급되었던 것처럼 이 방법은 y_{1t}가 0 또는 y_{2t}가 관찰되지 않을 때의 정보(우리의 모형에서, 이러한 경우에도 X_{1t}, X_{2t}라는 정보는 여전히 가용하다)를 사용하지 않으므로 주어진 정보를 전부 사용하는 2QMLE에 비하여 일반적으로 만족스런 결과를 주지 못할 것으로 예상할 수 있다. 제 2단계는 2QMLE와 동일하다. 이 추정량은 일반적으로 일치 추정량을 주지는 못할 것이다.(이 추정량을 이후 least squares approximation estimator(LSAE)라 칭함). 그러나 사용의 편리성으로 ML의 또다른 대안으로 사용될 수 있으므로 과연 이러한 추정방법들이 ML추정치와 비교하여 어떻게 평가될 수 있는지 몬테칼로 연구를 통하여 보기로 한다.

3. 몬테칼로 실험의 계획 및 결과

3. 1 실험 계획

본 실험에서의 주안점은 절삭수준 및 분포의 가정이 변함에 따라 세가지 추정방법이 각각 어떠한 형태를 보이는지 비교해 보는데 있다. 토빗형태의 모형 추정시 절삭수준에 따라 추정결과가 영향을 받는다는 점은 잘 알려져 있다. 절삭 수준으로 본 연구에서는 주로 20%, 50% 및 70%를 사용하였고, 그외 정규분포에 대하여는 10, 30, 40, 60%를 추가로 실험하여 절삭수준의 변화가 미치는 영향을 보고자 하였다. 모든 실험에 걸쳐 u_{1t}와 u_{2t}의 분산의 선택은 실제의 절삭된 자료로 회귀분석을 하면 흔히 낮은 수준의 R^2를 보여준다는 점을 감안하여, 절삭이 있기 전의 회귀방정식으로부터 R^2가 약 0.5가 되도록 하였다.(절삭이 있고나서의 양(+)의 y_1들로만 된 회귀방정식은 이보다 낮은 약 $R^2=0.25$의 낮은 수치를 보여주었다).

자료의 생성기반이 되는 진정한 분포가 정규분포가 아님에도 불구하고 정규분포를 가정하고 최우추정법을 적용하면 그 최우추정량은 강건(robust)하지 못하다는 점이 우리의 모형에서는 어떻게 보여지는지, 즉 각 추정량들이 그 기반이 되는 분포가 달라짐에 따라 얼마나 민감하게 영향을 받는지 보기 위하여 정규분포외에 균일(uniform)분포 및 라프라스(Laplace)분포를 사용하였다.

X_{it} 들은 표분 정규분포로부터 추출되었고 u_{it} 들은 앞에서 언급된 바에 근거하여 평균이 0, 분산이 1인 정규, 균일 및 라프라스 분포로부터 추출되었다. 이 1의 분산은 앞에서의 $R^2=0.5$에 상응하는 값이 된다. 한편 진정한 모수값은 각각의 오른쪽항의 변수들이 대략 같은 변동

을 보이도록 선택되었다. 또 표본크기 (T)의 결정에 있어서는 2QMLE와 LSAE가 일반적으로 일치추정량이 아니고 근사분포를 계산하기 어렵다는 점에서 비교적 큰 $T=1000$을 택하였다. 각 실험시 반복횟수는 분포형태를 미루어 추측하기에 충분하다고 생각되는 200회로 하였다. 모든 실험은 IMSL과 GQOPT의 두 소프트웨어 패키지를 사용하였다. 최우추정방법을 적용하기 위하여는 무한대 구간에서의 중적분을 포함하고 있는 우도함수의 뒷부분, $P(y_{1t}^* \leq 0)$가 수치적으로 계산되어야만 한다.

본 모형의 경우 이러한 중적분의 문제가 적절한 변환을 통하여 단일적분으로 바꾸어질 수 있었으며(Lee and Hurd(1989) 참조) 그에 따라 계산오차를 줄임과 동시에 좀 더 정확한 추정 결과를 기할 수 있었다.

이렇게 변환된 우도함수로부터 구하여진 최우추정치는 알고리즘내의 오차 허용치 설정기준에 따라 적정점 도달여부가 영향을 받으나 오차 허용폭을 좁힌다 하여 항상 더 나은 결과를 보이지는 않았다. 이러한 점으로 미루어 ML의 적용이 이론적으론 가능하여도 실제 적용시에는 어려움이 뒤따르는 것을 알 수 있다.(정확한 적정점의 계산을 위하여는 2차 미분계산을 필요로 하는 알고리즘(GRADX)을 사용하였다. 그러나 이 방법은 과중한 계산부담으로 인하여 몬테칼로를 위한 반복 실험에서는 부적당하므로 몬테칼로 실험에서는 상대적으로 계산의 정확도가 뒤떨어지나 1차 미분만을 계산하는 알고리즘(DFP)을 사용하였다.)

3. 2 실험결과

〈표 1〉에 의하면 ML추정치는 예상했던 것과 같이 오차항이 정규분포일 때 모수에 대단히 근접하여 일치추정량이 됨을 보여주고 있다. 절삭의 정도가 높아짐에 따라 조금씩 진정한 모수값에서 멀어지는 추정치(α_1, α_2)도 있으나 일률적으로 그러하지는 아니하다. 〈표 1〉은 또 MLE의 첫번째 대안으로 제시된 2QMLE가 두번째 대안인 1단계에서의 최소자승근사에 의한 추정량(LSAE)보다 α_1의 경우를 제외하고는 대체로 우월한 결과를 보여주고 있다. 즉 편의(bias)의 정도 및 표준편차의 변화는 α_2의 경우에 특히 현저하여 절삭의 정도가 심해질수록 LSAE에 의한 편의의 정도가 상대적으로 대단히 크게 벌어지고 있음을 알 수 있다. 따라서 비록 LSAE가 α_1에서는 2QMLE보다 나은 결과를 보인다 하여도 이같이 현저한 차이로 인하여 LSAE가 2QMLE을 대신하여 MLE의 대안으로 사용되기는 어렵다 하겠다.

〈표 2〉~〈표 4〉로부터 우리는 다음의 두가지, 즉

(i) 오차항의 분포가 변함에 따라 각각의 추정결과가 어떻게 달라지는가,

(ii) 이러한 추정결과는 절삭의 정도와 어떻게 연관되는가

라는 사항을 조사할 수 있다. 먼저 (i)의 경우 MLE에 대하여 보면, 정규분포에서 벗어나게 되면 편의가 증가하는 것을 알 수 있다. 정규분포가 아닌데에도 불구하고 정규분포에 의거한 MLE를 사용하고 있는 경우이니 이 경우는 바로 QMLE의 예가 되며, 일반적으로 일치추정량을 주지 못한다는 점을 뒷받침해 준다고 하겠다. MLE의 대안인 2QMLE나 LSAE는 당연히 MLE보다는 큰 편의를 보이나, 앞서와 같이 2QMLE가 LSAE보다 우월한 결과를 보여주고 있으며 특히 α_2의 경우에서는 절삭의 정도가 높아질수록(예를 들어, 70% - 라프라스

의 경우, 2QMLE는 -1.136, LSAE는 -5.083) 그 차이가 크게 벌어짐을 보여주고 있다. LSAE에서 제1단계에서 만일 X의 2차항을 포함하는 다항식 근사로 하면 1차항만 사용할 때보다 LASE가 개선되는지, 그 실험결과가 〈표 5〉에 제시되어 있다. 이 실험에 따르면 α_1을 제외한 나머지들 특히 α_2에서 그 결과가 개선되고 있음을 보여주고 있으나 α_1에서는 오히려 편의가 증가하고 있다. 이는 아마도 더 적합한 근사는 2차항의 근사가 아니며, 우연히 선형의 근사에서 α_1에 대하여 더 좋은 결과를 보인 것이 아닌가 생각된다.

대상이 되는 모형에서 함수형태가 달라지게 되면, 즉 비선형의 정도가 변하면 어떠한 결과를 가져오는가 하는 질문에 대한 답은 모형 Ⅱ에 대한 실험에서 얻어질 수 있다. 모형 Ⅱ에 대한 이러한 실험에서 우리는 앞서의 모든 실험과정을 다시 반복하지는 않고, 단지 정규분포에서는 0～70%까지의 절삭정도하에서 2QMLE의 경우만을 조사하였다. 그 이유는 이미 모형 Ⅰ의 실험에서 그 유형을 찾을 수 있었으므로 위의 경우만을 조사하여도 유추가 가능하리라 생각되기 때문이다. 이 결과는 〈표 6〉에 나타나 있다. 예상했던 바와 같이 비선형의 정도가 커짐에 따라 편의가 증가하고 있으나 그 정도는 상대적으로 그다지 크지 않음을 보여주고 있다.

이상의 논의에서 보면 LSAE는 MLE의 대안으로 2QMLE보다는 적절치 못하다 할 수 있다. 그러면 과연 2QMLE는 MLE의 대안으로 적절한 추정방법이라고 할 수 있는가? 〈표 7〉에 의하면 오차항의 분포가 정규분포에서 벗어날 때 라프라스 분포의 경우 MLE와 2QMLE의 차이가 정규분포의 경우보다 오히려 줄어들고 있음을 보여주고 있다. 이는 진정한 모수값과의 차이 즉 편의가 비록 2QMLE가 MLE보다는 크다 하여도, 양자간 즉 2QMLE와 MLE간의 격차는 정규분포때보다도 줄어든다는 의미이니 실제의 분포를 모르는 것이 일반적인 상황에서는 실제적용이 불가능하거나 혹은 가능하다 하여도 어렵게 MLE를 적용한들 이에 따른 별다른 이득이 없다는 뜻이라 하겠다.

〈표 1〉 Normal(0, 1) 0~70% censoring

	진정한 모수값	추정량	0%	10	20	30	40	50	60	70%
α_1	1	MLE	1.001 (0.043)	1.003 (0.047)	1.003 (0.049)	1.000 (0.046)	1.006 (0.049)	1.006 (0.056)	1.007 (0.046)	1.006 (0.059)
		2QMLE	1.00 (0.058)	0.972 (0.062)	0.954 (0.063)	0.934 (0.066)	0.913 (0.077)	0.891 (0.077)	0.868 (0.086)	0.856 (0.098)
		LSAE	1.000 (0.058)	1.006 (0.066)	1.005 (0.069)	1.002 (0.074)	0.998 (0.078)	0.996 (0.088)	0.991 (0.101)	0.994 (0.117)
β_{12}	−1	MLE	−1.000 (0.036)	−1.002 (0.040)	−1.000 (0.042)	−0.998 (0.044)	)−1.003 (0.049)	−1.000 (0.042)	−1.000 (0.042)	−1.000 (0.062)
		2QMLE	−0.999 (0.042)	−0.955 (0.046)	−0.992 (0.048)	−0.989 (0.053)	−0.989 (0.059)	−0.987 (0.071)	−0.987 (0.084)	−0.992 (0.101)
		LSAE	−0.999 (0.040)	−1.30 (0.048)	−1.046 (0.052)	−1.062 (0.059)	−1.082 (0.065)	−1.105 (0.079)	−1.129 (0.093)	−1.153 (0.116)
α_2	−1	MLE	−1.001 (0.044)	−1.003 (0.047)	−1.004 (0.050)	−1.000 (0.052)	−1.003 (0.057)	−1.003 (0.056)	−1.003 (0.071)	−1.005 (0.079)
		2QMLE	−1.008 (0.070)	−1.042 (0.075)	−1.067 (0.081)	−1.091 (0.090)	−1.125 (0.097)	−1.159 (0.112)	−1.214 (0.134)	−1.248 (0.153)
		LSAE	−1.008 (0.070)	−1.285 (0.102)	−1.473 (0.134)	−1.683 (0.177)	−1.960 (0.232)	−2.325 (0.326)	−2.831 (0.484)	−3.254 (0.646)
β_{22}	1	MLE	1.004 (0.040)	1.000 (0.040)	1.001 (0.041)	1.000 (0.043)	1.000 (0.043)	1.000 (0.047)	0.997 (0.051)	0.999 (0.046)
		2QMLE	1.004 (0.048)	1.032 (0.049)	1.053 (0.051)	1.075 (0.053)	1.102 (0.057)	1.133 (0.064)	1.168 (0.071)	1.194 (0.077)
		LSAE	1.004 (0.048)	1.035 (0.053)	1.059 (0.061)	1.085 (0.071)	1.115 (0.080)	1.148 (0.098)	1.197 (0.134)	1.231 (0.157)

주 : ( )안의 숫자는 200회 반복해서 얻어진 분포로부터의 표준편차임.

〈표 2〉 Mean 0, Variance 1, 20% Censoring

	진정한 모수값	추 정 량	Normal	Uniform	Laplace
α_1	1	ML	1.003 (0.049)	0.982 (0.041)	1.031 (0.055)
		2QMLE	0.954 (0.064)	0.946 (0.064)	0.954 (0.069)
		LSAE	1.005 (0.069)	0.996 (0.070)	1.013 (0.073)
β_{12}	−1	ML	−1.000 (0.042)	−0.984 (0.035)	−1.020 (0.050)
		2QMLE	−0.992 (0.048)	−0.987 (0.048)	−0.991 (0.058)
		LSAE	−1.046 (0.052)	−1.039 (0.051)	−1.053 (0.062)

α_2	−1	ML	−1.004 (0.050)	−1.006 (0.046)	−0.991 (0.062)
		2QMLE	−1.067 (0.081)	−1.072 (0.082)	−1.051 (0.077)
		LSAE	−1.473 (0.134)	−1.487 (0.136)	−1.443 (0.125)
β_{22}	1	ML	1.001 (0.041)	0.995 (0.040)	1.006 (0.044)
		2QMLE	1.053 (0.051)	1.052 (0.050)	1.053 (0.048)
		LSAE	1.059 (0.061)	1.056 (0.061)	1.060 (0.058)

주 : ( )안의 숫자는 200회 반복에서 얻어진 분포로부터의 표준편차임.

〈표 3〉 Mean 0, Variance 1, 50% Censoring

	진정한 모수값	추 정 량	Normal	Uniform	Laplace
α_1	1	ML	1.006 (0.056)	0.953 (0.043)	1.068 (0.080)
		2QMLE	0.891 (0.077)	0.867 (0.068)	0.919 (0.098)
		LSAE	0.966 (0.088)	0.939 (0.075)	1.081 (0.118)
β_{12}	−1	ML	−1.000 (0.052)	−0.968 (0.038)	−1.042 (0.079)
		2QMLE	−0.987 (0.071)	−0.980 (0.062)	−0.997 (0.091)
		LSAE	−1.105 (0.079)	−1.063 (0.066)	−1.175 (0.110)
α_2	−1	ML	−1.003 (0.056)	−1.038 (0.059)	−0.945 (0.075)
		2QMLE	−1.159 (0.112)	−1.208 (0.105)	−1.089 (0.113)
		LSAE	−2.325 (0.326)	−2.175 (0.259)	−2.573 (0.482)
β_{22}	1	ML	1.000 (0.047)	1.009 (0.047)	0.994 (0.048)
		2QMLE	1.133 (0.064)	1.153 (0.061)	1.112 (0.062)
		LSAE	1.148 (0.098)	1.172 (0.087)	1.128 (0.131)

주 : ( )안의 숫자는 200회 반복에서 얻어진 분포로부터의 표준편차임.

〈표 4〉 Mean 0, Variance 1, 70% Censoring

	진정한 모수값	추 정 량	Normal	Uniform	Laplace
α_1	1	ML	1.006 (0.059)	0.975 (0.054)	1.047 (0.064)
		2QMLE	0.856 (0.098)	0.822 (0.093)	0.900 (0.136)
		LSAE	0.994 (0.117)	0.910 (0.101)	1.153 (0.176)
β_{12}	−1	ML	−1.000 (0.062)	−1.000 (0.054)	−1.014 (0.078)
		2QMLE	−0.992 (0.101)	−0.985 (0.094)	−1.015 (0.135)
		LSAE	−1.153 (0.116)	−1.081 (0.097)	−1.301 (0.179)
α_2	−1	ML	−1.005 (0.079)	−1.071 (0.081)	−0.899 (0.082)
		2QMLE	−1.248 (0.153)	−1.334 (0.144)	−1.136 (0.159)
		LSAE	−3.254 (0.646)	−2.843 (0.444)	−5.083 (3.449)
β_{22}	1	ML	0.999 (0.046)	1.022 (0.053)	0.980 (0.051)
		2QMLE	1.194 (0.077)	1.235 (0.076)	1.1672 (0.0800
		LSAE	1.231 (0.157)	1.276 (0.124)	1.246 (0.444)

주 : ( )안의 숫자는 200회 반복에서 얻어진 분포로부터의 표준편차임.

〈표 5〉 Normal(0, 1) 50% Censoring **추정방법** : LSAE

	진정한 모수값	Linear	Quadratic
α_1	1	0.996 (0.088)	0.953 (0.079)
β_{12}	−1	−1.105 (0.079)	−1.086 (0.077)
α_2	−1	−2.325 (0.326)	−1.838 (0.254)
β_{22}	1	1.148 (0.098)	−1.070 (0.077)

주 : ( )안의 숫자는 200회 반복에서 얻어진 분포로부터의 표준편차임.

〈표 6〉 모형 Ⅰ과 모형 Ⅱ의 비교 Normal(0, 1) 0~70% 추정방법 : 2QMLE

	진정한 모수값	모형구분	0	10	20	30	40	50	60	70
α_1	1	Ⅰ	1.000 (0.058)	0.972 (0.062)	0.954 (0.063)	0.934 (0.063)	0.913 (0.070)	0.891 (0.077)	0.868 (0.086)	0.856 (0.098)
		Ⅱ	1.000 (0.048)	0.960 (0.051)	0.932 (0.052)	0.913 (0.054)	0.892 (0.058)	0.874 (0.064)	0.855 (0.073)	0.844 (0.092)
β_{12}	−1	Ⅰ	−0.999 (0.040)	−0.995 (0.046)	−0.992 (0.048)	−0.989 (0.053)	−0.989 (0.071)	−0.987 (0.071)	−0.987 (0.084)	−0.992 (0.101)
		Ⅱ	−0.999 (0.040)	−0.982 (0.046)	−0.975 (0.050)	−0.974 (0.053)	−0.971 (0.060)	−0.972 (0.068)	−0.977 (0.083)	−0.985 (0.105)
α_2	−1	Ⅰ	−1.008 (0.070)	−1.042 (0.075)	−1.067 (0.081)	−1.091 (0.090)	−1.125 (0.097)	−1.159 (0.112)	−1.214 (0.134)	−1.248 (0.153)
		Ⅱ	−1.013 (0.013)	−1.039 (0.099)	−1.071 (0.105)	−1.101 (0.116)	−1.139 (0.127)	−1.182 (0.143)	−1.240 (0.159)	−1.311 (0.200)
β_{22}	1	Ⅰ	1.004 (0.048)	1.032 (0.049)	1.053 (0.051)	1.075 (0.053)	1.102 (0.057)	1.133 (0.064)	1.168 (0.071)	1.194 (0.077)
		Ⅱ	1.008 (0.066)	1.032 (0.069)	1.067 (0.071)	1.095 (0.076)	1.130 (0.083)	1.169 (0.092)	1.219 (0.104)	1.280 (0.126)

주 : (　)안의 숫자는 200회 반복에서 얻어진 분포로부터의 표준편차임.

〈표 7〉 ML과 2QMLE의 차이 Normal(0, 1), 70% censoring

	Normal	Uniform	Laplace
α_1	0.150	0.153	0.147
β_{12}	0.008	0.015	0.001
α_2	0.243	0.263	0.237
β_{22}	0.195	0.213	0.182

4. 결　론

절삭된 비선형 연립방정식 모형에서 ML의 대안으로 2QMLE이 사용될 때 이 2QMLE가 과연 다른 대안이 되는 추정방법(LSAE)과 비교하여 어떠한 결과를 보이는지 우리는 ML의 실제 추정이 가능한 단순한 형태의 두개의 모형을 세우고 3가지 추정방법(MLE, 2QMLE, LSAE)을 몬테칼로 실험으로 조사하였다. 그결과 실제 ML에 의한 추정이 가능할 경우 MLE가 2QMLE보다 우월하기는 하나 근간이 되는 분포가 정규분포에서 벗어날 때 그러한 차이는 줄어드는 경우가 있음을 보았다. 또 LSAE가 MLE의 대안으로 사용되기에는 상대적으로 너무나 현격한 편의를 보여 2QMLE에 비하여 부적합하다고 볼 때, MLE의 적용이 불가능

한 상황에서는 2QMLE가 비록 언제나 일치추정량을 주지는 않으나 MLE의 대안으로 충분히 사용될 수 있다 하겠다.

물론 몬테칼로 실험의 속성상 이러한 실험결과의 해석에는 주의가 필요하다. 이 결과는 비선형의 정도가 비교적 단순한 두개의 모형을 대상으로 한정한 제한조건 아래에서 나타난 것이라는 점에서 이 결과가 모든 경우에도 동일하게 나타날 것이라고 주장하는 것은 무리일 수 있다. 그러나 절삭, 비선형, 연립방정식 및 응용성의 기본요소를 고루 갖춘 모형을 현실에 가까운 조건하에 놓고 실험하였다는 점에서 이 실험 결과는 충분한 의미를 갖는다 하겠다.

◇ 참 고 문 헌 ◇

(1) Amemiya, Takeshi(1973), "Regression Analysis When the Dependent Variable is Trancated Normal," *Econometrica* **41**, 997－1016.

(2) Amemiya, Takeshi(1984), "Tobit Models : A Survey," *Journal of Econometrics* **24**, 3－61.

(3) Bates, Charles and halbert White(1985), "A Unified Theory of Consistent Estimation for Parametric Models," *Econometric Theory* **1**, 151-175.

(4) Lee, Hoe Kyung and Michael D. Hurd(1989), "Simplified Estimation of a Nonlinear Simultaneous Equations Model with Censoring ; A Monte Carlo Study," Stony Brook Working Papers No. 320, SUNY at Stony Brook.

(5) Maddala, G. S. (1983) *Limited-Dependent and Qualitative Variables in Econometrics*, Cambridge University Press.

(6) White, Halbert (1981), "Consequences and Detection of Misspecified Nonlinear Regression Models," *Journal of the American Statistical Association* **76**, 419-433.

Estimation of Nonlinear Censored Simultaneous Equations Models : An Application of Quasi Maximum Likelihood Methods

Hoe Kyung Lee*

⟨Abstract⟩

This paper presents a Monte Carlo evaluation of estimators for nonlinear consored simultaneous equations models. We examine the performance of the maximum likelihood estimator (MLE), the two-step quasi maximum likelihood estimator (2QMLE) proposed by Lee and Hurd (1989), and another quasi MLe using least squares at the first step (LSAE) under varying degrees of freedom and underlying distributions, Although QMLE's are not necessarily consistent, the Monte Carlo results show that the 2QMLE may be used as an alternative to MLE when MLE is not applicable in practice.

* Dept. of Management Science, Korea Advanced Institute of Science and Technology, 400 Kusong -dong, Yusong-gu, Taejon 305-701.