

고유치 문제의 확률 유한요소 해석

– Frame 구조물의 좌굴 신뢰성 해석 –

Probabilistic Finite Element Analysis of Eigenvalue Problem

– Buckling Reliability Analysis of Frame Structure –

양 영 순*

Yang, Young Soon

김 지 호**

Kim, Ji Ho

요 지

구조 공학에서의 고유치 문제는 좌굴해석, 진동해석 등 여러 분야에 응용되고 있다. 일반적으로 구조물의 좌굴강도 해석에 사용되는 대부분의 변수들은 불확실성을 내포하고 있으므로 확률론적 해석을 수행해야 하지만, 구조물의 좌굴 신뢰성 해석을 위한 극한상태 방정식은 확률변수의 함수로 명확히 표현되지 않으므로 확률 유한 요소법의 사용이 필요하다.

따라서 본 논문에서는 직접미분법에 의해 정식화된 확률 유한요소법을 사용하여 고유치 문제의 신뢰성 해석 방법을 정식화 하고, 이를 바탕으로 좌굴 신뢰성 해석을 수행하였으며, 결과의 타당성을 검증하기 위하여 Crude Monte Carlo Method 및 이 방법의 단점을 대폭 보완한 Importance Sampling Method를 사용하였다. 본 논문에 의해 좌굴 신뢰성 해석 방법이 정립됨으로서 신뢰성에 기초한 최적 설계를 수행하는 경우, 시스템 파괴확률로서 소성 파괴확률과 더불어 좌굴 파괴확률의 고려가 가능해졌다.

Abstract

The analysis method calculating the mean and standard deviation for the eigenvalue of complicated structures in which the limit state equation is implicitly expressed is formulated and applied to the buckling analysis by combining probabilistic finite element method with direct differential method which is a kind of sensitivity analysis technique. Also, the probability of buckling failure is calculated by combining classical reliability techniques such a MVFOSM and AFOSM. As random variables external load, elastic modulus, sectional moment of inertia and member length are chosen and Parkinson's iteration algorithm in AFOSM is used.

The accuracy of the results by this study is verified by comparing the results with the crude Monte Carlo simulation and Importance Sampling Method. Through the case study of some structures the important aspects of buckling reliability analysis are discussed.

* 정회원, 서울대학교 조선공학과 부교수

** 서울대학교 조선공학과 박사과정

이 논문에 대한 토론은 1991년 9월 30일까지 본학회에 보내주시면 1992년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

I. 서론

구조 공학에서의 고유치 문제는 좌굴해석, 진동 해석 등 여러 분야에 응용되고 있다. 일반적으로 구조물의 좌굴강도 해석에서는 사용되는 모든 변수, 즉 하중, 재료의 특성 및 구조물의 치수 등이 항상 일정한 값을 갖는 확정론적인 변수로 가정하여 계산을 수행하고 여기에 경험에 입각한 안전계수를 부여함으로써 설계를 완성하였는데, 실제의 구조해석 환경에는 다양한 불확실성을 내포하고 있으므로 안전계수를 아무리 크게 하더라도 파괴확률을 0으로 할 수는 없다. 이처럼 0이 아닌 파괴확률을 정량적으로 평가하기 위하여 1960년대 후반 이후 확률이론에 입각한 신뢰성 이론을 구조물의 안전도 해석에 활용하려는 연구가 많이 이뤄지고 있다[1, 2]. 하지만 이러한 연구의 대부분은 주로 탄성 응력해석 및 소성해석에 관한 것이며 신뢰성 이론을 고유치 문제에 적용한 예는 거의 없는 실정이다.

구조물의 시스템 신뢰성 관점에서 기존 연구는 소성파괴에만 국한하여 시스템 파괴확률을 구하고 이를 설계에 적용하는 것이 대부분인데 [3], 구조물에 따라서는 소성파괴에 이르기 전에 좌굴에 의해 파괴가 일어날 수도 있으므로 구조물의 신뢰성 설계시 좌굴 신뢰성의 검토는 필수적이라 하겠다.

기존의 신뢰성 기법으로 고유치의 분산특성 및 파괴확률을 구하기 위해서는 고유치, 혹은 고유치로 이루어지는 극한 상태 방정식이 확률변수의 함수로 명확히 표현되어야 하는데 이는 사실상 불가능하다. 따라서 이 문제를 해결하기 위해서는 1980년대 이후 복잡한 구조물의 신뢰성 해석에 실용화 되기 시작한 확률 유한 요소법(PFEM; Probabilistic Finite Element Method)[4, 5]을 사용하여 고유치 해석에 있어서 음함수적으로 포함된 각 확률변수의 통계적 특성을 일관적으로 처리하여야 한다. 물론 Monte Carlo simulation 기법[6]의 사용도 가능하지만 이 방법은 확률변수가 만들어질 때마다 고유치 해석을 수행해야 하므로 시간이 많이 소요되는 단점이 있다.

이 분야의 연구동향으로서는 Nagagili등[4]이

부재 길이만을 확률변수로 하여 섭동법(perturbation method)에 의해 각 구조응답의 2차항까지 고려한 섭동해를 구하여 고유치의 평균과 분산특성을 구한 바 있다. 하지만 이 방법은 확률변수가 많아질수록 정식화 과정이 매우 복잡해지고 AFOSM 및 SORM등의 신뢰성 이론에 연결하기가 어려운 문제점을 가지고 있다.

따라서 본 연구에서는 확률 유한요소법을 통하여 섭동법 대신에 직접미분법(direct differential method)에 의해 고유치의 민감도(sensitivity)를 구하고[7] 이를 사용하여 확률변수들의 분산정도에 따른 고유치의 평균과 분산 특성을 구하는 방법을 정식화하고 이를 실제 구조물에 적용하여 좌굴하중의 평균치 및 표준편차를 계산하고 이를 기존의 신뢰성 이론에 연결하여 구조물의 좌굴 파괴확률을 계산하고자 한다. 이 방법을 사용하면 확률변수의 갯수에 무관하게 정식화 과정이 매우 간단할 뿐만 아니라 기존의 신뢰성 이론에 쉽게 연결할 수 있는 장점이 있다.

II. 문제의 정식화

구조공학계에서 진동해석 혹은 좌굴해석등에 일반적으로 사용되는 고유치 문제는 다음과 같이 표현된다.

$$(A - \lambda B)U = 0 \quad (2-1)$$

여기서, A, B : 대칭 정방 행렬

λ : 고유치

U : 고유 벡터

이며 모두 확률변수 X 의 함수이다. 한편 고유치 λ 를 확률변수의 평균치 \bar{X} 에 대하여 1차항까지 Taylor 전개하면 다음과 같이 된다.

$$\lambda - \bar{\lambda} = \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial X} (X - \bar{X}) \quad (2-2)$$

여기서 $\bar{\lambda}$ 는 \bar{X} 에서 계산된 고유치의 평균값이고 $\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial X}$ 는 \bar{X} 에서 계산된 λ 의 X 에 관한 편미분 값을 의미하므로 다음과 같이 구해진다. 먼저 식(2-1)을 X 에 대하여 편미분하여

$$\left(\frac{\partial A}{\partial X} - \frac{\partial \lambda}{\partial X} B - \lambda \frac{\partial B}{\partial X}\right)U + (A - \lambda B)\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad (2-3)$$

정리하면

$$\frac{\partial \lambda}{\partial X} BU = \left(\frac{\partial A}{\partial X} - \lambda \frac{\partial B}{\partial X}\right)U + (A - \lambda B)\frac{\partial U}{\partial X} \quad (2-4)$$

이 얻어지므로 양변에 U^T 를 전승(premultiply)하면 $U^T B U = 1$, $U^T(A - \lambda B) = 0$ 이므로

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial X} = \bar{U}^T \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial X} - \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{B}}{\partial X}\right) \bar{U} \quad (2-5)$$

따라서 식(2-2)로부터

$$(\lambda - \bar{\lambda})(\lambda - \bar{\lambda})^T = \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial X}\right)(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial X}\right)^T \quad (2-6)$$

이므로 고유치의 공분산 행렬이 다음과 같이 구해진다.

$$C_{\lambda\lambda} = \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial X}\right) C_{XX} \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial X}\right)^T \quad (2-7)$$

III. 좌굴 신뢰성 해석

구조해석에 있어서 좌굴문제는 다음과 같은 고유치 문제로 귀착된다.

$$(K - \lambda K_G)U = 0 \quad (3-1)$$

여기서 λ 는 좌굴하중 P_{cr} 에 해당하고 K 는 선형 탄성 강성행렬이며 K_G 는 부재의 굽힘강성에 대한 축력의 영향을 나타내는 기하학적 강성행렬이다. 식(3-1)은 K 를 A 로 K_G 를 B 로 치환하면 식(2-1)과 같으므로 2장의 방법을 그대로 적용하여 좌굴하중의 공분산행렬을 계산할 수 있다.

3장에서는 이상의 방법을 기존의 신뢰성 이론에 연결하여 구조물의 좌굴 파괴확률을 구하는 방법을 검토해 보기로 하겠다. 극한상태 방정식은 다음과 같이 정의한다.

$$Z = G(X) = P_{cr}(X) - P \quad (3-2)$$

여기서 P 는 외부하중이며 확률변수로 취급된다.

3-1. PFEM-based MVFOSM

식(3-2)의 극한 상태 방정식을 확률변수 P 및 X 의 평균치에 대해 1차항까지 Taylor 전개하여 선형 근사시키면

$$Z = (\bar{P}_{cr} - P) + \frac{\partial \bar{P}_{cr}}{\partial X} (X - \bar{X}) - (P - \bar{P}) \quad (3-3)$$

이 얻어진다. 따라서 Z 의 평균 $E(Z)$ 와 분산 $Var(Z)$ 및 신뢰성 지수 β 는 다음과 같다.

$$E(Z) = (\bar{P}_{cr} - \bar{P}) \quad (3-4)$$

$$\begin{aligned} Var(Z) &= Var(P_{cr}) + Var(P) \\ &= \left(\frac{\partial \bar{P}_{cr}}{\partial X}\right)^T C_{XX} \left(\frac{\partial \bar{P}_{cr}}{\partial X}\right) + Var(P) \end{aligned} \quad (3-5)$$

$$\beta = \frac{E(Z)}{[Var(Z)]^{1/2}} \quad (3-6)$$

여기서

$$\frac{\partial \bar{P}_{cr}}{\partial X} = \bar{U}^T \left(\frac{\partial \bar{K}}{\partial X} - \bar{P}_{cr} \frac{\partial \bar{K}_G}{\partial X}\right) \bar{U}$$

고유치 문제는 확률변수에 대한 비선형이 매우 크기 때문에 보다 정확한 파괴확률을 구하기 위하여 AFOSM 해석을 수행하는 것이 바람직하다.

3-2. PFEM-based AFOSM

확률 유한요소법을 사용하여 AFOSM에 의해 구조물의 좌굴 파괴확률을 구하는 방법은 다음과 같다. 여기에서는 좌표변환을 하지않고 원래의 좌표계에서 반복계산을 수행하는 Parkinson 방법 [8]을 사용하였다.

- (1) 확률변수 X 의 초기값 지정($X^m = \bar{X}$)
- (2) X^{mCI2} 에서의 함수값 계산(고유치 해석)

$$Z^m = P_{cr}(X^m) - P^m \quad (3-7)$$

- (3) $Z^m < \epsilon$ 이면 go to (8)

- (4) X^m 에서의 G 의 일차 미분 ($\frac{dG}{dX} = G_X$) 계산

- 1) $X = P$ 인 경우

$$G_X = -1 \quad (3-8)$$

- 2) 그 외의 경우

$$G_X = \frac{\partial P_{cr}(X^m)}{\partial X} = [U^T (\frac{\partial K}{\partial X} - P_{cr} \frac{\partial K_G}{\partial X}) U]_{X=X^m} \quad (3-9)$$

(5) κ 의 계산

$$\kappa = \frac{(X^m - \bar{X})^T G_X(X^m) - Z^m}{\{G_X(X^m)\}^T C_{XX} \{G_X(X^m)\}} \quad (3-10)$$

(6) 새로운 iteration point X^{m+1} 의 계산

$$X^{m+1} = \bar{X} + \kappa C_{XX} G_X(X^m) \quad (3-11)$$

(7) $X^m = X^{m+1}$ 로 하여 go to (2)

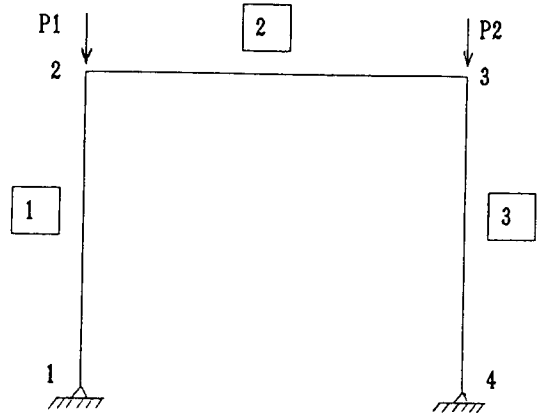
(8) β 의 계산

$$\beta = \frac{(\bar{X} - X^m)^T G_X(X^m)}{[\{G_X(X^m)\}^T C_{XX} \{G_X(X^m)\}]^{1/2}} \quad (3-12)$$

주지의 사실이지만 AFOSM을 사용하면 MVFOSM에 비하여 향상된 결과를 주게 되는 반면 반복계산 알고리즘 속에 포함된 (2)단계에서 계속 고유치 해석을 수행해야 하므로 시간이 많이 소요되는 단점이 있다.

IV. 수치해석 및 고찰

이상의 이론 전개 과정을 실제 구조물에 적용하기 위하여 수치해석 예로서 Fig.1의 문형 frame 구조물이 경계조건으로서 단순지지(S) 및 고정단(F)을 가지는 경우에 대하여 Table 1의 값들을 입력 data로 하였을 때의 좌굴 신뢰성 해석을 수행하여 보았다. 본 연구 결과의 타당성을 검증하기 위하여 Monte Carlo simulation에 의한 해석도 병행하였다. Table 2는 본 논문에 의한 방법과 Monte Carlo simulation으로 구한 좌굴강도(고유치)의 평균치와 표준편차를 계산한 결과인데, 약 5%정도의 오차로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Table 3은 신뢰성 해석 결과인데, 비교목적으로 Curde Monte Carlo simulation의 단점을 보완하여 simulation 횟수를 대폭 줄여서도 좋은 결과를 주는 Importance Sampling method[6]에 의한 해석도 수행하였다. 이 방법은 먼저 AFOSM에 의하여 최종점(most probable failure



P1 = P2 ; Simple : 10 kN (10%)
Fixed : 40 kN (10%)

Fig. 1 Frame I

Table 1. Input Data for Frame I

	I 1(cm ⁴)	I 2	E1(kN/cm ²)	E2	L1(cm)	L2
mean	4.	4.	21000.	21000.	100.	100.
C.O.V.(%)	15.	15.	15.	15.	10.	10.

I3=I1, E3=E1, L3=L1

Table 2. Means & C.O.V.s for Buckling Load of Frame I

method	B.C.	mean(kN)	S.D.(kN)	C.O.V.(%)
PFEM	S	15.342	2.694	17.56
	F	62.535	11.112	17.77
MCM (500)	S	15.351	2.875	18.72
	F	63.181	11.913	18.86

Table 3. Results of Reliability Analysis for Frame I

B.C.		PFEM-based		Monte Carlo Method	
		MVFOSM	AFOSM	Crude(10000)	I.S.(500)
S	beta	1.859	2.128	2.3500e-2	2.1585e-2
	Pf	3.1514e-2	1.6677e-2		
F	beta	1.908	2.199	1.6400e-2	1.5750e-2
	Pf	2.8187e-2	1.3940e-2		

I.S. : Importance Sampling method

point)을 구한뒤, 이점 주변에서 집중적으로 확률 변수를 생산하므로 simulation 횟수를 상당히 줄일 수 있다. 각 방법에 의한 신뢰성 해석 결과들도 큰 오차없이 잘 일치하고 있다. 외부하중에 비해 좌굴하중이 크기 때문에 기존의 확정론적인 설계에서는 좌굴위험성이 없는 것으로 간주하지만 신뢰성 설계의 관점에서는, 가령 단순지지인 경우

Table 4. Sensitivity at Most Probable Failure Point and Probability of Failure by PFEM-based AFOSM

B.C.	random variables		sensitivity		beta & pf
			dG/dX	dG/dY	
S	P	10.965	-1.00000	-.45189	1.859
	I1	3.61	1142.36368	.30974	2.128
	I2	3.75	727.71180	.19731	2.128
	E1	18928.62	.00022	.30974	2.128
	E2	19665.51	.00014	.19731	
	L1	108.50	-88.48386	-.39985	
	L2	102.57	-26.57574	-.12009	1.6677e-2
F	P	43.928	-1.00000	-.44563	1.908
	I1	3.58	4799.59450	.32082	2.198
	I2	3.77	2540.48379	.16982	2.199
	E1	18781.22	.00091	.32082	2.199
	E2	19814.86	.00048	.16982	
	L1	108.80	-359.67584	-.40070	
	L2	102.31	-93.72308	-.10441	1.3940e-2

약 2% 정도의 좌굴위험성이 내재하고 있다는 결과가 얻어진다.

Table 4는 AFOSM에서 신뢰성 지수의 수렴과정과 최종점에서의 민감도 해석 결과인데, 이러한 민감도 해석 결과로부터 각각의 확률변수가 구조물의 좌굴 파괴확률에 미치는 영향을 파악할 수 있다. 여기서 dG/dX 는 확정론적인 방법에 의한 최적 설계 기법에서 많이 사용되는 단순 설계 민감도(design sensitivity)로서 확률변수의 변화에 따른 상대함수의 변화량을 의미하는데, 이 값이 크더라도 그 변수의 분산이 작으면 파괴확률에 대한 영향이 상대적으로 작아지므로 dG/dX 의 값만으로는 변수의 파괴확률에 대한 영향을 파악할 수 없다. 다만 같은 분산을 가진 변수들이 파괴확률에 미치는 상대적 영향을 파악하는데 사용될 수 있다. dG/dY 는 설계 민감도에 확률변수들의 분산 특성을 고려한 표준화된 확률 민감도인데, 결국 이 값이 클수록 좌굴 파괴확률에 대한 영향이 크다는 것을 의미한다.

dG/dY 는 변수의 평균과 분산이 정해진 상태에서의 변수들의 중요도를 나타내는 감도인데, 설계시 어떤 변수의 분산을 감소시키는 것이 구조물의 안전성을 향상시키는데 도움이 되는지를 알기 위해서는 분산의 변화정도에 따른 파괴확률의 변화정도를 파악하는 것이 필요하다. Fig.2, 3은 각

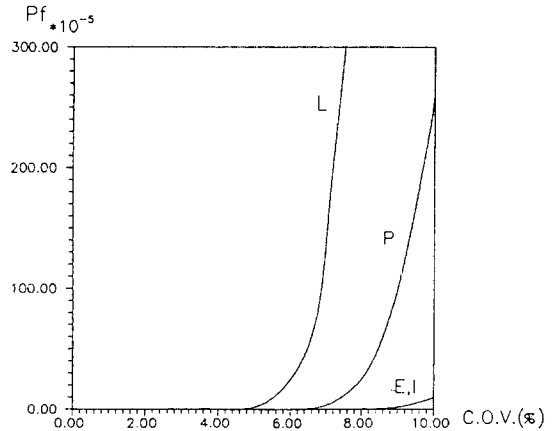


Fig. 2 Trend curves of Probability of Buckling Failure by the Variation of C.O.V. of Each Random Variable (Simple Support)

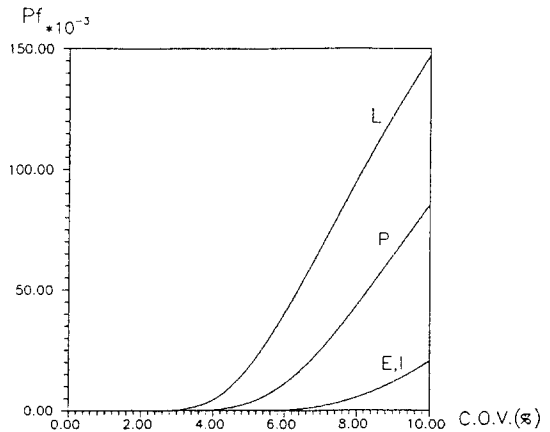


Fig. 3 Trend curves of Probability of Buckling Failure by the Variation of C.O.V. of Each Random Variable (Fixed)

확률변수들의 C.O.V.의 변화에 따른 구조물의 좌굴 파괴확률의 변화 경향을 살펴보기 위하여 모든 확률변수의 분산을 0으로 둔 상태에서 각각의 확률변수들의 C.O.V.를 0%에서 10%까지 변화시키면서 구한 파괴확률의 변화를 도시한 것이다. 확률 민감도 값은 각 변수들이 큰 차이를 보이지 않지만 Fig.2, 3에서는 $L > P > E, I$ 의 순으로 영향도가 크게 나타나므로 설계의 관점에서, 같은 조건 하에서 구조물의 좌굴 안전성을 향상시키고자 할 때는 부재 길이에 대한 품질 관리를 잘하여 분산을 감소시키는 것이 가장 효과적이라

Table 5. Input Data for Frame II

	I1(cm ⁴)	I2	E1(kN/cm ²)	E2	Sy(kN/cm ²)	P(kN)
mean	6.	3.	21000.	21000.	20.	120.
C.O.V.(%)	15.	15.	15.	15.	10.	10.

Case 1: L1=L2=100cm, Case 2: L1=L2=110cm,
Sy: Yield Stress

Table 6. Comparison of the Different Failure Criteria

	beta & pf	beta & pf by YIELDING			
	by BUCKLING	Node 1	2	3	4
Case 1	2.243	4.151	3.929	2.010	2.040
	1.2459e-2	1.6539e-5	4.2613e-5	2.2233e-2	2.0687e-2
Case 2	1.191	4.151	3.950	2.044	2.072
	1.1686e-1	1.6571e-5	3.9151e-5	2.0476e-2	1.9152e-2

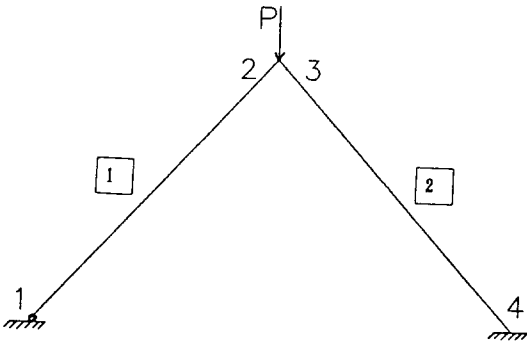


Fig. 4 Frame II

는 것을 알 수 있다.

구조물의 파괴양식은 다양하지만 그 중에서도 소성파괴와 좌굴파괴가 중요한 요인이 되고 있다. 따라서 어떤 구조물이 소성 혹은 좌굴 중 어떤 양식으로 파괴될 확률이 높은가를 알기 위해서는 소성 신뢰성 해석 및 좌굴 신뢰성 해석을 수행해야 한다. 따라서 본 연구에서는 Fig.4의 구조물에 대하여 Table 5의 입력 data에 따라 요소 신뢰성 관점에서의 소성 신뢰성 해석과 좌굴 신뢰성 해석을 수행하여 그 결과(Table 6)를 비교하여 보았다. 부재 길이가 100cm인 Case 1에서는 좌굴파괴확률보다 절점 3 및 4에서 항복이 발생할 확률이 더 높은 것으로 나타나지만 길이를 10% 증가시킨 Case 2에서는 오히려 좌굴 파괴확률이 훨씬 큰 것으로 나타났다. 따라서 신뢰성에 기초한 설계를 수행하는 경우 좌굴 신뢰성에 대한 고려가 필요하다.

V. 결론

이상의 연구 및 계산 결과로 부터 다음과 같은 결론을 도출하였다.

(1) 확률 유한요소법을 사용하여 단 한번의 고유치 해석을 수행함으로써 고유치의 평균은 물론 구조물에 내재된 불확실성을 고려한 고유치의 분산특성과 이 분산특성에 대한 각 확률변수들의 영향도를 알 수 있는 확률 민감도를 구할 수 있게 되었다.

(2) 확률 유한요소법을 기존의 신뢰성 이론과 연결함으로써 복잡한 구조물의 좌굴 파괴확률을 보다 효율적으로 계산할 수 있게 되었다. 이 경우에도 고유치 해석은 단 1회만 수행하며(MVFO-SM), 보다 정확한 ASOFM을 채택하는 경우에도 보통 10번 이내에서 반복 계산이 끝난다.

(3) 확률 유한요소법에 의한 좌굴 신뢰성해석 방법이 정립됨으로서 신뢰성에 기초한 최적설계를 수행하는 경우, 시스템 파괴확률로서 소성파괴확률과 더불어 좌굴파괴확률의 고려가 가능해졌다.

참고 문헌

- [1] Cornell, C.A., *A probability-Based Structural Code*, Journal of the American Concrete Institute, Vol.66, No.12, pp.974-985, December 1969.
- [2] Mansour, A.E., *Probabilistic Design Concepts in Ship Structural safety and Reliability.*, Presented at the Annual Meeting, New York, N.Y., November 16 and 17, 1972, of The Society of Naval Architects and Marine Engineers.
- [3] Lee, J.S., *Reliability Analysis of Continuous Structural Systems*, Ph.D. Thesis, Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, University of Glasgow, 1989.
- [4] Nagagili, S., Hisada T., 확률 유한요소법 입문., 배풍관.
- [5] 양영순, 김지호, 평면 FRAME 구조물의 확률 유한요소 해석, 한국 전산구조 공학회, 제2권, 제4호, pp.89-98, 1989. 12.
- [6] 김수현, Monte Carlo 법을 이용한 파괴확률 계산

법 연구, 서울 대학교 석사학위 논문, 1989.

- [7] Adelman, H.M. and Haftka, R.T., Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems, Journal of AIAA, Vol.24, No.5, pp.823-832, 1986. 5.

- [8] Chen, W.F. and Lui, E.M., Structural Stability,

ELSEVIER, 1987.

- [9] Parkinson, D.B., *Computer Solution for the Reliability Index*, Eng. Struct., Vol.2, pp.57-62, 1980.

(접수일자 : 1991. 2. 21)