

다중 지지된 主-副 구조물의 자유 진동

Free Vibration of Primary-Secondary Structures With Multiple Connections

민 경 원*

Min, Kyung - Won

요 약

주-부 구조물의 진동 특성을 파악하기 위한 새로운 방법인 frequency window method를 다중 지지되고 구조물간의 커플링이 강한 주-부 구조물을 해석하였다. 다항식의 합으로 표현된 특성 방정식과 이 식의 해는 기존의 고유치 해석 방법의 결과와는 다른 새로운 것으로 frequency window method의 주된 장점으로는 공진과 커플링 현상을 정량적으로 파악할 수 있는 파라미터의 정의, 전체 주-부 구조물의 모드특성을 나타내는 해석적인 식과 반복 기법의 도입으로 인한 해석 결과의 정확성등이 있다.

Abstract

The frequency window method has been extended to include strong coupling and multiple connections between the primary structure and the secondary structures. The rational polynomial expansion of the eigenvalue problem and the analytical methods for its solution are novel and distinguish this work from other eigenvalue analysis methods. The key results are: the identification of parameters which quantify the resonance and coupling characteristics; the derivation of analytical closed-form expressions describing the fundamental modal properties in the frequency windows; and the development of an iterative procedure which yields accurate convergent results for strongly-coupled primary-secondary structures.

1. 서론

중량의 주구조물(primary structures)에 여러 개의 경량 부구조물(secondary structures or equipments) 이 다중 지지(multiple supports)로 연결된 주-부 구조물은 건설 분야에서 많이 찾아 볼 수 있는데 대표적인 예로는 원자력 발전소의 파이핑 시스템(piping system)과 건물에 부착된 설비장치와 비내력벽, cladding system등이 있다. 이러한 부구조물들은 심각한 지진이나 풍하중이 왔을 때 자체의 안전은 물론 주구조물의 안전

이나 운영 지속에 결정적인 영향을 미치기 때문에 주-부 구조물의 진동 특성에 관한 연구의 필요성이 증대되고 있다.

한편 주-부 구조물의 진동 특성은 매우 복잡한 현상을 가지고 있는데 예를 들면 주-부 구조물의 자유도가 각각의 구조물의 자유도보다 훨씬 증가되어 복잡성이 가중되는 현상뿐 외에도 구조물의 모드의 상호 작용(modal interaction)으로 인한 동조 영향(tuning effects), 감쇠비(damping ratio)차이로 인한 비고전적 감쇠(nonclassical

* 삼성중합건설 기술연구소 공학박사

이논문에 대한 토론을 1992년 3월 31일까지 본학회에 보내 주시면 1992년 9월호에 그결과를 게재하겠습니다.

damping), 부구조물의 다중 지지로 인한 공간 커플링(spatial coupling)등의 현상에 의하여 해석의 어려움은 더욱 커지고 있다. 이러한 주-부 구조물의 진동 특성을 파악하기 위하여 많은 연구가 진행되어 왔는데 대표적인 것으로 Sackman과 Kelly [1]에 의한 동조 영향, Igusa와 Der Kiureghian [2], Burdisso와 Singh [3]등에 의한 공간 커플링, Igusa, Der Kiureghian와 Sackman [4] 그리고 Suarez와 Singh [5]등에 의한 비고전적 감쇠와 Igusa와 Der Kiureghian [6], Soong과 Chen [7]등에 의한 불확실성(uncertainties)을 고려한 주-부 구조물의 연구를 들 수 있다.

그러나 위 연구는 주-부 구조물 해석의 어려움으로 인하여 2 자유도계나 집중질량(lumped mass) 된 다자유도의 주구조물에 연결된 oscillator로 단순화된 모델을 대상으로 하였을 뿐만 아니라 부구조물의 질량이 상대적으로 주구조물에 비하여 매우 적어 주와 부 구조물간의 커플링이 약한(weak coupling)경우에만 적용이 되었다. 이러한 한계를 극복하기 위해 최근 분포 질량(continuous mass)된 주-부 구조물의 진동 해석을 위하여 Igusa, Achenbach와 Min [8, 9]에 의하여 새로운 frequency window method가 제시되었는데 이 방법은 Lagrange multipliers formulation에 기초를 두고 모드 합성법(mode synthesis), 매트릭스 이론과 섭동법(perturbation method)을 응용하여 새로운 형태의 특성 방정식(characteristics equations)을 유도하고 모드의 커플링을 체계적으로 분류하여 단순화시켜 해석의 간편화와 정확성을 이룬 새로운 것이다.

본 논문에서는 일점 지지(single point support)된 주-부 구조물을 대상으로 개발된 frequency window method [8, 9]를 다중 지지된 주-부 구조물에도 적용이 될 수 있도록 유사 정적 응답(pseudo-static response)을 고려하였으며 부구조물의 질량이 증가됨으로 생기는 강한 커플링(strong coupling)에도 정확한 해석이 가능하도록 특성 방정식내의 고차수 항(higher order terms)을 유도 과정에 포함시켰을 뿐만 아니라 수렴치의 결과를 얻을 수 있도록 반복 기법(iterative technique)을 도입하였다.

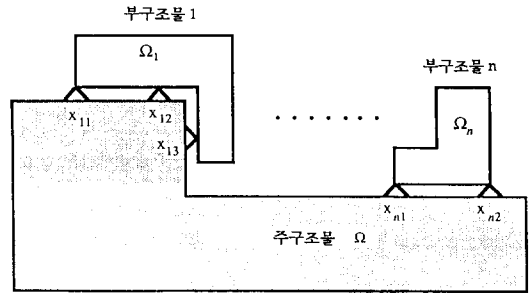


그림 1 n개의 부구조물이 다중지지된 주구조물

2. 특성 방정식 유도

주-부 구조물의 모델로는 그림 1과 같이 영역 $\Omega_k, k=1, \dots, n$ 을 가지는 n 개의 부구조물이 다중 지지된 영역 Ω 의 구조물을 대상으로 하였으며 각각의 부구조물은 주구조물에 다음과 같은 다중 지지점에 단순 지지되어 있다.

$$x_k = \{x_{k1}, \dots, x_{kt}\}$$

자유 지지의 주구조물은 모드 형상 $\Phi(x)$, 고유진동수 ω_i , 질량 $\rho(x)$ 으로 표현되며 모드 형상은 질량에 대하여 표준화(normalization)시켰다. 마찬가지로 지지점을 고정시킨 부구조물 k 는 모드형상 $\Psi_{kj}(x)$, 고유진동수 ω_{kj} , 질량 $\rho_k(x)$ 으로 표현된다.

다중 지지된 부구조물의 응답은 동적 응답(dynamic response)외에도 다중 지지점의 변위 차이로 인한 부구조물 k 의 유사 정적 응답의 영향이 있는데 벡터 $p_k(x)$ 와 매트릭스 S_k 를 다음과 같이 정의함으로 위 영향을 고려할 수 있다. 벡터 $p_k(x)$ 는 유사 정적 응답을 나타내는 함수로써 i 번째 요소는 모든 지지점을 고정시키고 i 번째 지지점에 단위 변위를 일으켰을 때의 부구조물 k 의 변위를 말한다. 또한 정적 강성 매트릭스(static stiffness matrix) S_k 의 (i, j) 번째 요소는 모든 지지점을 고정시키고 j 번째 지지점에 단위 변위를 가했을 때의 i 번째 지지점에서의 반력을 의미한다. 한편 각 구조물의 감쇠 현상은 복소 고유진동수(complex natural frequency)를 이용함으로써 고려할 수 있으며 커플링된 구조물의 감쇠 영향에 대해서는 Igusa와 Der Kiureghian의 연구결과

[2]에 상세히 설명되어 있으므로 여기서는 생략하기로 한다.

특성방정식은 Lagrange multipliers를 이용한 Lagrange방정식에 의해 유도되는데 $\Phi_i(x)$, $\Psi_{kj}(x)$, $p_k(x)$ 와 S_k 로 표현된 주구조물의 모빌리티(mobilities)와 부구조물의 임피던스(impedances)로 구성되며 과정은 다음과 같다.

조화응답(harmonic response)의 자유진동변위계(free vibration displacement fields)는 주구조물의 경우

$$w(x,t) = \sum_i a_i \Phi_i(x) e^{-i\omega t} \quad (1)$$

부구조물 k 의 경우

$$u_k(x,t) = [\sum_j b_{kj} \Psi_{kj}(x) + f_k^T p_k(x)] e^{-i\omega t} \quad (2)$$

로 표현된다. a_i 와 b_{kj} 는 모드좌표이며 f_k 는 부구조물 k 에서 지지점의 병진변위(translation)를 나타낸다. 다음에 설명될 부분에서는 모든 식에 나타나는 $e^{-i\omega t}$ 를 편의상 생략하기로 한다.

운동방정식을 유도하기 위하여 Lagrange 방정식에 의해 운동에너지 K 와 포텐셜에너지 U 를 구하면 다음과 같다.

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 \{ \sum_i a_i^2 + \sum_k [\sum_j b_{kj}^2 + 2 \sum_j b_{kj} f_k^T M_{kpp} f_k] \} \quad (3)$$

$$U = \frac{1}{2} \{ \sum_i a_i^2 \omega_i^2 + \sum_k \sum_j b_{kj}^2 \omega_{kj}^2 + \sum_k f_k^T S_k f_k \} \quad (4)$$

여기서 부구조물 k 인 경우

$$M_{kpp} \equiv \int_{\alpha_k} p_k(x) p_k^T(x) \rho_k(x) dx \quad (5)$$

은 질량 매트릭스인데 (i, j) 요소는 $p_k(x)$ 의 i 번째와 j 번째 요소간의 커플링을 의미한다.

$$M_{kj} \equiv \int_{\alpha_k} p_k(x) \psi_{kj}(x) \rho_k(x) dx \quad (6)$$

은 모드 질량 벡터인데 M_{kj} 의 i 번째 요소는 $p_k(x)$ 의 i 번째 요소와 부구조물 k 의 j 번째 모드 형상과의 커플링을 의미한다. M_{kpp} 와 M_{kj} 의 차원(dimension)은 표준화된 모드 형상 ψ_{kj} 때문에 각각 질량과 $\sqrt{\text{질량}}$ 이다.

주-부 구조물의 제약조건(constraint conditions)은 지지점 x_k 에서의 병진변위로 규정되는데 다음과 같이 주구조물과 부구조물의 변위를 같게 함으로써 Lagrange multiplier를 이용할 수 있다.

$$f_k \equiv \sum_i a_i \Phi_{ik} \quad (7)$$

Φ_{ik} 는 지지점 x_k 에서의 주구조물의 i 번째 모드에 관계된 변위를 나타낸다. 윗 식에 Lagrange multiplier인 벡터 λ_k 를 이용하면 Lagrange방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$(\omega_i^2 - \omega^2) a_i + \lambda_k^T \Phi_{ik} = 0 \quad (8)$$

$$(\omega_{kj}^2 - \omega^2) b_{kj} - \omega^2 f_k^T M_{kj} = 0 \quad (9)$$

$$\omega^2 \{ M_{kpp} f_k + \sum_j b_{kj} M_{kj} \} - S_k^T f_k + \lambda_k = 0 \quad (10)$$

위의 Langrange 방정식을 정리하여 모빌리티와 임피던스의 형태로 변환하면 다음과 같은 특성방정식이 유도된다.

$$[I + N(\omega) \text{diag}\{Z_1(\omega) \cdots Z_n(\omega)\}] f = 0 \quad (11)$$

여기서 I 는 단위 매트릭스(Identity matrix)이며 $N(\omega)$ 는 다음과 같은 주구조물의 모빌리티 매트릭스이고

$$N(\omega) \equiv \begin{Bmatrix} N_{11}(\omega) & \cdots & N_{1n}(\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ N_{n1}(\omega) & \cdots & N_{nn}(\omega) \end{Bmatrix} \\ = \sum_i \frac{-i\omega}{\omega_i^2 - \omega^2} \Phi_i \Phi_i^T \quad (12)$$

$$N_k(\omega) \equiv \sum_i \frac{-i\omega}{\omega_i^2 - \omega^2} \Phi_{ik} \Phi_{il}^T \quad (13)$$

부구조물 k 의 임피던스 매트릭스 $Z_k(\omega)$ 는 다음과 같다.

$$Z_k(\omega) = -i\omega \{ M_{kpp} - \frac{S_k}{\omega^2} + \sum_j \frac{\omega^2}{\omega_{kj}^2 - \omega^2} M_{kj} M_{kj}^T \} \quad (14)$$

여기서

$$\Phi_i \equiv [\Phi_{i1}^T \cdots \Phi_{in}^T]^T \quad (15)$$

이며 f 는 지지점의 변위벡터이다.

$$f = [f_1^T \dots f_n^T]^T \quad (16)$$

이상의 과정은 Lagrange 방정식을 이용하여 모빌리티와 임피던스의 형태로 이루어진 다중 지지된 주-부 구조물의 특성 방정식을 구한 것이다. 식(11)은 한 점으로 연결된 주-부 구조물의 특성방정식 [8]과 형태가 동일하나 다중 지지점의 불균일 변위로 인한 유사 정적 변위 함수, $p_k(x)$ 과 정적 강성 함수, S_k 가 차이점이다. 다음 장에서는 frequency window method를 이용하여 특성방정식내의 모드 커플링을 단순화시켜 주-부 구조물의 모드 특성을 파악한다.

3. Frequency window method

특성방정식의 모드 커플링은 해석하고자 하는 진동수 영역을 의미하는 frequency window를 이용함으로써 간단히 표현될 수 있다. 식(14)와 (12)에 있는 다항식은 각각 다음과 같이 구분할 수 있다.

$$Z_k(\omega) = Z_{k0}(\omega, \omega_0, \delta) + Z_{k1}(\omega_0, \delta) \quad (17)$$

$$N(\omega) = N_0(\omega, \omega_0, \delta) + N_1(\omega_0, \delta) \quad (18)$$

윗 식들의 첫번째 함수의 pole은 frequency window내에 있는 반면에 그외 함수의 pole은 frequency window밖에 있다. ω_0 는 frequency window의 중심 진동수이며 δ 는 frequency window의 반경이다.

참고 논문[8, 9]을 따르면 다음과 같이 모드의 분류집합을 나타내는 식에 따라

$$I(\omega_0, \delta) \equiv \{ \text{all } i \text{ such that } | \omega_i - \omega_0 | < \delta \} \quad (19)$$

$$I(\omega_0, \delta, k) \equiv \{ \text{all } ki \text{ such that } | \omega_{kj} - \omega_0 | < \delta \} \quad (20)$$

$\omega = \omega_0$ 에 대하여 식(11)의 각항에 섭동법을 적용하면 임피던스와 모빌리티의 지배항(dominant terms)인 $Z_{k0}(\omega, \omega_0, \delta)$ 와 $N_0(\omega, \omega_0, \delta)$ 와 비지배항(non-dominant terms)인 $Z_{k1}(\omega_0, \delta)$ 와 $N_1(\omega_0, \delta)$ 로 나눌 수 있다.

$$Z_{k0}(\omega, \omega_0, \delta) = \sum_{j \in I(\omega_0, \delta, k)} \frac{-i\omega_0^3}{\omega_{kj}^2 - \omega^2} M_{kj} M_{kj}^T \quad (21)$$

$$N_0(\omega, \omega_0, \delta) = \sum_{j \in I(\omega_0, \delta, k)} \frac{-i\omega_0}{\omega_j^2 - \omega^2} \Phi_j \Phi_j^T \quad (22)$$

$$Z_{k1}(\omega_0, \delta) = -i\omega_0 \left\{ M_{kpp} - \frac{S_k}{\omega_0^2} + \sum_{j \in I(\omega_0, \delta, k)} \frac{\omega_0^2}{\omega_{kj}^2 - \omega_0^2} M_{kj} M_{kj}^T \right\} \quad (23)$$

$$N_1(\omega_0, \delta) = \sum_{j \in I(\omega_0, \delta)} \frac{-i\omega_0}{\omega_j^2 - \omega_0^2} \Phi_j \Phi_j^T \quad (24)$$

윗식 (21)~(24)을 특성방정식 (11)에 대입하면 모드 커플링이 대폭적으로 감소된 특성 방정식으로 변환이 된다. 참고 논문 [8, 9]에서 변환된 특성방정식의 결과가 주와 부구조물 간의 커플링이 약할 때에는(부구조물의 질량이 주구조물의 질량에 비하여 상당히 적을 때) 매우 정확하고 커플링이 강할 때에는 부정확하다는 것을 알 수 있었다. 이러한 사실은 전개 과정에서 임피던스와 모빌리티에 있는 고차수 항을 무시하였기 때문이다.

본 논문에서는 커플링이 강한 다중 지지된 주-부 구조물에도 정확한 결과를 얻을 수 있도록 임피던스와 모빌리티에 있는 고차수의 항까지 해석에 포함시키고 반복기법을 도입함으로써 frequency window method를 보완 발전시킨다. 다음 장에서는 기본적인 한개의 모드만이 window에 있는 경우(one-mode window)만을 고려하여 주-부 구조물의 모드 특성을 구하고 다음 연구에 여러 개의 모드가 고려된 multi-mode window를 다루기로 한다.

3.1 One-mode window

One-mode window로는 다음과 같이 모드 분류 집합 $I(\delta, \omega_0)$ 에 의해 2가지로 구분할 수 있으며 각각 부구조물 k 와 주구조물의 모드를 의미한다.

$\{kj\}$ 와 $\{i\}$

3.1.1 모드 $\{kj\}$

첫번째 one-mode window로써 모드 $\{kj\}$ 가 고려되는데 편의상 $k=1$ 로 가정을 한다. 첫번째 부구

조물의 j 번째 고유진동수만이 유일하게 frequency window내에 있으므로 모드 분류집합은 $I(\omega_0, \delta) = \{j\}$, $I(\omega_0, \delta, 1) = \{1, j\}$ 와 $h \neq 1$ 일 때 $I(\omega_0, \delta, h) = \{j\}$ 가 되며 초기 추정 진동수를 $\omega_0 = \omega_{1j}$ 로 한다. 분류 집합에 따라 임피던스와 모빌리티를 분류하여 특성방정식(11)을 변환하면 다음과 같다.

$$[I + N(\omega_0) \text{diag}\{Z_{10}(\omega, \omega_0, \delta) + Z_{11}(\omega_0, \delta), Z_2(\omega_0), \dots, Z_n(\omega_0)\}]f = 0 \quad (25)$$

한편

$$Z_{10}(\omega, \omega_0, \delta) = \frac{-i\omega_0^3}{\omega_{1j}^2 - \omega^2} M_{1j} M_{1j}^T \quad (26)$$

$Z_{11}(\omega_0, \delta)$ 는 식(23)와 같다.

임피던스와 모빌리티의 고차항을 고려하기 위해 식(25)에 다음을 앞에 곱하고

$$\hat{I} = [I + N(\omega_0) \text{diag}\{Z_{11}(\omega_0, \delta), Z_2(\omega_0), \dots, Z_n(\omega_0)\}]^{-1}$$

정리하면 다음의 결과를 얻는다.

$$[I_{11} + \sum_m \hat{I}_{1m} N_{m1}(\omega_0) Z_{10}(\omega, \omega_0, \delta)]f_1 = [I_{11} + \frac{-i\omega_0^3}{\omega_{1j}^2 - \omega^2} \sum_m \hat{I}_{1m} N_{m1}(\omega_0) M_{1j} M_{1j}^T]f_1 = 0 \quad (27)$$

윗식에서 I_{kj} 와 \hat{I}_{kj} 는 각각 I 와 \hat{I} 의 부매트릭스(submatrix)를 의미하며 부구조물 k 와 j 의 지지점의 자유도에 관계된 것이다. 매트릭스 \hat{I}_{1m} 는 임피던스와 모빌리티의 고차수의 항을 포함하고 있으며 논문 [8, 9]에서는 고려하지 않았던 사항이다.

식(27)에 M_{1j}^T 을 앞에 곱하고 다음과 같은 식을 이용하면

$$m_1 \equiv \frac{\omega_0^2}{\omega_{1j}^2 - \omega^2} M_{1j}^T f_1 \quad (28)$$

아래와 같은 스칼라 형태의 새로운 특성 방정식을 얻는다.

$$[\omega_{1j}^2 - \omega^2 - i\omega_0^3 M_{1j}^T \sum_m \hat{I}_{1m} N_{m1}(\omega_0) M_{1j}] m_1 \omega_0^{-2} = 0 \quad (29)$$

따라서 윗식에서 주-부 구조물의 고유진동수

식을 다음과 같이 얻는다.

$$\omega = \omega_{1j} (1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_{1j}^2} \gamma_1)^{1/2} \quad (30)$$

윗 식에서의 γ_1 은 지지점 연성변수(support flexibility parameters)로 정의는 다음과 같다.

$$\gamma_1 = i\omega_0 M_{1j}^T \sum_m \hat{I}_{1m} N_{m1}(\omega_0) M_{1j} \quad (31)$$

이 시점에서 수학적으로 주-부 구조물 모드간의 커플링을 정의하는 것이 필요하다. Frequency window method의 개념으로 볼 때 커플링은 모드 그룹간의 상호작용에 의한 것으로 모드 그룹을 window안과 밖의 모드 그룹으로 분류할 수 있다. Window밖의 모드 그룹간의 커플링 정도(coupling degree)는 \hat{I} 의 두번째 항인 $N(\omega_0) \text{diag}\{Z_{11}(\omega_0, \delta), Z_2(\omega_0), \dots, Z_n(\omega_0)\}$ 로 설명이 된다. 또한 window안과 밖의 모드 그룹간의 커플링 정도는 γ_1 로 설명이 된다. 이러한 항들이 1보다 적어 무시할만 하면 약한 커플링이 되며 그렇지 않을 때에는 강한 커플링이 된다.

위에서 설명한 커플링의 수학적 정의를 식(30)에 적용하면 흥미로운 관찰을 할 수 있다. 약한 커플링일 때는 $\hat{I}_{11} \approx I$ 와 $m \neq 1$ 일 때 $\hat{I}_{1m} \approx 0$ 이 되며 식(30)와 (31)는 한점으로 연결된 주-부 구조물의 결과와 동일하다는 것을 알 수 있다. 여기에서는 단지 첫번째 부구조물의 j 번째 모드와 주구조물의 모드만을 포함하고 있을 뿐이다. (논문[8]의 식(29)와 (30)참고) 그러나 강한 커플링일 때는 위에서 정의한 바와 같이 window밖의 모드 그룹간의 커플링을 무시할 수 없기 때문에 모든 모드를 고려해야 한다는 것을 알 수 있다.

식 (25)~(31)에 있는 진동수 ω_0 는 모드 $1j$ 에 대응된 주-부 구조물의 고유진동수를 구하기 위해서 추정한 진동수이다. 약한 커플링일 경우에는 γ_1 이 매우 적어 주-부 구조물의 고유진동수는 첫번째 부구조물의 j 번째 고유진동수 ω_{1j} 와 거의 같게 된다. 따라서 이러한 경우에는 추정치로써 ω_{1j} 를 사용하여도 정확한 결과를 얻을 수 있다. 그러나 강한 커플링일 때는 γ_1 이 1에 비하여 적지 않기 때문에 반복기법을 사용하여 정확성을 향상시킬 수가 있다. 반복기법의 순서로는 ω_{1j} 를 첫번

제 추정치로 사용하고 식(30)의 결과를 두번째 추정치로 이용을 한다. 이러한 과정은 결과치인 주-부 구조물의 고유진동수가 수렴을 할 때까지 반복이 된다.

또한 부구조물 k 의 지지점의 변위를 나타내며 주-부구조물의 모드형상을 의미하는(이하 모드형상) f_k 는 식(30)에서 구한 결과를 식(25)에 대입하고 정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$f_k = i\omega_0 \sum_m \hat{I}_{km} N_{m1}(\omega_0) M_{1j} \quad (32)$$

약한 커플링일 때의 모드형상 f 는 첫번째 부구조물의 지지점에 $\omega_0^2 M_{1j}$ 의 크기를 갖는 외력(harmonic force)을 가한 결과 주구조물의 변위를 의미한다. 또한 강한 커플링일 경우에는 \hat{I}_{km} 에는 무시못한 off-diagonal 항이 존재함으로 부구조물 지지점의 반력으로 인한 복잡한 커플링 영향을 받게 된다.

3.1.2 모드 $\{i\}$

이 경우에는 주구조물의 i 번째 고유진동수만이 frequency window에 포함되어 있으므로 모드 분류 집합은 $I(\omega_0, \delta) = \{i\}$ 와 $I(\omega_0, \delta, k) = \{ \}$ 이 되며 초기 추정진동수는 $\omega_0 = \omega_i$ 로 한다. 모드 $\{k_j\}$ 와 같은 과정으로 특성방정식 (11)을 간략화하면 아래와 같다.

$$[I + \{N_0(\omega, \omega_0, \delta) + N_1(\omega_0, \delta)\} \text{diag}\{Z_1(\omega_0) \cdots Z_n(\omega_0)\}] f = 0 \quad (33)$$

한편

$$N_0(\omega, \omega_0, \delta) = \frac{-i\omega_0}{\omega_i^2 - \omega^2} \Phi_i \Phi_i^T \quad (34)$$

식(33)에 다음과 같은 임피던스와 모빌리티의 고차수의 항을 포함하는 다음과 같은 \hat{I} 를 앞에 곱하면

$$\hat{I} = [I + N_1(\omega_0, \delta) \text{diag}\{Z_1(\omega_0) \cdots Z_n(\omega_0)\}]^{-1}$$

아래와 같은 식을 얻는다.

$$[I + \hat{I} N_0(\omega, \omega_0, \delta) \text{diag}\{Z_1(\omega_0) \cdots Z_n(\omega_0)\}] f = 0 \quad (35)$$

또한 윗 식에 $i\omega_0^{-1} \Phi_i^T \text{diag}\{Z_1(\omega_0) \cdots Z_n(\omega_0)\}$ 를

앞에 곱하고 다음 정의를 이용하면

$$P_i \equiv \frac{i\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \Phi_i^T \text{diag}\{Z_1(\omega_0) \cdots Z_n(\omega_0)\} f \quad (36)$$

아래와 같은 스칼라 형태의 새로운 특성방정식을 얻는다.

$$[\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega_0 \Phi_i^T \text{diag}\{Z_1(\omega_0) \cdots Z_n(\omega_0)\} \hat{I} \Phi_i] P_i \omega_0^{-2} = 0 \quad (37)$$

윗 식에서 전체 주-부 구조물의 고유진동수 식을 다음과 같이 얻는다.

$$\omega = \omega_i (1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_i^2} \mu_i)^{1/2} \quad (38)$$

윗식에서의 μ_i 은 부구조물 질량 변수(secondary structure mass parameters)로 정의는 다음과 같다.

$$\mu_i = i\omega_0^{-1} \Phi_i^T \text{diag}\{Z_1(\omega_0) \cdots Z_n(\omega_0)\} \hat{I} \Phi_i \quad (39)$$

이 경우에도 주구조물의 i 번째 모드만을 포함하는 그룹과 그외의 모드를 포함하는 그룹으로 나눌 수 있다. 두번째 모드 그룹내의 커플링 정도는 \hat{I} 의 두번째 항인 $N_1(\omega_0) \text{diag}\{Z_1(\omega_0) \cdots Z_n(\omega_0)\}$ 로 알 수 있으며 두 그룹간의 커플링 정도는 μ_i 에 의해 결정된다. 이러한 것이 1에 비하여 상당히 적을 때에는 약한 커플링이 되며 그렇지 않을 때는 강한 커플링이 된다.

위에서 쓰인 진동수 ω_0 는 모드 i 에 대응되는 주-부 구조물의 고유진동수의 초기 추정치이다. 약한 커플링인 경우 μ_i 는 1에 비하여 매우 적기 때문에 주-부 구조물의 고유진동수 ω 는 구조물의 i 번째 고유진동수인 ω_i 와 거의 비슷하다. 따라서 이러한 경우에는 초기추정치 진동수로써 ω_i 를 이용하여도 정확성을 기할 수가 있다. 그러나 강한 커플링인 경우 μ_i 의 값을 무시하지 못하기 때문에 ω_0 를 변화시켜 가면서 반복기법을 사용하는 것이 바람직하다.

모드 형상 f 는 식(38)의 결과를 특성방정식 (33)에 대입하고 식(36)을 이용하고 P_i 를 1로 놓으면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$f = \hat{I} \Phi_i \quad (40)$$

약한 커플링일 경우 $\hat{I} \approx I$ 로 생각할 수 있으며 모드 형상은 주구조물의 i 번째 모드형상과 동일해진다. 그러나 강한 커플링일 경우 \hat{I} 에는 무시하지 못할 off-diagonal 항이 존재하기 때문에 모드형상은 모든 모드의 커플링으로 복잡하여진다.

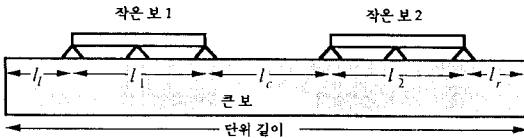


그림 2 2개의 작은 보가 다중지지된 큰 보

4. 예제

다중 지지된 주-부 구조물의 예로 그림 2에 있는 2개의 작은 보가 1개의 보에 다중 지지된 구조물을 해석 대상으로 하였다. 주구조물은 자유 지지의 오일러 보(Euler beam)로써 2개의 부구조물인 보가 각각 주구조물에 3개의 점에 단순 지지로 연결되어 있다. 모든 보는 동일한 탄성계수 E 를 지니며 관성모멘트와 길이당 질량을 주구조물인 경우에는 I 와 m , 부구조물인 경우에는 I_s 와 m_s 로 한다. 편의상 무명수 값의 변수(nondimensional parameters)를 정의하면 다음과 같다.

$$\lambda \equiv \frac{m_s}{m} \text{ 와 } \tau\lambda \equiv \frac{EI_s}{EI} \quad (41)$$

여기서 λ 는 질량비를 나타내며 $\tau\lambda$ 는 강성비를 나타낸다. 축방향 변위는 무시하며 감쇠 영향은 고려하지 않는다. 변수 l_k 는 부구조물 k 의 길이를 나타내며 주구조물의 길이로 표준화시킨 것이다. l_1 , l_c 와 l_r 는 지지점을 나타내며 각 부구조물의 가운데 지지점은 부구조물의 중심에 위치하여 있다.

모드 $\{kj\}$ 와 $\{i\}$ 에 관한 2가지 frequency window가 적용되었다. 각 경우의 보의 길이는 표 1에 나타나 있으며 4가지 질량비 $\lambda=0.05, 0.15, 0.5, 1.5$ 와 변수 $\tau=0.25$ 를 이용하였다. 이렇게 함으로써 부구조물의 모드 특성을 고정시킨 채 주구조물과 부구조물의 커플링을 변화시켰다.

각 경우 정확해와 frequency window method

표 1 지지점의 위치와 작은 보의 크기를 나타내는 큰 보의 부분 길이

	$\{kj\}$	$\{i\}$
l_1	0.283	0.283
l_2	0.083	0.283
l_i	0.092	0.092
l_c	0.333	0.333
l_r	0.208	0.092

를 이용한 근사해를 구하여 비교하였다. 정확해의 경우 수렴해를 구하기 위해 많은 수의 모드를 이용하여 원래의 특성방정식(11)을 해석한 반면에 첫번째 근사해는 본논문에서 구한 식(30), (32), (38), (40)에 의해 구하였고 두번째 근사해는 반복기법을 이용하여 수렴해를 구하였다. 해석결과 반복기법을 이용한 근사해는 몇차례의 반복을 통해 정확해에 수렴한다는 것이 밝혀졌다.

모드 $\{kj\}$ 의 경우 첫번째 부구조물의 첫번째 고유진동수($kj=1, 1$)에 대응되는 주-부 구조물의 모드특성을 파악하였다. 근사해는 식(30)와 (32)를 이용하였으며 $\omega_0 = \omega_{11}$ 로 표준화된 전체 시스템의 고유진동수가 여러 질량비에 관해서 그림 3에 나타나 있다. 정확해와 첫번째 근사해는 각각 네모와 세모로 표시되어 있는데 반복기법에 의한 근사해는 정확해와 일치하기 때문에 별도로 표시하지 않았다. 또한 표 2에서는 모드 질량으로 표준화시킨 지지점의 모드형상이 나타나 있다.

지지점 연성 변수인 γ_1 는 질량비 λ 에 대하여 그림 4에 나타나 있다. λ 값이 적을 때에는 γ_1 는 거의 영에 가까운 값을 가짐에 따라 표준화된 진동수의 비가 1에 접근하여 주-부 구조물의 고유진동수가 부구조물의 고유진동수와 비슷하여진다. 이러한 사실은 지지점이 강성인 효과에 의한 것이며 중량의 주구조물위에 경량의 부구조물이 진동한다는 것으로 해석할 수 있다. 이러한 경우에는 부구조물의 주구조물에 대한 반력이 매우 미미하기 때문에 지지점의 변위는 적다.

또한 λ 값이 커짐에 따라 γ_1 는 절대값은 점차 커지는데 이러한 사실은 부구조물의 질량이 커감에 따라 무시 못할 반력을 유발시켜 주구조물의 거동에 영향을 미치는 것으로 해석할 수 있다. (그림 3과 표 2 참고) 음수 값은 주구조물의 지지

표 2 정확해와 frequency window method에 의한 모드 $\{k_j\}$ 에 대한 진동수비와 모드 형상

	$\lambda=0.05$		$\lambda=0.15$		$\lambda=0.5$		$\lambda=1.5$	
	정확해	FWM	정확해	FWM	정확해	FWM	정확해	FWM
진동수비	1.004	1.004	1.011	1.012	1.028	1.033	1.047	1.069
모드 형상								
x1	-0.06	-0.06	-0.10	-0.10	-0.10	-0.13	-0.01	-0.12
x2	-0.08	-0.08	-0.11	-0.11	-0.14	-0.15	-0.14	-0.15
x3	0.15	0.15	0.23	0.24	0.32	0.36	0.31	0.43
x4	-0.12	-0.12	-0.21	-0.20	-0.36	-0.31	-0.55	-0.42
x5	-0.00	-0.00	-0.01	-0.00	-0.04	-0.01	-0.09	-0.03
x6	0.12	0.12	0.19	0.20	0.30	0.29	0.43	0.37

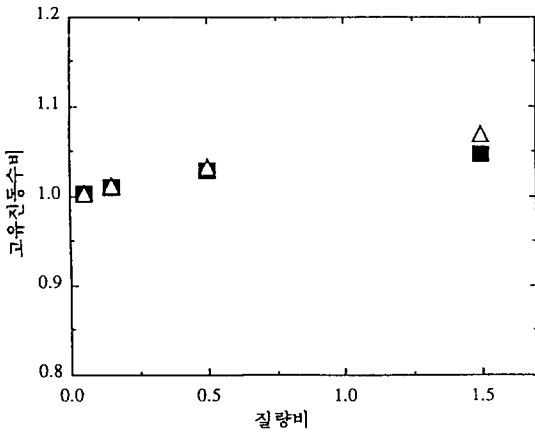


그림 3 정확해(■)와 frequency window method(△)에 의한 질량비 변화에 따른 모드 $\{k_j\}$ 에 대한 고유진동수비

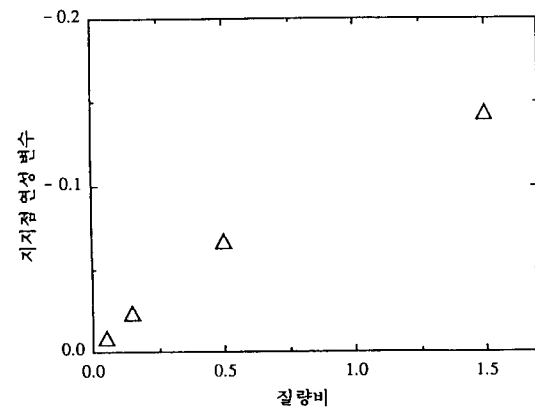


그림 4 질량비 변화에 따른 모드 $\{k_j\}$ 에 대한 지지점 연성 변수

점의 거동은 부구조물의 거동과 위상차이가 180°인 것을 의미하고 있다. 주-부 구조물을 스프링과 질량으로 된 oscillator로 변환을 하면 거동의 이해가 명확해지는데 지점과 oscillator가 180° 위상차이를 보이면서 거동을 하는 것을 의미한다. 또한 $\lambda=0.5$ 일 때의 모드 형상은 그림 5에 나타나 있는데 실선과 점선은 정확해와 근사해를 의미한다. 첫번째 부구조물의 첫번째 모드에 동조(tuned)된 구조물이기 때문에 뚜렷한 부구조물의 첫번째 모드 형상을 볼 수 있다.

한편 모드 $\{i\}$ 의 경우 주구조물의 다섯번째 모드($i=5$)에 대응하는 주-부 구조물의 모드특성을 조사하였다. 식(38)와 (40)을 이용하여 근사해를 구하였으며 고유진동수는 $\omega_0=\omega_5$ 에 의해 표준화되어 그림 6에 표시되어 있다. 한편 모드형상은 표 3에 있다.

λ 값이 적을 때에는 μ_i 값 또한 적어져 부구조물의 질량 효과를 무시할 수 있어 주구조물만의 거동이 주된 영향을 미친다. 표준화된 진동수비는 1에 접근을 하여 주-부 구조물의 고유진동수는 주구조물의 다섯번째 고유진동수와 비슷해진다. 한편 λ 값이 커지면 μ_i 값의 절대값은 증가한다. 이러한 사실은 첫번째 예제인 모드 $\{k_j\}$ 경우와 비슷하여 주-부 구조물의 고유진동수의 증가를 가져온다. 그러나 모드형상에는 큰 변화가 없는데 이것은 λ 값이 주구조물의 거동에 영향을 주기에 미약하기 때문이다. λ 값이 가장 큰 경우 1.5일 때 주구조물의 5번째 모드와 window 밖의 모드와의 커플링이 증가되어 식(38)에 의한 결과는 매우 부정확하여 반복기법을 사용하여도 수렴치를 구할

표 3 정확해와 frequency window method에 의한 모드 {i}에 대한 진동수비와 모드 형상 (**수렴이 되지 않음)

	$\lambda=0.05$		$\lambda=0.15$		$\lambda=0.5$		$\lambda=1.5$	
	정확해	FWM	정확해	FWM	정확해	FWM	정확해	FWM
진동수비	1.002	1.003	1.007	1.008	1.022	1.041	1.057	***
모드 형상								
x1	-0.57	-0.57	-0.58	-0.58	-0.59	-0.61	-0.58	
x2	0.11	0.11	0.09	0.09	0.07	0.07	0.05	
x3	0.55	0.55	0.54	0.55	0.53	0.54	0.48	
x4	0.55	0.55	0.54	0.55	0.52	0.54	0.48	
x5	0.11	0.11	0.09	0.09	0.07	0.07	0.05	
x6	-0.57	-0.57	-0.58	-0.58	-0.59	-0.61	-0.58	

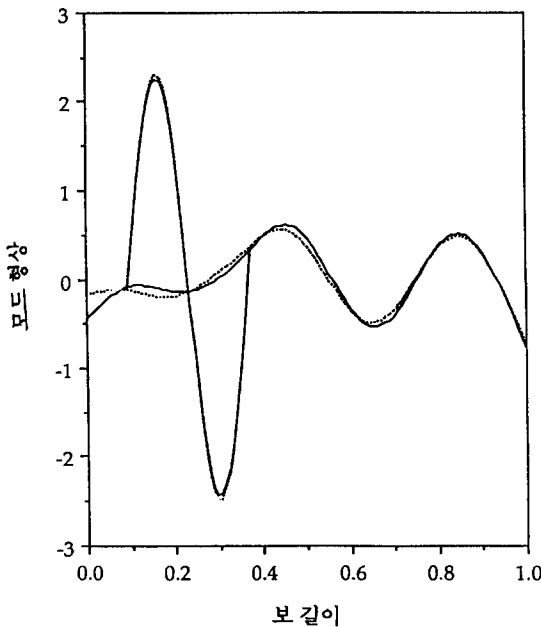


그림 5 질량비가 0.5일 때 정확해(—)와 frequency window method(---)에 의한 모드 {k}에 대한 모드 형상

수가 없었다. 그러나 다섯번째 모드에 강하게 커플링된 주위의 모드를 frequency window에 포함시킴으로써 정확해의 결과에 수렴시킬 수가 있으나 본 논문의 범위를 벗어나는 multi-mode window의 해석이므로 다음 연구에서 다루기로 한다.

5. 결론

Frequency window method를 다중지지되고

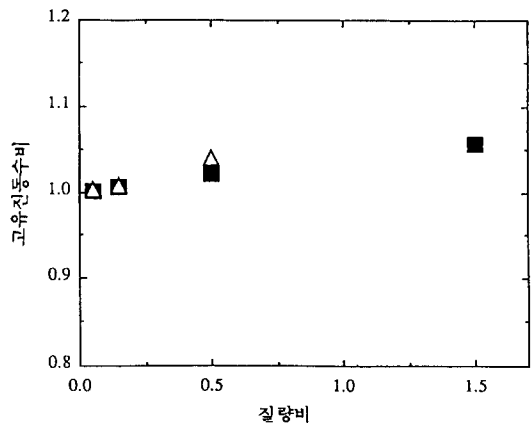


그림 6 정확해(■)와 frequency window method(△)에 의한 질량비 변화에 따른 모드 {i}에 대한 고유진동수비

커플링이 강한 주-부 구조물의 해석에 적용이 될 수 있도록 부구조물의 유사 정적 변위와 반복 기법을 고려하였다. 개선된 frequency window method에 의해 구해진 다항식의 합으로 표현된 특성방정식과 전체 구조물의 해석적인 모드특성식은 기존의 고유치 해석(eigenvalue analysis)의 결과와는 다른 새로운 것이다. 주요 결과로는 주와 부구조물간의 커플링 특성과 공진 효과(resonance effects)를 정량적으로 알 수 있는 매개 변수, frequency window내의 모드 특성을 의미하는 해석적인 식, 강하게 커플링된 주-부 구조물의 정확한 해석을 위한 반복기법등이 있다.

예제 해석의 결과에서 알 수 있듯이 개선된 frequency window method는 부구조물의 질량이 상대적으로 증가되어 나타나는 주와 부구조물간의 강한 커플링의 해석에도 매우 정확한 결과를 줄

뿐만 아니라 매개변수와 해석적인 식이 유도가 되어 주-부 구조물의 진동특성 파악을 용이하게 할 수 있다.

參 考 文 獻

1. Sackman, J. L., and Kelly, J. M., "Seismic analysis of internal equipment and components in structures" *Engineering Structures*, Vol.1, pp. 179~190, 1979.
2. Igusa, T. and Der Kiureghian, A., "Dynamic response of multiply supported MDOF secondary systems" *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol.111, No.1, pp.20~41, 1985.
3. Burdisso, R.A., and Singh, M. P., "Multiple supported secondary systems Part I : Response spectrum analysis" *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.15(1), pp.53~72, 1987.
4. Igusa, T., Der Kiureghian, A., and Sackman, J. L., "Modal decomposition method for stationary response of non-classically damped systems" *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.12(2), pp.121~136, 1984.
5. Suarez, L. E., and Singh, M. P., "Dynamic synthesis of nonclassically damped substructures" *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 115, No.1, pp.52~70, 1989.
6. Igusa, T. and Der Kiureghian, A., "Response of uncertain systems to stochastic excitation" *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No.5, pp.812~832, 1988.
7. Soong, T.T. and Chen, Y.Q., "Stochastic response sensitivity of secondary systems to primary structural uncertainties" *Structural Safety*, Vol. 6, No.3, pp.311~321, 1989.
8. Igusa, T., Achenbach, J. D., and Min, K.-W., "Resonance characteristics of connected subsystems : theory and simple configurations" *Journal of Sound and Vibration*, Vol.146(3), pp.407~421, 1991.
9. Igusa, T., Achenbach, J. D., and Min, K.-W., "Resonance characteristics of connected subsystems : general configurations" *Journal of Sound and Vibration*, Vol.146(3), pp.423~437, 1991.

(접수일자 : 1991. 9. 16)