

이 논문은 1990년도 한국과학재단지원 신진기초연구비에 의하여 연구되었음

질량변화를 갖는 유연한 미사일의 동적 안정성에 관한 연구

류 봉 조*

A Study on the Dynamic Stability of a Flexible Missile with Mass Variation

Bong-Jo, Ryu*

Key Words : 동적안정성 (Dynamic Stability), 유한요소법 (Finite Element Method), 티모셴코 보 (Timoshenko Beam), 국부좌표 (Local Coordinate), 종동력 (Follower Force), 질량 변화 (Mass Variation), 전단변형 (Shear Deformation), 회전관성 (Rotary Inertia)

Abstract

The dynamic stability problem of nonconservative system is one of the important problems. In this study, flexible missile with mass variation is regarded as a free Timoshenko beam subjected to a controlled follower force. The stability was studied numerically through the finite element method. Through the study, the obtained results are as follows :

[1] Without force direction control

- (1) In the case of no mass reduction, the existence of concentrated mass increases critical follower force.
- (2) Mass reduction rate of the beam slightly effects on the change of critical follower force.

[2] With force direction control

- (1) Shear deformation parameter S contributes insignificantly to the force at instability when $S \geq 10^4$.
- (2) With mass variation, increase of concentrated mass increases critical follower force at instability.
- (3) The type of primary instability is determined by the sensor location.

* 대전공업대학 기계설계학과

1. 서 론

지난 수십년간 발전되어져 온 탄성계의 안정성 문제는 공학과 현대과학의 진보와 발전에 중요한 역할을 해왔으며, 특히 컴퓨터산업의 발전과 더불어 공학 및 우주항공공학, 군사분야등에서 활발히 응용되어지고 있다. 탄성 안정성 문제의 공학분야의 초기응용은 19세기 후반에 들어 철재 교량이 건설됨에 따라 축방향 압축을 받는 부재의 좌굴에 대한 탄성 안정 문제가 대두되면서, 이런 구조물파괴의 주된 원인은 부재에 가해지는 응력이 재료의 항복 응력 보다 크기 때문이 아니라 탄성 안정성 결여에 있다는 많은 경험을 토대로 밝혀지면서 부터이다. 이러한 초기 공학적 구조물, 산업및 수송분야에 대한 탄성 안정성 문제는 점차 확대되어 항공공학적 계의 위치제어, 인공위성과 우주선의 비행조절, 항공기와 헬리콥터등의 승차 쾌적감을 높이는데 이용되어져 왔다.

유연한 탄성계 문제중의 하나인 미사일이나 로켓등과 같이 축 방향으로 힘을 받으면서 비행하는 비행체 문제는 Beal⁽¹⁾에 의하여 연구되어졌는데 그는 유연한 탄성 미사일을 종동력(follow force)을 받는 양단이 자유인 보로 단순화하여 종동력이 시간에 대하여 일정한 경우와 주기적으로 변하는 경우에 대하여 Galerkin 방법을 사용하여 연구하였다.

또한 Cox^(2,3)는 탄성 미사일을 조화력을 받는 집중계(lumped system)로 가정하여 미사일의 횡진동에 대하여 연구하였고, Matsumoto와 Mote⁽⁴⁾는 종동력의 방향이 제어되는 경우에 있어 시간지연(time-delay)이 보의 안정성에 미치는 영향에 대하여 유한요소법을 사용하여 해석하였다. 그후 Wu^(5,6,7)는 방향이 제어되는 종동력을 받는 자유 균일 보의 안정성에 대하여 자유수반 변분원리(unconstrained adjoint variational principle)를 이용한 유한요소법을 이용하여 동적 안정성을 연구하였다. 그러나 Wu의 연구에서는 방향제어와 집중질량이 동시에 존재하는 실제 예는 보이지 않았으므로 박영필과 김찬수⁽⁸⁾는 집중질량과 방향제어가 동시에 존재하는 자유보가 안정할 수 있는 최대 추진력에 관하여 연구하였고 공기

저항 등의 마찰력을 받는 미사일 모델에 대한 연구⁽⁹⁾까지도 확장되어졌다.

위의 보 모델은 비교적 가늘고 긴 보 모델의 해석에 적합한 Euler-Bernoulli 보 모델들에 대한 연구들로서 짧고 굵은 보 모델에서 무시할 수 없는 전단변형이나 회전관성의 효과를 고려하지 않은 보 모델들에 대한 연구들이며 미사일이나 로켓등의 시간에 따른 질량변화를 고려하지 않았으므로 실제, 연료의 연소에 따른 추진작용으로 인해 질량변화가 큰 경우에는 시간에 따른 질량변화를 고려해 주어야 한다.

Grubin⁽¹⁰⁾은 미사일을 시간에 따라 질량이 변하는 강체로 가정하여 선형운동량(linear momentum)과 각 운동량(angular momentum)에 대한 식을 유도 해석하였고, 그 후 Meirovitch^(11,12,13)는 추진작용으로 인해 시간에 따라 질량이 변하는 고체연료 로켓을 내부 압력에 의해 인장력을 받는 탄성 자유보로 간주하여 해석하였다. Gopak⁽¹⁴⁾은 시간에 따라 질량이 변하는 탄성 미사일이 끝단에서 추진력을 받는 경우에 대한 안정성을 연구하였으며, 박영필과 류봉조^(15,16)는 집중질량과 방향제어가 동시에 존재하는 경우, 보의 전단변형과 회전관성의 효과를 고려하여 양단자유 Timoshenko 보로 이상화한 모델에 확장된 Hamilton 원리를 이용한 유한요소법을 사용하여 동적 안정성을 연구하였다.

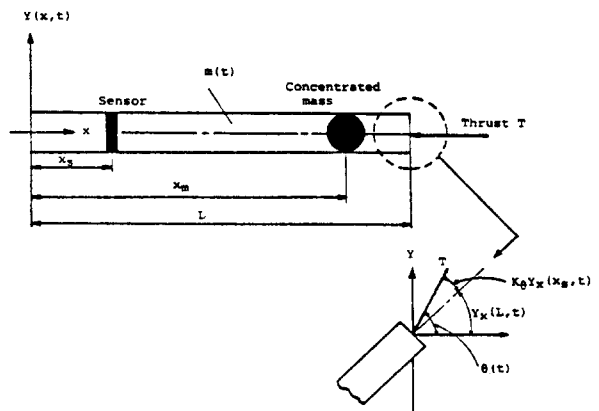


Fig. 1 Simplified beam model of missile with mass variation.

본 연구에서는 유연한 미사일 모델을, 기계장치부를 집중질량으로 간주하고 보의 전단변형과 회전관성의 효과를 고려한 방향이 제어되는 양단 자유 Timoshenko 보 모델로 이상화하여 시간의 변화에 따른 보의 질량 변화의 효과가 계의 동적 안정성에 미치는 영향을 연구하였다.

2. 이론 해석

2.1 단순화된 모델과 좌표계

본 연구에서 사용한 보 모델은 방향이 제어되는 추진력을 받으며 중심 축상에 집중질량을 갖고 시간에 따라 질량변화의 효과를 고려한 모델로써 그림 1과 같다.

본 연구에서는 미사일의 단순화된 모델에 대해 다음과 같은 가정을 하였다.

1. 회전관성과 전단변형의 효과를 고려한 Timoshenko 보 모델로 간주한다.
2. 보의 질량은 시간에 따라 변화되고 보의 강성은 시간에 대하여 일정하다고 본다.
3. 불완전한 연소나 온도 및 압력분포에 의한 영향은 아주 작아 미사일 자체의 동특성에 거의 영향을 미치지 않는다고 간주한다.
4. 축 방향으로의 변위는 횡 방향으로의 진동에 비해 작다고 보아 고려하지 않는다.
5. 추진력의 방향은 보의 한 부분에서의 회전과 선형 관계를 갖는 방향 제어 센서에 의하여 제어되며 시간 지연(time-delay)에 의한 영향은 무시한다.

그림 1에서 비교란 축인 x축은 교란이 일어나지 않은 상태에서의 보의 중심 축이며, 횡 방향 변위는 보내의 임의의 위치 x에 대하여 $Y(x, t)$ 로 표시된다. 또한 보의 전체 길이는 L, 단면적은 A, 보의 밀도는 $\rho_0(t)$, 강성 계수 EI, 집중 질량의 크기는 M이며, x_0 과 x_s 는 각각 집중 질량과 센서의 위치를 나타낸다.

교란된 상태에서의 보의 거동을 나타내는 그림 1 보 모델의 임의의 위치 x에 있어서의 축 방향의 힘

$T^*(x, t)$ 는 다음과 같다.

$$T^*(x, t) = \left\{ \frac{\rho_0(1-c^*)Ax + MH(x-x_m)}{\rho_0(1-c^*)AL + M} \right\} T \quad (1)$$

여기서, 변수 t는 시간변수를 나타내며 H(x)는 단위 계단 함수(unit-step function), T는 일정크기의 종동력, ρ_0 는 연료 소모가 되지않은 초기 상태의 보의 밀도이며 C^* 는 연료의 감소에 따른 보의 밀도 변화를 로써 다음과 같이 일정하다고 간주한다.

$$c^* = \frac{\dot{\rho}_0(t) \cdot t}{\rho_0(t)} \quad (2)$$

종동력 T의 방향은 보의 한쪽 자유단에서의 경사각 $Y_x(L, t)$ 와 센서에 의해 제어되어지는 각 $Y_x(x_s, t)$ 에 의해 다음과 같이 제어 되어진다.

$$\theta(t) = K_\theta Y_x(x_s, t) + Y_x(L, t) \quad (3)$$

2.2 운동 방정식

시간에 따라 변하는 미사일 모델의 운동에 대한 운동 방정식을 얻기위해 확장된 Hamilton 원리를 사용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T_k - V_p + W_c) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (4)$$

여기서, T_k 는 계의 전 운동 에너지(total kinetic energy), V_p 는 전탄성 포텐셜 에너지(total elastic potential energy), W_c 와 δW_{nc} 는 각각 종동력에 의한 보존 일(conservative work done)과 비 보존 가상 일(non-conservative virtual work)을 나타낸다.

본 연구의 비 보존 탄성계에서는

$$T_k = \frac{1}{2} \int_0^L \{ \rho_0(1-c^*)AY_t^2 + \rho_0(1-c^*)I\phi_x^2 \} dx + \frac{1}{2} MY_t^2(x_m, t) + \frac{1}{2} J\phi_x^2(x_m, t) \quad (5)$$

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^L \{ (EI\phi_x^2) + KAG(Y_x - \phi)^2 \} dx \quad (6)$$

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^L T^* Y_x^2 dx \quad (7)$$

$$\delta W_{nc} = -\theta(t) T \delta Y(L, t) \quad (8)$$

이다.

여기서, K 는 보의 단면 형상에 따른 전단 계수 (shear coefficient) 이고 G 는 전단 강성계수 (shear modulus) 이며, J 는 극관성 모우멘트 (polar moment of inertia), I 는 단면의 2차 모우멘트 (area moment of inertia), ϕ 는 순수 굽힘에 의한 경사각을 나타낸다.

식 (5)-(8)의 변분 식을 유도하여 식 (4)에 대입하고 정리하면 식 (9)를 얻는다.

$$\begin{aligned} & \int_0^L \{ \rho_0 (1-c^*) A Y_{tt} \delta Y + \rho_0 (1-c^*) I \phi_{tt} \delta \phi + \\ & + EI \phi_x \delta \phi_x + KAG (Y_x - \phi) \delta (Y_x - \phi) - T^* Y_x \delta Y_x \} dx \\ & + M Y_{tt} (x_m, t) \delta Y (x_m, t) + J \phi_{tt} (x_m, t) \delta (x_m, t) \\ & - T \{ K_\theta Y_x (x_s, t) + Y_x (L, t) \} \delta Y (L, t) = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

2.3 유한요소법의 적용

본 연구의 수치해를 구하기 위해 보 모델을 N 개의 유한 요소로 나눈 그림은 그림 2와 같으며, 집중질량이 있는 요소는 c , 센서가 존재하는 요소는 d 요소가 된다.

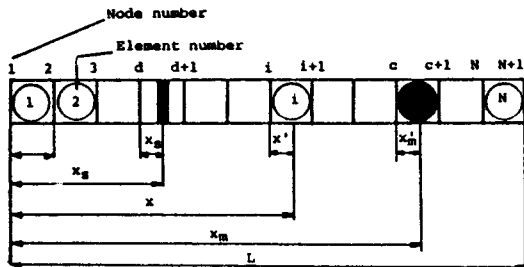


Fig. 2 Finite element model of beam.

그림 2에 나타난 바와 같이 다음과 같은 국부좌표

$$x' = x - (i-1)l \quad (10)$$

$$x_s' = x_s - (d-1)l \quad (11)$$

$$x_m' = x_m - (c-1)l \quad (12)$$

를 도입하고 아래의 무차원화된 좌표들

$$\zeta = x'/l, \zeta_m = x_m'/l, \zeta_s = x_s'/l, \eta = Y/l \quad (13)$$

을 사용하면 식 (9)는 식 (14)와 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left[\rho_0 (1-c^*) A l^3 \eta_{tt}^{(i)} \delta \eta^{(i)} \right. \\ & + \rho_0 (1-c^*) I l \phi_{tt}^{(i)} \delta \phi^{(i)} + \frac{EI}{l} \phi_e^{(i)} \delta \phi_e^{(i)} \\ & + KAG l (\eta_e^{(i)} - \phi^{(i)}) \delta (\eta_e^{(i)} - \phi^{(i)}) \\ & - \frac{\rho_0 (1-c^*) A ((i-1+\zeta) l^2 T)}{\rho_0 (1-c^*) AL + M} \eta_e^{(i)} \delta \eta_e^{(i)} \left. \right] d\zeta \\ & - \int_0^1 \frac{T l M H(\zeta - \zeta_m)}{\rho_0 (1-c^*) AL + M} \eta_e^{(c)} \delta \eta_e^{(c)} d\zeta \\ & - \sum_{i=c+1}^N \int_0^1 \frac{M l T}{\rho_0 (1-c^*) AL + M} \eta_e^{(i)} \delta \eta_e^{(i)} d\zeta \\ & + M l^2 \eta_{tt} (\zeta_m, t)^{(c)} \delta \eta (\zeta_m, t)^{(c)} + J \phi_{tt} (\zeta_m, t)^{(c)} \\ & \delta \phi (\zeta_m, t)^{(c)} + T l \{ K_\theta \eta_e (\zeta_s, t)^{(d)} \\ & + \eta_e (1, t)^{(N)} \} \delta \eta (1, t)^{(N)} \quad (14) \end{aligned}$$

변수 분리를 이용하여 $\eta(\zeta, t) = \eta(\zeta) e^{st}$, $\phi(\zeta) e^{st}$ 라 가정하고 식 (14)에 대입하면

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left[\rho_0 (1-c^*) A l^3 \beta^2 \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} \right. \\ & + \rho_0 (1-c^*) I l \beta^2 \phi^{(i)} \delta \phi^{(i)} + \frac{EI}{l} \phi_e^{(i)} \delta \phi_e^{(i)} \\ & + KAG l (\eta_e^{(i)} - \phi^{(i)}) \delta (\eta_e^{(i)} - \phi^{(i)}) \\ & - \frac{\rho_0 (1-c^*) A ((i-1+\zeta) l^2 T)}{\rho_0 (1-c^*) AL + M} \eta_e^{(i)} \delta \eta_e^{(i)} \left. \right] d\zeta \\ & - \int_0^1 \frac{M l H(\zeta - \zeta_m) T}{\rho_0 (1-c^*) AL + M} \eta_e^{(c)} \delta \eta_e^{(c)} d\zeta \\ & - \sum_{i=c+1}^N \int_0^1 \frac{M l T}{\rho_0 (1-c^*) AL + M} \eta_e^{(i)} \delta \eta_e^{(i)} d\zeta \\ & + M l^2 \beta^2 \eta (\zeta_m, t)^{(c)} \delta \eta (\zeta_m, t)^{(c)} + J \beta^2 \phi (\zeta_m, t)^{(c)} \delta \phi (\zeta_m, t)^{(c)} \\ & + T l \{ K_\theta \eta_e (\zeta_s, t)^{(d)} + \eta_e (1, t)^{(N)} \} \delta \eta (1, t)^{(N)} = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

이 된다.

식 (15)의 양변에 l/EI 를 곱하고 요소 길이가 l 인 N 개의 요소이므로 $L = lN$ 을 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left\{ \frac{\rho_0 (1-c^*) AL^4 \beta^2}{EIN^4} \eta^{i0} \delta \eta^{i0} \right. \\
 & + \frac{\rho_0 (1-c^*) I \beta^2 L^2}{EIN^2} \phi^i \delta \phi^i + \phi_e^{i0} \delta \phi_e^{i0} \\
 & + \frac{KAGL^2}{EIN^2} (\eta_e^{i0} - \phi^i) \delta (\eta_e^{i0} - \phi^i) \\
 & - \left. \frac{\rho_0 (1-c^*) A (i-1+\zeta) L^3 T}{(\rho_0 (1-c^*) AL+M) N^3 FI} \eta_e^{i0} \delta \eta_e^{i0} \right\} d\zeta \\
 & - \int_0^1 \frac{ML^2 H(\zeta - \zeta_m) T}{EI(\rho_0 (1-c^*) AL+M) N^2} \eta_e^{i0} \delta \eta_e^{i0} d\zeta \\
 & - \sum_{i=c+1}^N \int_0^1 \frac{ML^2 T}{EI(\rho_0 (1-c^*) AL+M) N^2} \eta_e^{i0} \delta \eta_e^{i0} d\zeta \\
 & + \frac{ML^3 \beta^2}{EIN^3} \eta(\zeta_m)^{(c)} \delta \eta(\zeta_m)^{(c)} + \frac{J \beta^2 L}{EIN} \phi(\zeta_m)^{(c)} \\
 & \delta \phi(\zeta_m)^{(c)} + \frac{TL^2}{EIN^2} \{K_\theta \eta_e(\zeta_s)^{(a)} + \eta_e(1)^{(N)}\} \\
 & \delta \eta(1)^{(N)} = 0 \tag{16}
 \end{aligned}$$

계산상의 편리함을 위해 다음과 같은 무차원화된 매개변수들

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{TL^2}{EI}, \quad S = \frac{KAGL^2}{EI}, \quad \alpha = \frac{M}{\rho_0 AL}, \quad \Omega = \frac{J}{\rho_0 AL^3} \\
 \nu &= \frac{x_m}{L}, \quad \gamma = \frac{x_s}{L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{\rho_0 AL^4 \beta^2}{EI}}, \quad H = \frac{I}{AL^2} \tag{17}
 \end{aligned}$$

을 사용하면 식 (16)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left\{ \frac{\omega^2 (1-c^*)}{N^4} \eta^{i0} \delta \eta^{i0} + \right. \\
 & + \frac{\omega^2 H (1-c^*)}{N^2} \phi^i \delta \phi^i + \phi_e^{i0} \delta \phi_e^{i0} \\
 & + \frac{S}{N^2} (\eta_e^{i0} - \phi^i) \delta (\eta_e^{i0} - \phi^i) \\
 & - \left. \frac{(1-c^*) (i-1+\zeta) Q}{((1-c^*) + \alpha) N^3} \eta_e^{i0} \delta \eta_e^{i0} \right\} d\zeta \\
 & - \frac{\alpha Q}{((1-c^*) + \alpha) N^2} \left\{ \int_0^1 \eta_e^{i0} H(\zeta - \zeta_m) \delta \eta_e^{i0} d\zeta \right. \\
 & + \left. \sum_{i=c+1}^N \int_0^1 \eta_e^{i0} \delta \eta_e^{i0} d\zeta \right\} + \frac{\omega^2 \alpha}{N^3} \eta(\zeta_m)^{(c)} \delta \eta(\zeta_m)^{(c)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\Omega \omega^2}{N} \phi(\zeta_m)^{(c)} \delta \phi(\zeta_m)^{(c)} + \frac{Q}{N^2} \{K_\theta \eta_e(\zeta_s)^{(a)} \\
 & + \eta_e(1)^{(N)}\} \delta \eta(1)^{(N)} = 0 \tag{18}
 \end{aligned}$$

여기서, Q는 무차원화된 중동력, S는 무차원화된 보의 전단 변형 매개변수(nondimensional shear deformation parameter), α 와 Ω 는 각각 무차원화된 집중질량과 보의 초기 질량과의 비 및 집중질량 회전관성 매개변수(nondimensional concentrated mass rotary inertia parameter)를 나타내며, ν 와 γ 는 무차원화된 집중 질량의 위치와 센서의 위치를 나타낸다.

또한 H는 무차원화된 보의 회전관성 매개변수(nondimensional rotary inertia parameter)를 나타낸다.

보의 각 요소의 거동을 양쪽 node에서의 무차원화된 보의 중심선의 변위, 보의 중심선의 기울기, 굽힘 기울기(bending slope)와 굽힘모우멘트(bending moment)로 나타내면 field variable η 와 ϕ 는 적합 조건을 만족시키는 근사해의 행렬 형태로 표시된다.

$$\eta(\zeta)^{(a)} = \underline{a}^T(\zeta) O^{(a)} \tag{19}$$

$$\phi(\zeta)^{(a)} = \underline{a}^T(\zeta) \Phi^{(a)} \tag{20}$$

여기서, 일반화된 좌표 벡터(generalized coordinate vector) O와 Φ 는

$$O^{(a)} = \{\eta_i, \eta_i', \eta_{i+1}, \eta_{i+1}'\}^T \tag{21}$$

$$\Phi^{(a)} = \{\phi_i, \phi_i', \phi_{i+1}, \phi_{i+1}'\}^T \tag{22}$$

이며, 형상 함수 벡터(shape function vector) $a(\zeta)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 a(\zeta) &= \{1-3\zeta^2+2\zeta^3, \zeta-2\zeta^2+\zeta^3, 3\zeta^2-2\zeta^3, \\
 & -\zeta^2+\zeta^3\}^T \tag{23}
 \end{aligned}$$

식 (19)-(20)을 식 (18)에 대입하고 정리하면,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \left[\frac{\omega^2}{N^4} (1-c^*) \delta O^{n0} [A] O^{i0} + \right. \\
 & + \delta \Phi^{n0} \frac{\omega^2 H (1-c^*)}{N^2} [A] \Phi^{i0} + \delta \Phi^{n0} [B] \Phi^{i0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{\delta \underline{O}^{(i)}, \delta \underline{\Phi}^{(i)}\} \frac{S}{N^2} \begin{bmatrix} [B] & [R_1] \\ [R_2] & [A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{O}^{(i)} \\ \underline{\Phi}^{(i)} \end{Bmatrix} \\
& - \delta \underline{O}^{T(i)} \frac{Q(1-c^*)((i-1)[B]+[C])}{((1-c^*)+\alpha)N^2} \underline{O}^{(i)} \\
& + \{\delta \underline{O}^{T(c)}, \delta \underline{\Phi}^{T(c)}\} \frac{\alpha \omega^2}{N^3} [D] \underline{O}^{(c)} + \delta \underline{\Phi}^{T(c)} \frac{\Omega \omega^2}{N} [D] \underline{\Phi}^{(c)} \\
& - \frac{\alpha Q}{((1-c^*)+\alpha)N^2} \{\delta \underline{O}^{(c)} [E] \underline{O}^{(c)} + \\
& + \sum_{i=c+1}^N \delta \underline{O}^{T(i)} [B] \underline{O}^{(i)} \\
& + \delta \underline{O}^{T(N)} \frac{Q}{N^2} \{K_0 [P_1] \underline{O}^{(a)} + [P_2] \underline{O}^{(N)}\} = 0 \quad (24)
\end{aligned}$$

이 된다. 여기서,

$$\begin{aligned}
[A] &= \int_0^1 \underline{a}(\zeta) \underline{a}^T(\zeta) d\zeta \quad [B] = \int_0^1 \underline{a}_e(\zeta) \underline{a}_e^T(\zeta) d\zeta \\
[C] &= \int_0^1 \zeta \underline{a}_e(\zeta) \underline{a}_e^T(\zeta) d\zeta \quad [R_1] = - \int_0^1 \underline{a}_e(\zeta) \underline{a}^T(\zeta) d\zeta \\
[R_2] &= - \int_0^1 \underline{a}(\zeta) \underline{a}_e^T(\zeta) d\zeta \quad [D] = \underline{a}(\zeta_m) \underline{a}^T(\zeta_m) \\
[E] &= \int_0^1 \underline{a}_e(\zeta) \underline{a}_e^T(\zeta) H(\zeta - \zeta_m) d\zeta \\
[P_1] &= \underline{a}(1) \underline{a}_e^T(\zeta_s) \quad [P_2] = \underline{a}(1) \underline{a}_e^T(1) \quad (25)
\end{aligned}$$

행렬들로서 각각 4×4 행렬들이다.

식 (24)에서 표시되어진 일반화된 좌표 벡터 \underline{Q} 와 $\underline{\Phi}$ 를

$$\underline{Z}^T = \{\underline{O}^T, \underline{\Phi}^T\} \quad (26)$$

라 놓고 식 (26)을 식 (24)에 대입하면 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left[\delta \underline{Z}^{T(i)} \left\{ \frac{\omega^2(1-c^*)}{N} [M_0] \frac{1}{N} [K_0] - \frac{Q}{N^2} [K_1] \right\} \underline{Z}^{(i)} \right. \\
& \left. + \delta \underline{Z}^{T(c)} \left\{ \frac{\omega^2}{N} [M_1] - \frac{Q}{N^2} [K_2] \right\} \underline{Z}^{(c)} \right. \\
& \left. - \sum_{i=c+1}^N \delta \underline{Z}^{T(i)} \frac{Q}{N^2} [K_3] \underline{Z}^{(i)} \right. \\
& \left. + \delta \underline{Z}^{T(N)} \frac{Q}{N^2} \{K_0 [K_4] \underline{Z}^{(a)} + [K_5] \underline{Z}^{(N)}\} = 0 \quad (27)
\end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
[M_0] &= \begin{bmatrix} \frac{[A](1-c^*)}{N^3} & 0 \\ 0 & \frac{H}{N}[A](1-c^*) \end{bmatrix} \quad [M_1] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{N^2}[D] & 0 \\ 0 & \Omega[D] \end{bmatrix} \\
[K_0] &= \begin{bmatrix} \frac{S}{N}[B] & \frac{S}{N}[R_1] \\ \frac{S}{N}[R_2] & \frac{S}{N}[A]+N[B] \end{bmatrix} \\
[K_1] &= \begin{bmatrix} \frac{(1-c^*)\{(i-1)[B]+[C]\}}{((1-c^*)+\alpha)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[K_2] &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha[E]}{(1-c^*)+\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[K_3] &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha[B]}{(1-c^*)+\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[K_4] &= \begin{bmatrix} [P_1] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [K_5] = \begin{bmatrix} [P_2] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)
\end{aligned}$$

들로서 8×8 요소 행렬들이며, $[M_0]$ 는 질량 요소 행렬, $[M_1]$ 은 집중 질량으로 인한 요소 행렬, $[K_0]$ 는 강성 요소 행렬, $[K_1]$, $[K_2]$, $[K_3]$ 는 집중 질량과 보존력에 의한 요소 행렬, $[K_4]$, $[K_5]$ 는 집중 질량과 비 보존력에 의한 요소 행렬이다. 식 (27)에서 $\delta \underline{Z}^T$ 는 임의의 변분이므로 N 개의 요소에 대하여 조합하면 다음과 같은 조합 행렬(global matrix)을 얻게 된다.

$$[\lambda[M] + [K]] \{Z\} = \{0\} \quad (29)$$

여기서, $\lambda = \omega^2$ 이고, $[M]$ 과 $[K]$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
[M] &= [M_0] + [M_1], \quad [K] = [K_0] - \frac{Q}{N^2} [K_1] \\
& - \frac{Q}{N} \{[K_2] + [K_3] - [K_4] - [K_5]\} \quad (30)
\end{aligned}$$

식 (29)의 고유치(eigenvalue) λ 는 식 (18)의 관계식과 $\eta(\zeta, t) = \eta(\zeta) e^{\beta t}$ 및 $\phi(\zeta, t) = \phi(\zeta) e^{\beta t}$ 로부터 β 와 관계가 있고 β 의 거동이 λ 의 거동이므로 β 의 거동에 따라 안정성을 판별한다.

2.4 안정성 해석

식 (29)는 종동력의 모든 값에 대하여 계의 특성을 나타내는 λ 값의 변화에 의존하므로 안정성을 Liapunov stability criteria에 의하여 다음과 같이 판별한다.

1. 안정 영역(stable region)

종동력의 크기가 작은 경우에 있어, 고유치의 값이 음의 실수를 나타낼 때 안정하다.

2. 불안정 영역(unstable region)

불안정은 다음과 같이 2개의 형태로 분류된다.

가. 발산형 불안정(divergence type instability)

종동력의 크기가 임계 종동력 값보다 커서, 고유치 λ 가 양의 실수 값을 나타낼 때 일어난다. (그림 3-(a))

나. 플러터형 불안정(flutter type instability)

종동력의 크기가 임계 종동력 값보다 클 때, 고유치 λ 가 복소근을 갖게 되면 일어난다. (그림 3-(b))

계의 안정 불안정에 대한 그림은 그림 3에 나타나 있다.

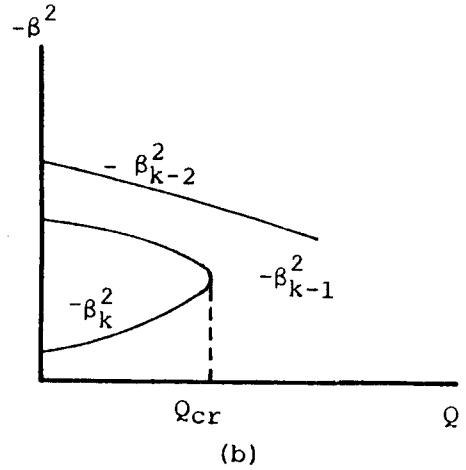
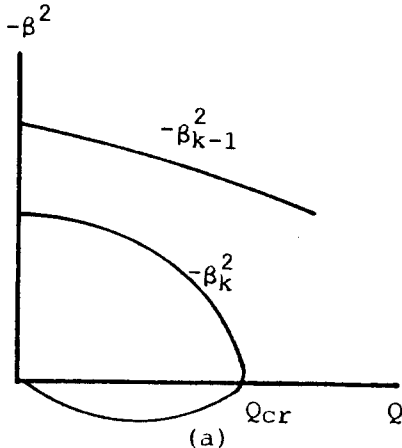


Fig. 3 Determination of Stability of nonconservative system

(a) Divergence type (b)Flutter type

3. 수치결과 및 해석

본 연구에서는 질량변화를 갖는 미사일의 동적안정성에 대한 수치결과를 해석하기 위하여 보의 요소의 수를 8개로 나누었으며, 시간의 변화에 따른 연료의 감소를 보의 밀도 변화율의 감소로 나타냈으며, 수치해를 구하기 위해 사용된 컴퓨터는 대우 PRO-3000 퍼스날 컴퓨터이다.

본 연구에서는 비교적 세장비가 작은 Timoshenko 보 모델에 대한 해석으로써 이론적으로는 보의 전단 변형 매개변수 S 가 $S \rightarrow \infty$ 로, 회전 관성 매개변수 R 이 $R \rightarrow 0$ 로 근접하면 Euler Bernoulli 보의 모델이 된다. 따라서 S 값이 $S = 10^4$ 이상에서는 S 값이 임계 종동력 값의 변화에 미치는 영향이 거의 없으므로 $S = 10^4$ 을 택해 Timoshenko 보의 영향을 고려하였고, R 값은 실제 미사일 모델에서는 $R = 10^{-3}$ 이하가 되므로 $R = 10^{-4}$ 을 택하여 질량변화에 따른 계의 동적안정성을 연구하였으며, 다음과 같이 종동력의 방향이 제어되는 경우와 제어되지 않는 두 가지 경우에 대하여 해석하였다.

3.1 종동력의 방향이 제어되지 않는 경우

종동력의 방향이 제어되지 않고 균일한 단면을 갖는 양단자유 Timoshenko 보는 두개의 영(zero)의 값을 갖는 고유치(1, 2차)를 갖게되어 이들은 각각 강체의 선형 운동(rigid body translation)과 강체의 회전운동(rigid body rotation)에 관계되어진다. 그러나, 계의 안정성을 해석하는데는 강체성 불안정 현상은 미소변형이론에 의해 안정한 것으로 간주하여 고려하지 않는다.

Fig. 4는 종동력의 방향이 제어 되지않고 시간에 따른 보의 밀도 변화가 없는 경우, 집중질량이 존재하는 $\alpha=0.0$ 인 경우와 집중질량의 크기가 $\alpha=0.2$ 인 두 경우에 대한 임계 종동력 값을 나타낸 그림으로 집중질량이 존재하는 쪽($Q_{CR}\pi^2=16.3$)이 그렇지 않은 쪽($Q_{CR}\pi^2=10.4$)보다 56.7%의 증가를 가져왔다.

Fig. 5는 집중질량이 없는 경우, 보의 밀도 변화에 따른 임계종동력 값을 나타낸 그림으로 시간의 경과에 따른 임계종동력 값의 변화는 거의 없으며, $C^*=0.0$ 일때와 $C^*=0.04$ 일때 $Q_{CR}/\pi^2=10.4$ 로써 같은 값을 나타낸다.

Fig. 6은 집중질량 회전관성 매개변수의 변화에 따른 임계종동력 값의 변화를 나타내는 그림이다. 집중 질량 회전관성 매개변수 $\Omega \leq 10^{-3}$ 에서는 Ω 가 임계종동력 값의 크기 변화에 미치는 영향은 거의 없음을 나타내고, $\Omega=0.0$ 일때는 $\Omega=0.001$ 과 비교해서 임계종동력 값이 2.8% 감소함을 보여준다.

3.2 종동력의 방향이 제어되는 경우

종동력의 방향이 제어됨으로 인하여 영의 값을 갖는 고유치(1차)가 하나 나타나게 되며 2개의 강체운동에 관계되는 고유치 중 회전강체 운동을 제어하게 되어 이에 의한 불안정을 제거할 수 있다.

Fig. 7은 방향제어 센서의 위치가 보의 중간에 위치할때, 보의 전단변형 매개변수 S 값의 변화에 따른 임계종동력 값을 나타내고, 또한 집중질량 α 의 크기에 따른 임계종동력 값을 나타낸다. 이 경우 집중질량이 존재하든 않하든 관계없이 전단변형 매개변수 S 값이 증가함에 따라 임계 종동력 값은 증가한다. 그러

나 $S=10^4$ 이상에서는 전단변형 매개변수 S 값의 변화가 임계 종동력 값의 변화에는 거의 영향을 미치지 않는다.

Fig. 8은 시간에 따른 보의 질량감소 $C^*=0.02$ 인 경우, 집중질량의 크기 α 의 변화에 따른 임계 종동력 값의 크기를 나타내는 그림으로 집중질량의 크기가 증가할수록 임계 종동력 값은 증가하며, $\alpha=0.5$ 인 경우가 집중질량이 없는 경우보다 임계종동력 값이 20.67% 증가함을 알 수 있다.

Fig. 9는 전단변형 매개변수의 변화에 따라 시간에 따른 보의 질량감소 변화의 임계 종동력 값을 나타낸 그림으로 질량감소가 없는 경우($C^*=0.0$)와 질량감소가 있는 경우($C^*=0.02, 0.04$)에 있어 질량감소가 임계 종동력 값의 변화에 미치는 영향은 크지 않으며, 오히려 전단변형 매개변수의 변화에 영향을 받을 수 있다. 그러나 $S=10^4$ 이상에서는 시간에 따른 보의 질량감소가 있는 경우든 아니든, 전단변형

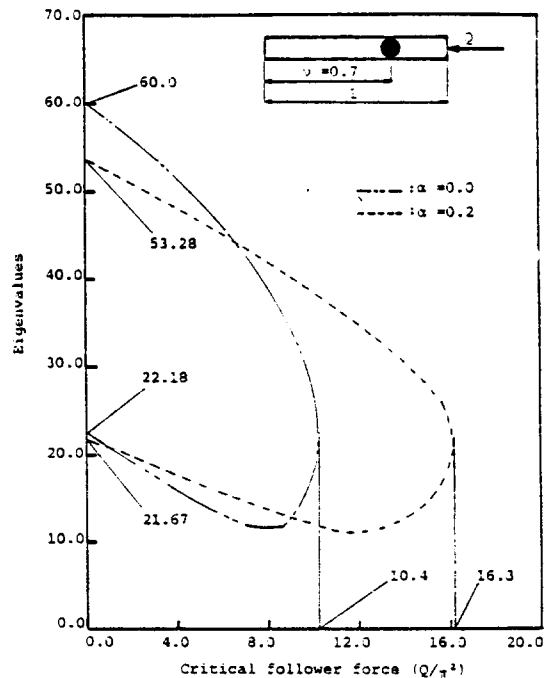


Fig. 4 Critical follower force at instability of the beam without force direction control. ($S=10^4, H=10^4, \Omega=0.0, K_r=0.0, C^*=0.0$)

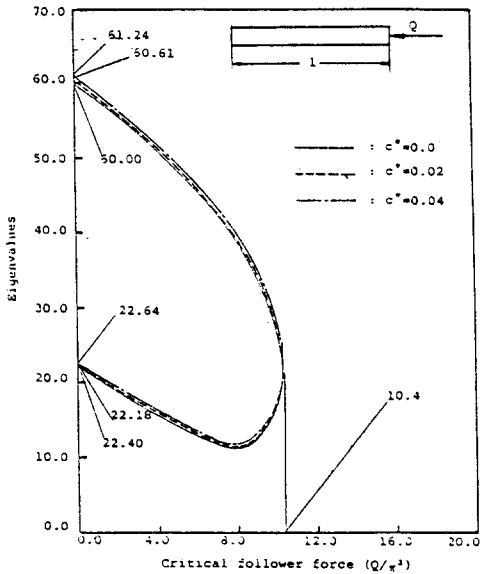


Fig. 5 Eigenvalues and critical follower force according to the mass variation of beam without force direction control.
 ($S=10^4$, $H=10^{-4}$, $\Omega=0.0$, $K_r=0.0$, $\alpha=0.0$)

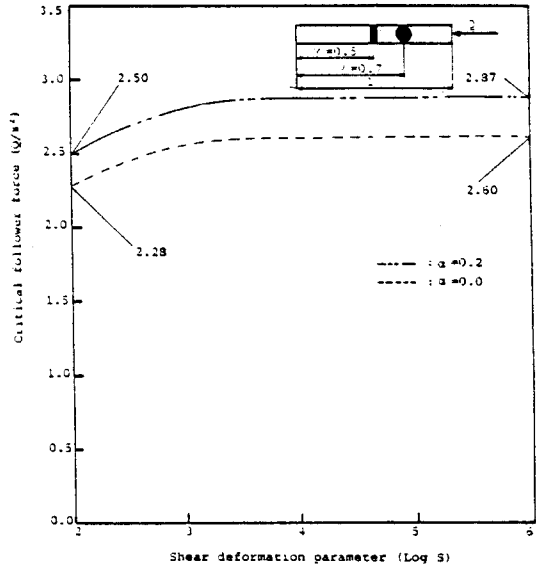


Fig. 7 Critical follower force according to the variation of shear deformation parameter of beam with force direction control. ($H=10^{-4}$, $\Omega=0.0$, $K_r=1.0$, $C^*=0.0$)

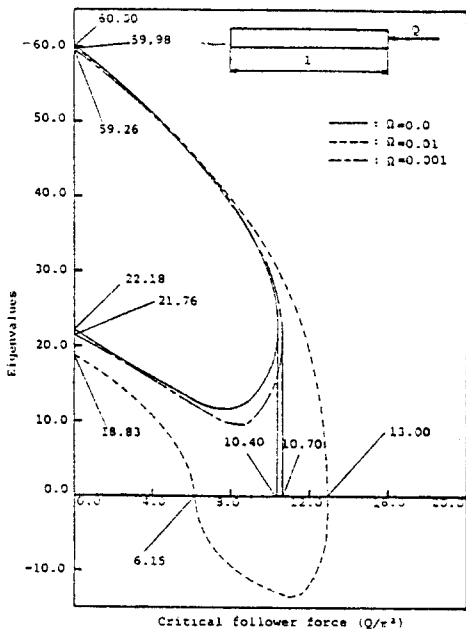


Fig. 6 Critical follower force depended upon concentrated mass rotary inertia parameter of beam without force direction control.
 ($S=10^4$, $H=10^{-4}$, $\alpha=0.0$, $K_r=0.0$, $C^*=0.0$)

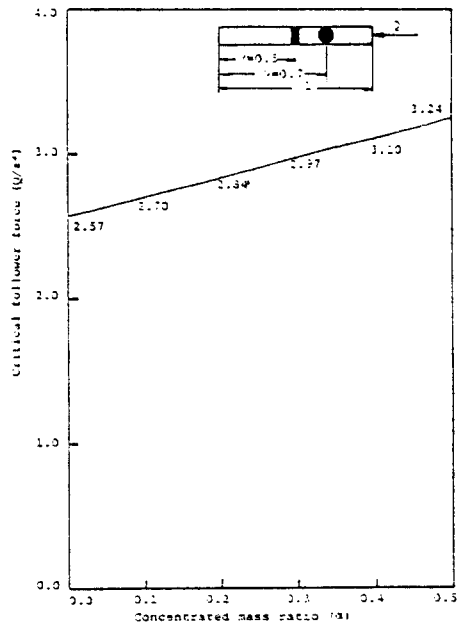


Fig. 8 Variation of critical follower force at instability depended upon concentrated mass of beam with force direction control.
 ($S=10^4$, $H=10^{-4}$, $\Omega=0.0$, $K_r=1.0$, $C^*=0.02$)

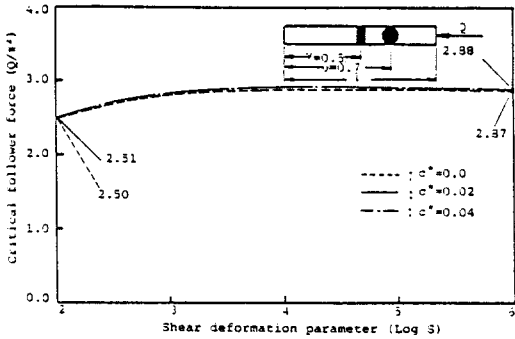


Fig. 9 Variation of critical follower force depended upon shear deformation parameter of the beam with force direction control. ($H=10^4$, $\Omega=0.0$, $K_s=1.0$, $\alpha=0.2$)

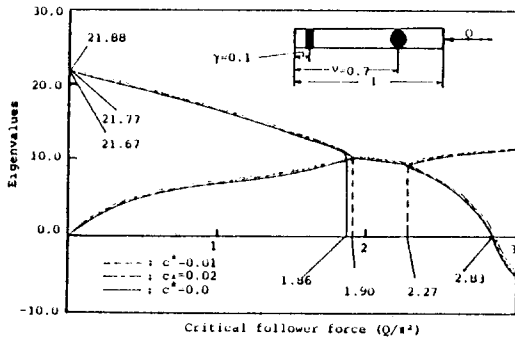


Fig. 10 Critical follower force according to sensor location of the beam with force direction control. ($S=10^4$, $H=10^4$, $\Omega=0.0$, $K_s=1.0$, $\alpha=0.2$)

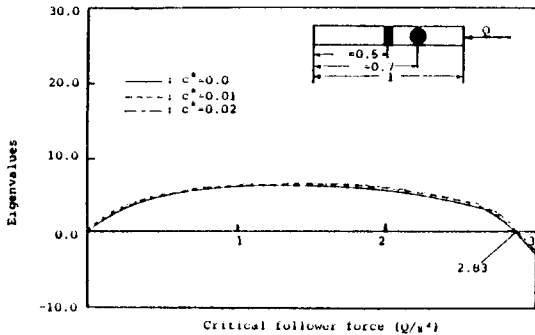


Fig. 11 Critical follower force according to sensor location of the beam with force direction control. ($S=10^4$, $H=10^4$, $\alpha=0.0$, $\Omega=0.0$, $K_s=1.0$)

매개변수 값이 임계 종동력 값의 변화에 영향을 거의 미치지 않는다.

Fig. 4~Fig. 11까지의 그림에 나타난 결과들을 Table 1과 Table 2에 나타내었고, 이들은 각종 파라미터 값의 변화에 따른 임계 종동력 값의 변화를 보여 준다.

Table 1. Critical follower force depended upon paranetes (uncontrolled case)

	Critical follower force						
	Mass variation (C^*)			Magnitude of concentrated mass (α)	Concentrated mass rotary inertia (Ω)		
	0.0	0.02	0.04		0.0	0.001	0.01
Without concentrated mass	10.4	10.4	10.4	10.4	10.4	10.7	6.15
With concentrated mass	10.4			16.3			

Table 2. Critical follower force depended upon paranetes (controlled case)

	Critical follower force						
	Shear deformation parameter (S)	Magnitude of concentrated mass (α)			Sensor location (γ) (Fixed mass variation) ($C^*=0.01$)		
		10^2	10^4	0.0	0.3	0.5	0.1
Without concentrated mass	2.28	2.60	2.57				
With concentrated mass	2.50	2.87		2.97	3.24	1.90 (Flutter type)	2.83 (Divergence type)

4. 결 론

본 연구는 시간에 따라 질량이 변하는 탄성 미사일을 양단이 자유인 Timoshenko 보로 이상화하여 시간에 따른 연료의 감소등으로 인한 보의 질량감소가 존재하는 경우, 보의 동적 안정성에 대하여 컴퓨터 시뮬레이션 한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

4.1 종동력의 방향이 제어되지 않는 경우

1. 시간에 따른 보의 질량감소가 없는 경우, 집중질량이 존재하는 쪽이 없는 쪽 보다 임계 종동력 값이 증가한다.
2. 시간의 변화에 따른 보의 질량감소는 임계 종동력 값에 큰 영향을 미치지 않는다.

4.2 종동력의 방향이 제어되는 경우

1. 보의 전단변형 매개변수 S 값이 $S \geq 10^4$ 에서는 전

- 단변형 매개변수가 임계 종동력 값의 변화에 거의 영향을 미치지 않는다.
2. 시간에 따른 질량감소가 있는 경우도, 집중질량이 커짐에 따라 임계종동력 값은 증가한다.
 3. 방향제어 센서의 위치 변화에 따라 불안정을 유발하는 형태는 다르며 센서가 보의 앞부분 ($\gamma=0.1$)에 위치할때가 보의 중간부분 ($\gamma=0.5$)에 위치할 때 보다 임계종동력 값은 감소한다.

참고문헌

1. T. R. Beal, "Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts", AIAA J., Vol. 3, No. 3, Mar., PP. 486-494, 1965.
2. H. L. Cox, "Vibration of Missiles", Aircraft Engineering, 33, Jan., PP. 2-7, 1961.
3. H. L. Cox, "Vibration of Missiles", Aircraft Engineering, 33, Feb., PP. 48-55, 1961.
4. G. Y. Matsumoto and C. D. Mote, Jr., "Time Delay Instabilities in Large Order Systems with Controlled Follower Force", J. of Dynamic System Measurement and Control, Trans. of ASME, Vol. 94, PP. 330-334, 1974.
5. J. J. Wu, "On the Stability of a Free-Free Beam under Axial Thrust Subjected to Directional Control", Journal of Sound and Vibration, Vol. 43, No. 1, PP. 45-52, 1975.
6. J. J. Wu, "Missile Stability Using Finite Elements on Unconstrained Variational Approach, AIAA Journal, Vol. 14, No. 3, PP. 313-319, 1976.
7. J. J. Wu, "On Missile Stability", Journal of Sound and Vibration, Vol. 49, No. 1, PP. 141-147, 1976.
8. 박영필, 김찬수, "유한요소법에 의한 미사일의 안정성 연구", 대한기계학회 논문집, 제5권, PP. 293-302, 1981.
9. 박영필, "분포 종동력을 받는 자유보의 동적 안정성에 관한 연구", 연세대학교 산업기술연구소 논문집, 제18집, 제1권(24), PP. 107-111, 1986.
10. C. Grubin, "Mechanics of Variable Mass System", J. Franklin Inst., 276, Oct., PP. 305-312, 1963.
11. L. Meirovitch and D. A. Wesley, "On the Dynamic Characteristics of a Variable Mass Slender Elastic Body under High Accelerations", AIAA J., Aug., PP. 1439-1477, 1967.
12. L. Meirovitch and D. A. Wesley, "On the Dynamic Characteristics of a Variable Mass Slender Elastic Body under High Accelerations", NASA CR-713, Feb., 1967.
13. L. Meirovitch, "General Motion of a Variable Mass Flexible Rocket with Internal Flow", J. Spacecraft, Vol. 7, No. 2, Feb., PP. 186-195, 1970.
14. K. N. Gopak, "Dynamic Stability of a Free Rod of Variable Mass", Translated from Prikladnaya Mekhanika, Vol. 12, No. 4, Apr., PP. 131-135, 1970.
15. Y. P. Park, and B. J. Ryu, "Effect of a Concentrated Mass on the Stability of a Free Timoshenko Beam under a Controlled Follower Force, KSME/JSME Vibration Conference '87, PP. 309-318, 1987.
16. 박영필, 류봉조, 지태한, "주기적인 종동력을 받는 양단자유 Timoshenko 보의 파라미터 불안정", 대한기계학회 춘계학술대회 초록집, PP. 77-83, 1988.