

# 공작기계 주축계의 진동특성해석에 관한 연구

김 석일\*,   곽 병만\*\*,   이 후상\*,   정 재호\*

## Dynamic Characteristics Analysis of a Machine-Tool Spindle System

Seok Il Kim\*,   Byung Man Kwak\*\*,   Hu Sang Lee\* and Jae Ho Chung\*

**Key Words :** 진동특성해석(Dynamic Characteristics Analysis), 공작기계(Machine-Tool), 주축계(Spindle System), 복소모드해석(Complex Modal Analysis), 모드매개변수(Modal Parameter), 전달함수(Compliance), 전달행렬(Transfer Matrix), Timoshenko보이론(Timoshenko Beam Theory)

### Abstract

In this study, to analyse the dynamic characteristics of a machine-tool spindle system, the spindle is mathematically represented by a Timoshenko beam including the internal damping of beam material, and each bearing by four bearing coefficients; stiffness and damping coefficients in moment and radial directions. And the dynamic compliance of the system is calculated by introducing the transfer matrix method, and the complex modal analysis method has been applied for the modal parameter identification. The influence of the bearing coefficients, material damping factor and bearing span on the dynamic characteristics of the system is parametrically examined.

\* 한국기계연구소 공작기계연구실

\*\*한국과학기술원 기계공학과

## 1. 서 론

공작기계의 절삭성능을 저하시키는 채터진동의 원인으로서는 회전요소의 불균형이나, 밀링공구와 같은 다절삭날공구(multiteeth cutter)에 의한 절삭충격으로 부터 야기되는 강제진동과, 기계구조 및 절삭조건과 관련된 절삭상태의 불안정성에 의한 자려진동이 있다. 일반적으로 강제진동은 원인규명을 통해서 방지 가능하기 때문에, 절삭에서 문제가 되는 것은 공작기계의 고유진동수와 밀접한 관련이 있는 자려진동이다. 따라서 공작기계의 절삭성능을 개선하기 위한 노력의 일환으로 공작기계의 진동특성에 큰 영향을 주는 주축계의 진동특성과 관련된 짧은 연구들<sup>(1-3)</sup>이 수행되어 왔다.

본 연구에서는 주축계의 진동특성을 이론적으로 해석하기 위해서 세장비가 비교적 작은 주축은 Timoshenko보이론<sup>(4)</sup>으로, 그리고 유한폭을 가진 베어링은 반경방향의 특성 외에도 모멘트방향의 특성을 가지고 있는 것으로 모델화하였다. 주축계의 진동특성에 대한 해석수단으로는 보의 진동특성해석에서 그 유용성이 입증된 전달행렬법<sup>(5)</sup>을 사용하였다. 그리고 주축계의 진동특성에 대한 해석결과들을 이용하여 베어링의 특성, 주축재료의 내부감쇠율 및 베어링의 간격이 주축계의 모드매개변수들인 고유진동수와 감쇠비에 미치는 영향을 고찰하였다. 특히 모드매개변수들을 규명하기 위해서 복소모드해석법<sup>(6)</sup>이 도입되었다.

## 2. 복소모드해석법

모드해석에서 문제가 되는 것은 감쇠현상에 대한 정식화이다. 실제적으로 감쇠현상은 복잡한 기구(mechanism)에 의해서 일어나며, 특성에 따라서 점성감쇠(viscous damping), 구조감쇠(structural damping), 마찰감쇠(Coulomb damping) 등으로 분류되고 있다. 특히 점성감쇠는 기계구조물의 감쇠현상을 가장 잘 근사화시키며, 비례점성감쇠와 일반점성감쇠로 구분되고 있다.

비례점성감쇠에서는 감쇠가 질량과 강성에 비례한

다고 가정하기 때문에, 강성이 낮은 요소는 감쇠도 작아야 한다는 조건을 가지고 있다. 따라서 결합부와 같이 국부적으로 감쇠는 크지만, 강성은 낮은 요소가 존재하는 경우에는 비례점성감쇠의 적용이 부적합하게 된다. 결과적으로 결합부의 일종인 베어링을 사용하는 공작기계 주축계에 대한 모드해석은 일반점성감쇠에 기초를 둘 필요가 있다. 또한 기계구조물은 무한개의 자유도와 함께, 0에서 무한대까지의 주파수특성영역을 가지고 있다. 그러나 진동특성에 대한 측정은 검출기(sensor)와 해석기(analyser)의 제약 때문에 제한된 주파수영역에서만 가능하다. 따라서 측정가능한 주파수영역보다 낮은 영역과 높은 영역에 존재하는 진동모드들의 영향도 고려해야 보다 정량적인 모드해석이 될 수 있다.

본 연구에서는 이러한 문제들을 해결하기 위하여 일반점성감쇠계에 대한 복소모드해석법을 사용하였다. 복소모드해석법에서의 전달함수  $G(\omega)$ 는 아래와 같이 주어진다.

$$G(\omega) = \frac{-1}{(M_r + jM_i)\omega^2} + \sum_{k=1}^{\bar{n}} \left[ \frac{U_k + jV_k}{j(\omega - \omega_{dk}) - \sigma_k} + \frac{U_k - jV_k}{j(\omega + \omega_{dk}) - \sigma_k} \right] + (S_r + jS_i) \quad (1)$$

여기서  $j$ 는 단위허수,  $\bar{n}$ 는 측정주파수영역내에 존재하는 진동모드수이다. 그리고  $\omega_{dk}$ 와  $\sigma_k$ 는  $k$ 번째 진동모드의 감쇠고유진동수(damped natural frequency)와 지수감쇠율(exponential decay rate)로 진동계의 고유특성들이며,  $U_k$ 와  $V_k$ 는  $k$ 번째 진동모드의 진폭매개변수(amplitude parameter)들로 가진점과 응답측정점의 함수들이다. 또한  $M_r$ 과  $M_i$ 는 측정주파수영역 아래에 존재하는 진동모드들의 영향을 고려하기 위한 보정질량(effective mass)의 실수부와 허수부, 그리고  $S_r$ 과  $S_i$ 는 측정주파수영역 위에 존재하는 진동모드들의 영향을 고려하기 위한 보정유연성(residual flexibility)의 실수부와 허수부

를 각각 의미한다.

실험 또는 이론으로 부터 얻은 전달함수를 식(1)과 같이 표현하기 위해서는  $4\bar{n}+4$ 개의 미지수  $\omega_{dk}, \sigma_k, U_k, V_k(k=1, 2, \dots, \bar{n})$ 와  $M_r, M_i, S_r, S_i$ 의 값들을 결정해야 한다. 그 미지수들을  $\alpha_s(s=1, 2, \dots, 4\bar{n}+4)$ , 그리고 초기값과 증분을 각각  $\alpha_s^*$ 와  $\Delta\alpha_s$ 라고 하면,  $G(\omega)$ 의 실수부  $G_r$ 과 허수부  $G_i$ 에 대한 Taylor급수전개로 부터  $\Delta\alpha_s$ 의 1차항까지만 고려한 식들은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$G_r = G_r^* + \sum_{s=1}^{4\bar{n}+4} \frac{\partial G_r^*}{\partial \alpha_s} \Delta\alpha_s \quad (2)$$

$$G_i = G_i^* + \sum_{s=1}^{4\bar{n}+4} \frac{\partial G_i^*}{\partial \alpha_s} \Delta\alpha_s \quad (3)$$

여기서  $G(\omega) = G_r + jG_i$ 이고,  $G^*(\omega)$ 는  $\alpha^*$ 에서의  $G(\omega)$ 를 의미한다.

또한  $\bar{m}$ 개의 진동수  $\omega_p(p=1, 2, \dots, \bar{m})$ 에서 실험 또는 이론으로 부터 얻은 전달함수의 실수부와 허수부를  $\bar{G}_{r,p}$ 와  $\bar{G}_{i,p}$ 로, 그리고 식(1)로 표현되는 전달함수의 실수부와 허수부를  $G_{r,p}$ 와  $G_{i,p}$ 로 놓으면, 전달함수들간의 자승오차  $\bar{E}$ 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{E} = \sum_{p=1}^{\bar{m}} [(\bar{G}_{r,p} - G_{r,p})^2 + (\bar{G}_{i,p} - G_{i,p})^2] \quad (4)$$

$\bar{E}$ 를 최소화하기 위한 조건들로 부터 아래와 같은  $4\bar{n}+4$ 개의 식들을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \Delta\alpha_s} = -2 \sum_{p=1}^{\bar{m}} \left[ (\bar{G}_{r,p} - G_{r,p}) \frac{\partial G_{r,p}}{\partial \Delta\alpha_s} + (\bar{G}_{i,p} - G_{i,p}) \frac{\partial G_{i,p}}{\partial \Delta\alpha_s} \right] = 0, \quad s = 1, 2, \dots, 4\bar{n}+4 \quad (5)$$

식(2)와 (3)을 식(5)에 대입해서 정리하면, 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_{p=1}^{\bar{m}} \left[ (\bar{C}_{r,p} - D_{r,p}^T \bar{X}) \frac{\partial G_{r,p}^*}{\partial \alpha_s} + (\bar{C}_{i,p} - D_{i,p}^T \bar{X}) \frac{\partial G_{i,p}^*}{\partial \alpha_s} \right] = 0, \quad s = 1, 2, \dots, 4\bar{n}+4 \quad (6)$$

$$\text{여기서 } \bar{X} = [\Delta\alpha_1 \quad \Delta\alpha_2 \quad \dots \quad \Delta\alpha_{4\bar{n}+4}]^T,$$

$$\bar{C}_{r,p} = \bar{G}_{r,p} - G_{r,p}^*, \quad \bar{C}_{i,p} = \bar{G}_{i,p} - G_{i,p}^*,$$

$$D_{r,p} = \left[ \frac{\partial G_{r,p}^*}{\partial \alpha_1} \quad \frac{\partial G_{r,p}^*}{\partial \alpha_2} \quad \dots \quad \frac{\partial G_{r,p}^*}{\partial \alpha_{4\bar{n}+4}} \right]^T,$$

$$D_{i,p} = \left[ \frac{\partial G_{i,p}^*}{\partial \alpha_1} \quad \frac{\partial G_{i,p}^*}{\partial \alpha_2} \quad \dots \quad \frac{\partial G_{i,p}^*}{\partial \alpha_{4\bar{n}+4}} \right]^T \text{ 이다.}$$

$\bar{m} \geq 4\bar{n}+4$ 라면, 모드매개변수의 증분  $\bar{X}$ 는 식(6)으로 부터 다음과 같이 결정된다.

$$\bar{X} = (D_r^T D_r + D_i^T D_i)^{-1} (D_r^T \bar{C}_r + D_i^T \bar{C}_i) \quad (7)$$

$$\text{여기서 } \bar{C}_r = [\bar{C}_{r,1} \quad \bar{C}_{r,2} \quad \dots \quad \bar{C}_{r,\bar{m}}]^T,$$

$$\bar{C}_i = [\bar{C}_{i,1} \quad \bar{C}_{i,2} \quad \dots \quad \bar{C}_{i,\bar{m}}]^T,$$

$$D_r = [D_{r,1} \quad D_{r,2} \quad \dots \quad D_{r,\bar{m}}]^T,$$

$$D_i = [D_{i,1} \quad D_{i,2} \quad \dots \quad D_{i,\bar{m}}]^T \text{ 이다.}$$

따라서 새로운 모드매개변수들은 아래의 관계식에 의해서 얻어진다.

$$\alpha_s = \alpha_s^* + \Delta\alpha_s, \quad s = 1, 2, \dots, 4\bar{n}+4 \quad (8)$$

결과적으로 식(8)에서 얻은 새로운 모드매개변수들을 식(7)의 초기값들로 하는 계산과정을 충분값들이 충분히 작아질 때까지 반복함으로써 모든 모드매개변수들을 결정할 수 있다.

### 3. 진동특성해석

#### 3.1 주축의 수직적 모델

공작기계의 주축은 Fig. 1에서와 같이 일정단면을 가진 다수의 주축요소들이 조합된 형태로 볼 수 있기 때문에, 주축의 수학적 모델은 일정단면보에 대한 Timoshenko보이론을 이용해서 정립할 수 있다.

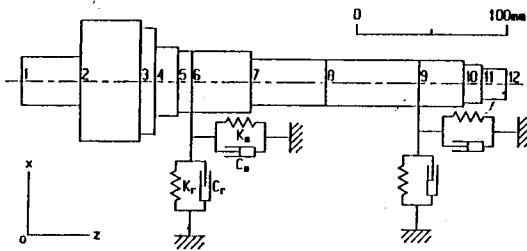


Fig. 1 Model of spindle-bearing system

진동주파수가  $\omega$ 인 정상상태에서는 회전관성과 전단변형의 효과를 고려한 주축요소의 운동방정식들이 아래와 같이 주어진다.

$$-\rho A \omega^2 x = \frac{dQ}{dz} \quad (9)$$

$$-\rho I \omega^2 \varphi = Q + \frac{dM}{dz} \quad (10)$$

여기서  $A$ 와  $I$ 는 주축요소의 단면적과 단면관성모멘트, 그리고  $\rho$ 는 주축재료의 밀도이다.  $z$ 는 전단 중심축을,  $x$ 와  $\varphi$ 는 변위와 굽힘모멘트에 의한 기울기를 각각 의미한다.

또한 주축재료의 내부감쇠율을 고려하면, 주축요소에서의 굽힘모멘트  $M$ 과 전단력  $Q$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$M = E^* I \frac{d\varphi}{dz} \quad (11)$$

$$Q = \kappa G^* A \left( \frac{dx}{dz} - \varphi \right) \quad (12)$$

여기서 복소탄성계수  $E^*$ 와 복소전단계수  $G^*$ 에 대한 내부감쇠율들이  $\delta_E$ 와  $\delta_G$ 인 경우에는  $E^* = E(1 + j\delta_E)$ ,  $G^* = G(1 + j\delta_G)$ 이다. 그리고  $\kappa$ 는 주축요소의 단면형상과 관련된 Timoshenko전단상수<sup>(7)</sup>를 의미하며, Poisson비가  $\nu$ 이고, 외경  $D_o$ 에 대한 내경  $D_i$ 의 비가  $\gamma$ 인 환형단면에 대해서는 아래와 같이 주어진다.

$$\kappa = \frac{6(1+\nu)(1+\gamma^2)^2}{(7+6\nu)(1+\gamma^2)^2 + (20+12\nu)\gamma^2}$$

식(9), (10), (11), 그리고 (12)로부터 변위  $x$ 에 대한 미분방정식을 식(13)과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 x}{d\xi^4} + (\eta + \tau) \frac{d^2 x}{d\xi^2} - (\beta^4 - \eta\tau) x = 0 \quad (13)$$

여기서  $L$ 은 주축요소의 길이를 의미하며,  $\xi = \frac{z}{L}$ ,

$$\eta = \frac{\rho L^2 \omega^2}{\kappa G^*}, \quad \tau = \frac{\rho L^2 \omega^2}{E^*}, \quad \beta^4 = \frac{\rho A L^4 \omega^2}{E^* I} \quad \text{이다.}$$

식(13)의 일반해는 아래와 같이 주어진다.

$$x(\xi) = A_1 \cosh(\lambda_1 \xi) + A_2 \sinh(\lambda_1 \xi) + A_3 \cos(\lambda_2 \xi) + A_4 \sin(\lambda_2 \xi) \quad (14)$$

여기서  $A_1, A_2, A_3$ 와  $A_4$ 는 상계수들이고,

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \frac{1}{4}(\eta - \tau)^2} \pm \frac{1}{2}(\eta + \tau)} \quad \text{이다.}$$

따라서 식(14)를 식(9), (10), (11), 그리고 (12)에 대입하면, 상태벡터  $\mathbf{B}(\xi) = [x(\xi) \quad \varphi(\xi) \quad M$

(ξ) Q(ξ)<sup>T</sup>와 계수벡터 A=[A<sub>1</sub> A<sub>2</sub> A<sub>3</sub> A<sub>4</sub>]<sup>T</sup>의 관계가 아래와 같이 얻어진다.

$$B(\xi) = P(\xi) A \quad (15)$$

식(15)에서의 P(ξ)는 다음과 같이 주어지는 4×4 행렬이다.

$$P(\xi) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & & \\ \frac{(\eta+\lambda_1^2)}{\lambda_1 L} C_2 & \frac{(\eta+\lambda_1^2)}{\lambda_1 L} C_1 & & \\ E^* I \frac{(\eta+\lambda_1^2)}{L^2} C_1 & E^* I \frac{(\eta+\lambda_1^2)}{L^2} C_2 & & \\ -E^* I \frac{\beta^4}{\lambda_1 L^3} C_2 & -E^* I \frac{\beta^4}{\lambda_1 L^3} C_1 & & \\ & & C_3 & C_4 \\ \frac{(\eta-\lambda_2^2)}{\lambda_2 L} C_4 & -\frac{(\eta-\lambda_2^2)}{\lambda_2 L} C_3 & & \\ E^* I \frac{(\eta-\lambda_2^2)}{L^2} C_3 & E^* I \frac{(\eta-\lambda_2^2)}{L^2} C_4 & & \\ -E^* I \frac{\beta^4}{\lambda_2 L^3} C_4 & E^* I \frac{\beta^4}{\lambda_2 L^3} C_3 & & \end{bmatrix}$$

여기서 C<sub>1</sub>=cosh(λ<sub>1</sub>ξ), C<sub>2</sub>=sinh(λ<sub>1</sub>ξ), C<sub>3</sub>=cos(λ<sub>2</sub>ξ), C<sub>4</sub>=sin(λ<sub>2</sub>ξ)이다.

결과적으로 i-1번째 주축요소의 양쪽경계인 i-1번째 점과 i번째 점에 대한 상태벡터들간의 관계는 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$B_i = P_{i-1}(1) P_{i-1}^{-1}(0) B_{i-1} = T_{i-1} B_{i-1} \quad (16)$$

식(16)에서의 T는 일정단면의 주축요소에 대한 전달행렬로서 다음과 같이 표현된다.

$$T = \begin{bmatrix} D_0 - \eta D_2 & L(D_1 - (\eta + \tau) D_3) & & \\ \frac{\beta^4}{L} D_3 & D_0 - \tau D_2 & & \\ \frac{\beta^4 E^* I}{L^2} D_2 & \frac{E^* I}{L} (-\tau D_1 + (\beta^4 + \tau^2) D_3) & & \\ \frac{\beta^4 E^* I}{L^3} (-D_1 + \eta D_3) & \frac{-\beta^4 E^* I}{L^2} D_2 & & \\ & \frac{L^2}{E^* I} D_2 & \frac{L^3}{\beta^4 E^* I} (\eta D_1 - (\beta^4 + \eta^2) D_3) & \\ \frac{L}{E^* I} (D_1 - \tau D_3) & \frac{-L^2}{E^* I} D_2 & & \\ & D_0 - \tau D_2 & L(-D_1 + (\eta + \tau) D_3) & \\ & \frac{-\beta^4}{L} D_3 & D_0 - \eta D_2 & \end{bmatrix}$$

여기서  $D_0 = \Lambda \{ \lambda_2^2 \cosh(\lambda_1) + \lambda_1^2 \cos(\lambda_2) \},$

$$D_1 = \Lambda \{ \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \sinh(\lambda_1) + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \sin(\lambda_2) \},$$

$$D_2 = \Lambda \{ \cosh(\lambda_1) - \cos(\lambda_2) \},$$

$$D_3 = \Lambda \{ \frac{1}{\lambda_1} \sinh(\lambda_1) - \frac{1}{\lambda_2} \sin(\lambda_2) \},$$

$$\Lambda = \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \text{ 이다.}$$

### 3.2 베어링의 수학적 모델

베어링의 특성은 베어링의 종류, 크기, 틈새, 윤활 상태, 예압, 회전속도 등과 같은 여러가지 요인들에 의해서 영향을 받는다. 그러나 이러한 요인들을 상세히 고려해서 베어링의 수학적 모델을 세우는 것은 대단히 어렵다.

따라서 본 연구에서는 베어링의 특성을 등방성으로

가정하고, Fig. 1에서와 같이 모멘트방향과 반경방향에 대한 강성계수와 감쇠계수를 이용하여 수학적으로 표현하였다. 결과적으로 베어링에 의해서 야기되는 굽힘모멘트  $\Delta M$ 과 전단력  $\Delta Q$ 는 베어링에서의 기울기  $\phi$ 와 변위  $x$ 에 대해서 다음과 같은 선형관계를 갖는다.

$$\Delta M = (K_m + j\omega C_m) \phi \quad (17)$$

$$\Delta Q = (K_r + j\omega C_r) x \quad (18)$$

여기서  $K_m$ 과  $C_m$ 은 모멘트방향의 강성계수와 감쇠계수, 그리고  $K_r$ 과  $C_r$ 은 반경방향의 강성계수와 감쇠계수를 각각 의미한다.

### 3.3 주축계의 이론적 전달함수

자려진동에 의한 체터현상은 공작기계의 전달함수, 특히 주축계의 전달함수와 밀접한 관련을 가지고 있다. 이러한 주축계의 전달함수를 이론적으로 얻기 위해서는 주축의 진동특성과 함께 베어링의 진동특성이 고려되어야 한다.

공작기계 주축계의  $b$ 번째 점에 베어링이 위치하는 경우,  $b-1$ 번째 주축요소의 양쪽경계인  $b-1$ 번째 점과  $b$ 번째 점에 대한 상태벡터들간의 관계는 식(16), (17), 그리고 (18)로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} B_b &= T_{b-1} B_{b-1} + (K_{m_b} + j\omega C_{m_b}) \bar{M}_{b-1} B_{b-1} \\ &+ (K_{r_b} + j\omega C_{r_b}) \bar{R}_{b-1} B_{b-1} = T'_{b-1} B_{b-1} \quad (19) \end{aligned}$$

여기서  $\bar{M}$ 은 3번째 행이  $T$ 의 2번째 행과 같고, 나머지 행들이 모두 0인  $4 \times 4$ 행렬이며,  $\bar{R}$ 은 4번째 행이  $T$ 의 1번째 행과 같고, 나머지 행들이 모두 0인  $4 \times 4$ 행렬이다. 또한  $T'$ 은 베어링의 영향이 고려된 주축요소의 전달행렬이다.

따라서 주축요소수가  $m$ 인 공작기계 주축계의 양단에 대한 상태벡터들간의 관계는 식(19)를 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$B_{m+1} = T'_m T'_{m-1} \dots T'_2 T'_1 B_1 = S_1(m+1) B_1 \quad (20)$$

식(20)에서의  $S_i(j)$ 는  $i$ 번째 점과  $j$ 번째 점간의 전달행렬을 의미하며, 아래와 같은 특성을 갖는다.

$$S_i(j) = \begin{cases} T'_{j1} T'_{j2} \dots T'_{i+1} T'_i & \text{if } j > i \\ I & \text{if } j = i \\ O & \text{otherwise} \end{cases}$$

여기서  $I$ 와  $O$ 는  $4 \times 4$  단위행렬과 영행렬을 각각 의미한다.

식(20)에 의해서 주축계의 양단에 대한 상태벡터들의 관계가 표현되는 경우에는  $m+1$ 번째 점에서의 굽힘모멘트와 전단력은 경계조건과 관계없이 항상 0이 된다. 그러나 1번째 점에 베어링이 위치하게 되는 경우에는 1번째 점에서의 굽힘모멘트와 전단력이 기울기와 변위에 대해서 식(17)과 (18)에서와 같은 선형관계들을 갖게 된다. 또한 단위가진력이 주축계의  $f$ 번째 점에 작용하는 경우에는 전달행렬법의 선형성으로부터 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$B_{m+1} = S_1(m+1) B_1 + S_f(m+1) \hat{B}_f \quad (21)$$

$$\text{여기서 } \hat{B}_f = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T,$$

$$B_{m+1} = [x_{m+1} \ \phi_{m+1} \ 0 \ 0]^T,$$

$$B_1 = [x_1 \ \phi_1 \ (K_{m_1} + j\omega C_{m_1})\phi_1$$

$$(K_{r_1} + j\omega C_{r_1})x_1]^T \text{이다.}$$

결과적으로 미지수들인 공작기계 주축계의 양단에서의 변위와 기울기는 식(21)로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$B' = A' C \quad (22)$$

$$\text{여기서 } B' = [x_1 \ \phi_1 \ x_{m+1} \ \phi_{m+1}]^T,$$

$$C = [S_f^{14}(m+1) \ S_f^{24}(m+1)$$

$$S_f^{34}(m+1) \ S_f^{44}(m+1)]^T,$$

$$A' = \begin{bmatrix} -\{S_1^{11}(m+1) + (K_{r_1} + j\omega C_{r_1})S_1^{14}(m+1)\} \\ -\{S_1^{21}(m+1) + (K_{r_1} + j\omega C_{r_1})S_1^{24}(m+1)\} \\ -\{S_1^{31}(m+1) + (K_{r_1} + j\omega C_{r_1})S_1^{34}(m+1)\} \\ -\{S_1^{41}(m+1) + (K_{r_1} + j\omega C_{r_1})S_1^{44}(m+1)\} \\ \\ -\{S_1^{12}(m+1) + (K_{m_1} + j\omega C_{m_1})S_1^{13}(m+1)\} & 1 & 0 \\ -\{S_1^{22}(m+1) + (K_{m_1} + j\omega C_{m_1})S_1^{23}(m+1)\} & 0 & 1 \\ -\{S_1^{32}(m+1) + (K_{m_1} + j\omega C_{m_1})S_1^{33}(m+1)\} & 0 & 0 \\ -\{S_1^{42}(m+1) + (K_{m_1} + j\omega C_{m_1})S_1^{43}(m+1)\} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

이고,  $S_k^{ij}(m+1)$ 은  $S_k(m+1)$ 에서의  $i$ 번째 행,  $j$ 번째 열의 요소를 의미한다.

따라서 진동응답 측정점이 주축계의  $r$ 번째 점이라면, 그 점에서의 전달함수는  $m+1$ 을  $r$ 로 대체한 식 (22)의 1번째 행으로 부터 아래와 같이 얻어진다.

$$G_{fr}(\omega) = S_1^1(r) B_1 + S_1^r(r) \hat{B}_f \quad (23)$$

여기서  $\hat{B}_f = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ 이고,  $S_k^1(r)$ 은  $S_k(r)$ 의 1번째 행을 의미한다.

### 3.4 진동특성실험

본 연구에서는 공작기계 주축계에 대한 진동특성실험을 수행하기 위해서 Fig. 2와 같은 실험장치를 구성하였다. 실험모델에서는 Fig. 1과 같은 형상을 가진 주축이 2개의 테이퍼롤러베어링(taper roller bearing)들로 지지되고 있다. 실험모델에서 사용한 주축과 베어링에 대한 제원들은 Table 1과 2에서 볼 수 있다. 또한 주축계의 실험모델에 대한 진동특성은 Table 3에 제시된 장비들과 충격가진법<sup>(8)</sup>을 이용해서 측정하였다.

가진실험에서는 가진력을 충격해머에 부착된 압전형 힘변환기(piezoelectric force transducer)로, 그리고 진동응답을 주축에 부착된 압전형 가속도계로 측정하였다. 가진력과 진동응답에 대한 측정신호들은 전하증폭기(charge amplifier)들을 이용해서 증폭하였고, 증폭된 신호들은 컴퓨터로 구동되는 A/D 변환기(analog/digital converter)를 이용해서 디지털

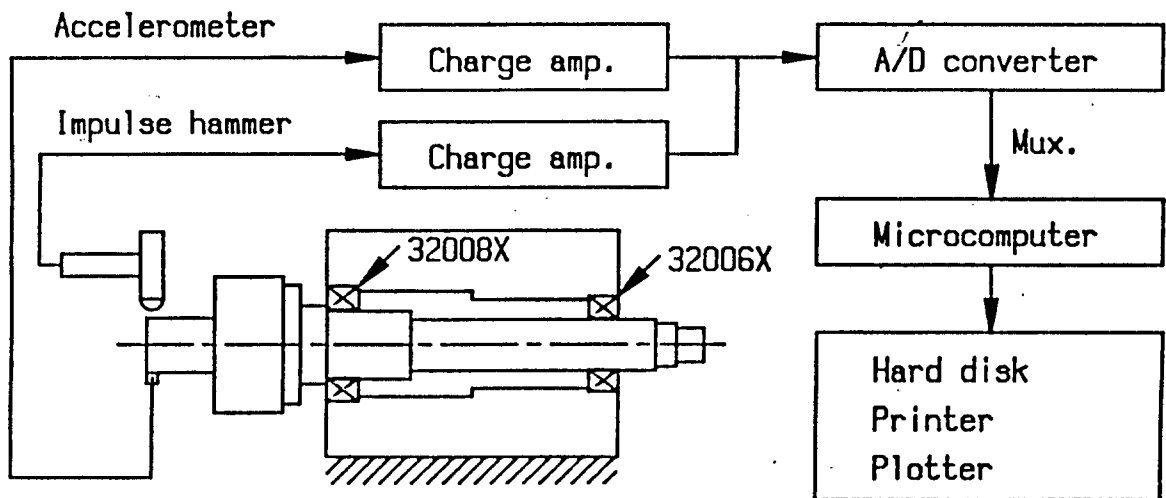


Fig.2 Experimental setup for modal testing

**Table 1 Specification of spindle in test model**

Material	S45C	
Segment number	Outer diameter (mm)	Length (mm)
1	32.0	40.0
2	80.0	40.0
3	70.0	10.0
4	45.0	15.5
5	40.0	9.5
6	40.0	40.0
7	30.0	40.0
8	30.0	72.0
9	30.0	30.0
10	25.0	12.0
11	20.0	16.0

**Table 2 Specification of bearings in test model**

Front bearing	32008X outer diameter : 68mm inner diameter : 40mm width : 19mm
Rear bearing	32006X outer diameter : 55mm inner diameter : 30mm width : 17mm

**Table 3 Specification of measuring equipments**

Equipment	Specification
Microcomputer	IBM-AT with 16bit microprocessor
A/D converter	Labmaster with 30KHz conversion rate
Impulse hammer	B&K 8202
Force transducer	B&K 8200
Accelerometer	B&K 4375
Charge amplifier	B&K 2635

화하였다. 또한 디지털화된 정보들은 컴퓨터내에서 Butterworth정현저주파여과기(Butterworth sine lowpass filter)<sup>(9)</sup>, Cooley-Tukey이론에 기초를 둔 FFT<sup>(9)</sup> 등과 같은 소프트웨어들을 거쳐서 실험모델의 전달함수를 계산하는 데 이용하였다.

**3.5 결과 및 고찰**

가진점과 응답측정점이 모두 Fig. 1에서의 점 1일 때, 실험모델로 부터 측정된 전달함수와 복소모드해석법에 의해서 규명된 모드매개변수들로 부터 재생(regeneration)한 전달함수가 Fig. 3에서 비교되고 있다. 전달함수들이 잘 일치하고 있다는 사실로 부터 복소모드해석법에 의해서 규명된 모드매개변수들은 신뢰성이 높다고 판단된다. 또한 실험결과로 부터 2차모드의 진동특성은 1차모드의 진동특성에 비해서 그 영향이 매우 작음을 알 수 있고, 일반적으로 공작기계의 채터진동은 1차모드의 진동특성과 밀접한 관련이 있기 때문에, 본 연구에서는 해석의 초점을 1차모드의 진동특성에 두었다. Table 4는 실험모델의 불감쇠고유진동수, 감쇠비, 그리고 복소진동모드를 보여주고 있다.

베어링의 특성, 주축재료의 내부감쇠율, 그리고 베어링의 간격이 주축계의 진동특성, 특히 불감쇠고유진동수와 감쇠비에 미치는 영향을 평가하기 위하여 Fig. 1과 같이 모델화된 주축계에 대한 일련의 이론해석들을 수행하였다. 이론해석에서 사용한 주축의 크기와 재료특성, 그리고 베어링계수의 기준값들은 Table 1, 5 그리고 6에서 볼 수 있다. 특히 복소탄성



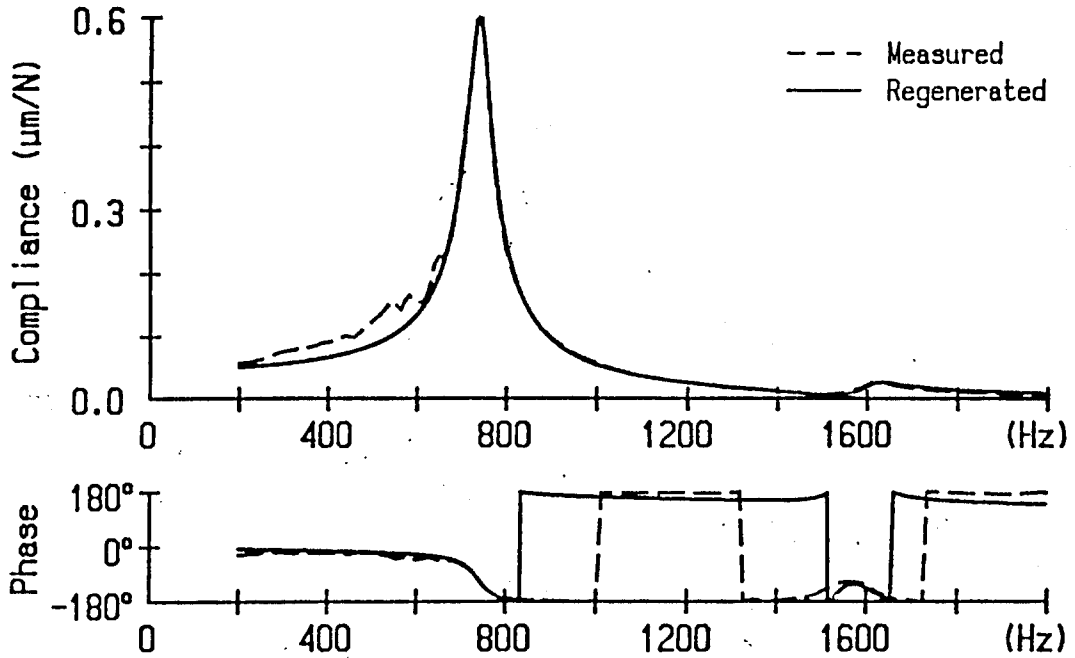


Fig.3 Comparison of transfer functions

Table 4 Measured modal parameters (First mode)

Undamped natural frequency		739.8Hz
Damping ratio		0.0397
Mode shape (μm/N)	$x_1$	$0.1762 + j0.5787$
	$x_2$	$0.0479 + j0.4350$
	$x_8$	$-0.0059 - j0.0945$
	$x_{12}$	$0.0139 - j0.0269$

Table 5 Material properties of spindle

Elastic modulus	$E$	205.8GN/m <sup>2</sup>
Shear modulus	$G$	82.7GN/m <sup>2</sup>
Material damping factor	$\delta_E = \delta_G$	0.00149
Poisson's ratio	$\nu$	0.300
Density	$\rho$	7870Kg/m <sup>3</sup>

계수와 복소전달계수에 대한 주축재료의 내부감쇠를 들은, 서로 같다는 가정<sup>(10)</sup>하에서, 자유상태의 주축에 대한 1차 고유진동수에서의 실험적 전달함수와 이론적 전달함수의 크기가 서로 일치할 때의 값인 0.00149로 추정하였다.

Fig. 4와 5는 베어링의 강성계수가 주축계의 고유진동수와 감쇠비에 미치는 영향을 보여주고 있다. 주축계의 고유진동수는 후반부 베어링보다 전반부 베어

Table 6 Bearing coefficients of simulation model

Front bearing	Radial stiffness coefficient $K_{r_{b1}}$	272.3MN/m
	Radial damping coefficient $C_{r_{b1}}$	19.85KNs/m
	Moment stiffness coefficient $K_{m_{b1}}$	67.84KNm/rad
	Moment damping coefficient $C_{m_{b1}}$	6.437Nms/rad
Rear bearing	Radial stiffness coefficient $K_{r_{b2}}$	91.62MN/m
	Radial damping coefficient $C_{r_{b2}}$	443.4KNs/m
	Moment stiffness coefficient $K_{m_{b2}}$	38.70KNm/rad
	Moment damping coefficient $C_{m_{b2}}$	4.297Nms/rad

링의 강성계수에 의해서 더 큰 영향을 받고 있다. 특히 반경방향의 강성계수가 작아지면 고유진동수도 급격히 낮아지고 있으며, 극대화된 고유진동수는 전반부 베어링에 대한 모멘트방향의 강성계수가 큰 경우에 얻어지고 있다. 또한 주축계의 감쇠비는 전반부 베어링에 대한 모멘트방향의 강성계수가 증가할 수록 극소화되고 있다. 후반부 베어링에 대한 모멘트방향의 강성계수는 고유진동수와 감소비에 거의 영향을 주지 않고 있다.

Fig. 6과 7에서는 베어링의 감쇠계수가 주축계의 고유진동수와 감쇠비에 미치는 영향을 볼 수 있다. 전반부 베어링에 대한 모멘트방향의 감쇠계수가 증가할 수록 주축계의 고유진동수도 높아지고 있다. 이

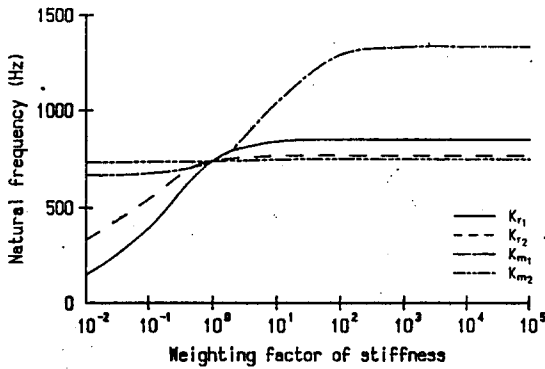


Fig. 4 Variation of natural frequency with bearing stiffness coefficient

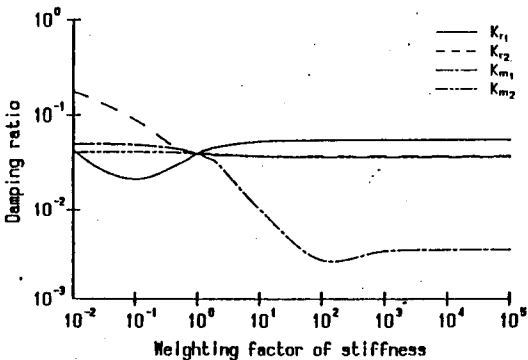


Fig. 5 Variation of damping ratio with bearing stiffness coefficient

현상은 감쇠계수의 증가에 의한 베어링의 강성화 효과 때문인 것으로 판단된다. 또한 주축계의 감쇠비는 전반부 베어링에 대한 모멘트방향의 감쇠계수에 의해서 거의 결정되고 있는 것으로 나타났다. 특히 주축계의 감쇠비는 전반부 베어링에 대한 모멘트방향의 감쇠계수가 Table 6에 제시된 기준값의 약 10배가 될 때까지는 같이 증가하지만, 그 이상에서는 오히려 감소하고 있다. 이 현상도 베어링의 강성화 효과에 기인하는 것으로 보여진다.

Fig. 8과 9는 주축재료의 내부감쇠율이 주축계의 고유진동수와 감쇠비에 미치는 영향을 보여주고 있다. 주축계의 고유진동수는 주축재료의 내부감쇠율을 수록 높게 나타나고 있다. 이 현상은 내부감쇠율의

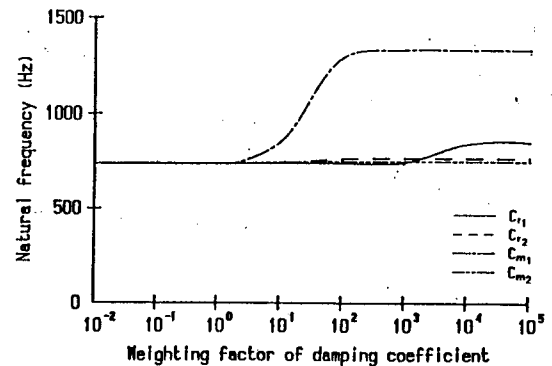


Fig. 6 Variation of natural frequency with bearing damping coefficient

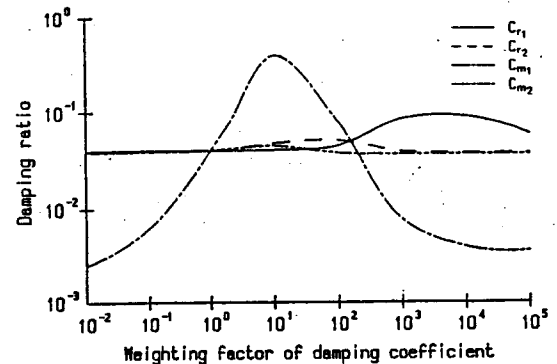


Fig. 7 Variation of damping ratio with bearing damping coefficient

증가에 의해서 복소탄성계수와 복소전단계수의 절대 값들도 같이 증가하기 때문에 야기되는 주축의 강성화 효과에 기인하는 것으로 판단된다. 또한 주축계의 감쇠비는 주축재료의 내부감쇠율이 0.278이 될 때까지는 같이 증가하지만, 그 이상에서는 오히려 감소하고 있다. 이 현상도 주축의 강성화효과에 기인한 결과로 보여진다. 아울러서 해석결과로부터 공작기계 주축계에서는 주축재료의 내부감쇠 효과에 의해서 높은 감쇠비를 얻기 어렵다는 점을 알 수 있다. 이 사실은 주축계의 감쇠효과가 주로 베어링의 특성에 의해서 야기되고 있다는 것을 의미한다.

베어링의 간격이 주축계의 모드매개변수들에 미치는 영향을 평가하기 위하여 전반부 베어링의 위치는

고정하고, 후반부 베어링의 위치만 변화시켰다. 이 경우에는 주축요소의 외경과 베어링의 내경이 일치되는 Fig. 1에서의 7번째, 8번째, 그리고 9번째 주축요소에만 후반부 베어링이 위치할 수 있게 된다. 따라서 후반부 베어링의 폭 17mm를 고려하면, 실제로 얻을 수 있는 베어링의 간격은 최소값이 48.5mm이고, 최대값이 173.5mm이다.

Fig. 10과 11에서는 베어링의 간격이 주축계의 고유진동수와 감쇠비에 미치는 영향을 볼 수 있다. 주축계의 고유진동수는 베어링의 간격이 약 100mm가 될 때까지는 거의 선형적으로 증가하지만, 그 이상에서는 약간 감소하는 경향을 나타내고 있다. 또한 주축계의 감쇠비는 베어링의 간격이 약 110mm가 될 때까지

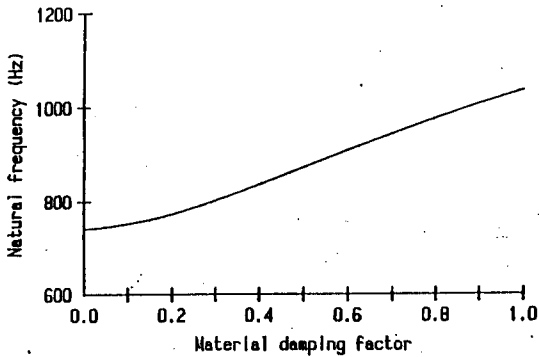


Fig.8 Variation of natural frequency with material damping factor

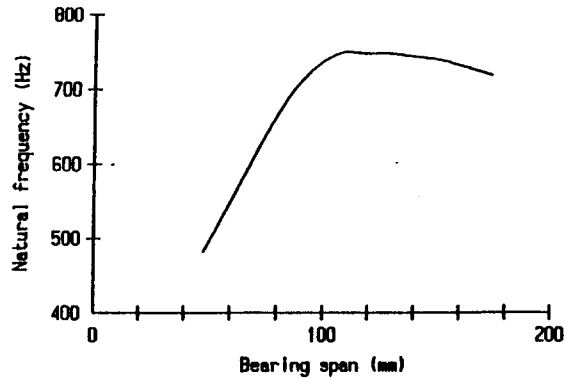


Fig.10 Variation of natural frequency with bearing span

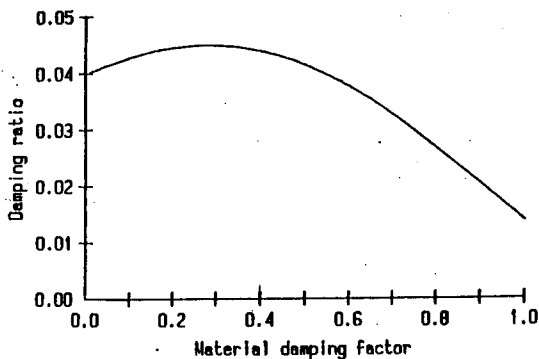


Fig.9 Variation of damping ratio with material damping factor

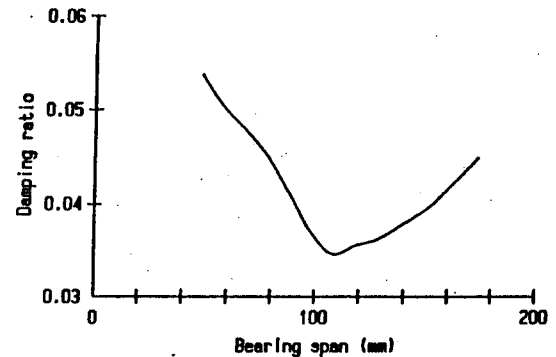


Fig.11 Variation of damping ratio with bearing span

는 감소하고 있지만, 그 이상에서는 오히려 증가하고 있다. 따라서 베어링의 간격이 주축계의 고유진동수와 감쇠비에 미치는 영향을 종합적으로 고려하게 되면, 베어링의 간격을 되도록 크게 설계하는 것이 주축계의 진동특성을 개선하는 데에 유리함을 알 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 공작기계 주축계의 진동특성을 해석하기 위해서 주축은 재료의 내부감쇠효과가 고려된 Timoshenko보이론으로, 베어링은 모멘트방향과 반경방향의 강성계수와 감쇠계수로 모델화하였다. 주축계의 진동특성은 전달행렬법을 이용해서 이론적으로 해석하였고, 모드매개변수의 규명을 위해서 복소모드 해석법이 도입되었다. 또한 베어링의 특성, 주축재료의 내부감쇠율 및 베어링의 간격이 주축계의 진동특성에 미치는 영향을 해석한 결과들로부터 아래와 같은 사실들을 알 수 있었다.

1) 주축계의 고유진동수와 감쇠비는 후반부 베어링보다 전반부 베어링의 특성에 의해서 더 큰 영향을 받는다. 특히 후반부 베어링에 대한 모멘트방향의 강성계수와 감쇠계수는 고유진동수와 감쇠비에 대해서 거의 영향을 주지 않는다.

2) 주축계의 고유진동수는 반경방향의 베어링 강성계수가 작아지면 급격히 낮아지며, 극대화된 고유진동수는 전반부 베어링에 대한 모멘트방향의 강성계수가 큰 경우에 얻어지고 있다.

3) 전반부 베어링에 대한 모멘트방향의 감쇠계수가 큰 경우에는 베어링의 강성화 효과 때문에, 그리고 주축재료의 내부감쇠율이 큰 경우에는 주축의 강성화 효과 때문에 주축계의 고유진동수는 높게 나타나고 있다.

4) 주축계의 감쇠비는 전반부 베어링에 대한 모멘트방향의 감쇠계수에 의해서 거의 결정되며, 주축재료의 내부감쇠효과에 의해서는 높은 감쇠비를 얻기 어렵다.

5) 주축계의 진동특성을 개선하기 위해서는 베어링의 간격을 되도록 크게 설계하는 것이 바람직하다.

#### 참고문헌

1. Bollinger, J.G. and Geiger, G., 1964, "Analysis of the static and dynamic behaviour of lathe spindles", Int. J. MTDR, Vol. 3, pp. 193-209
2. Elsermans, M., Hogerloot, M. and Snoeys, R., 1976, "Damping in taper roller bearings", Proc. 16th Int. MTDR Conf., pp. 223-228
3. 堤正臣, 鄭寅聖, 村上靖典, 伊東義, 1984, "工作機械主軸系の動特性(第2報)", 日本機械學會論文集(C編), 51卷, 462號, pp. 417-424
4. Snowdon, J.C., 1968, "Vibration and shock in damped mechanical systems", John Wiley & Sons, New York
5. Pestel, E.C. and Leckie, F.A., 1963, "Matrix method in elasto mechanics", McGraw-Hill, New York
6. Peters, J. and Mergeay, M., 1976, "Dynamic analysis of machine tools using complex modal method", Annals of the CIRP, Vol. 25, No. 1, pp. 257-261
7. Cowper, G.R., 1966, "The shear coefficients in Timoshenko's beam theory", Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 33, pp. 335-340
8. Ewins, D.J., 1984, "Modal testing: Theory and practice", Research Studies Press
9. Otnes, R.K. and Enochson, L., 1978, "Applied time series analysis(Vol. 1)", John Wiley & Sons, New York
10. Kerlin, R.L. and Snowdon, J.C., 1970, "Driving-point impedance of cantilever beams-Comparison of measurement and theory", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 47, pp. 220-228