

모멘트 법의 이론과 응용

빠른 속도의 디지털 컴퓨터의 등장으로 과거에는 손으로 했던 반복적인 계산을 보다 손쉽게 할 수 있게 되었다. 과거에는 해석적으로 계산하는데 드는 노력을 적게 하면서 해를 구하기 위해 많은 노력을 쏟았었다. 이것은 컴퓨터를 사용함으로써 좀더 편리하게 해석적인 해를 구할 수 있게 되었다. 대부분의 선형문제를 해석함에 있어서 많은 노력과 독창력이 요구되는 어느정도의 근사적인 단계가 필요하다. 달리 표현하면, 방법은 알고 있으나, 더욱 상세하게 풀기 위해서는 많은 노력을 해야한다.

본고의 목적은 선형 전자장 문제의 해를 구하기 위한 일반적인 절차에 대해 간단히 소개하고, 이것을 전자장 문제에 적용시켜 보는 것이다. 이것은 원시 함수 방정식이 행렬 방정식으로 유도되기 때문에, 이러한 과정을 행렬 방법이라고도 한다. 수학적인 과정으로 행렬 방정식을 얻는 것을 모멘트 법이라고 한다. 종종 이런 과정을 근사 기법이라고도 한다. 그러나 이것은 해가 극한에서 수렴할 때에는 틀린 명칭이다. 주어진 정확도를 위해서는 다른 해들과는 달리 계산시간이 많이 요구되는데, 예로 무한 멱급수 전개를 들 수 있다. 물론, 이 방법은 정확하게 근사해를 구하는 데 사용된다. 즉, 이 근사해는 극한에서 수렴하지 않는다.

모멘트 법은 전자장 문제를 다루기 위한 일반적인 절차이지만, 해를 구하는 과정은 특별한 문제에도 폭넓게 적용할 수 있다. 본고에서는 이 방법의 과정을 설명할 뿐만 아니라, 전자장 문제를 다루는 예를 들었다.

이런 예들을 가지고 유사한 문제의 해를 구할 수 있으며, 다른 유형의 문제들에 대해서는 적절하게 확장, 또는 일부 수정을 하여 해를 구할 수 있다. 전자장 부분에서 예를 들었지만, 이 과정은 모든 종류의 전자장 문제에 적용할 수 있다.

II. 모멘트 법의 이론

선형방정식을 풀기 위한 일반적인 수행은 모멘트 법이다. 결정론적 방정식을 고려해 보면

$$L(f) = g \tag{1}$$



金正祺

중앙대 전자공학과

여기서 L 은 선형연산자, g 는 기저함수, f_n 는 미지함수이다. f 를 L 의 영역에서 f_1, f_2, f_3, \dots 의 무한급수로 전개하면

$$f = \sum_n \alpha_n f_n \quad (2)$$

여기서 α_n 은 상수이다. f_n 은 확장함수 또는 기저함수로 불리운다. 정확한 해로서, 식 (2)는 보통 무한합이고 f_n 형태의 완벽한 기저함수를 구성한다. 또한 대략적인해로서 식 (2)는 보통 유한합으로 나타낸다. 식 (1)에서 식 (2)를 감산하고 L 의 선형상을 사용하면

$$\sum_n \alpha_n L(f_n) = g \quad (3)$$

적당한 내적 $\langle f, g \rangle$ 는 문제에서 결정되어진다고 가정한다. 지금 가중함수 또는 시험함수 w_1, w_2, w_3, \dots 를 범위 L 에서 정의하고 각각의 w_m 을 가지고 식 (3)의 내적을 취하면 그 결과는

$$\sum_n \alpha_n \langle w_m, Lf_n \rangle = \langle w_m, g \rangle \quad (4)$$

여기서 $m = 1, 2, 3, \dots$ 이다.

이 방정식은 행렬 형태로 쓸 수 있다.

$$[L_{mn}] [\alpha_n] = [g_m] \quad (5)$$

여기서

$$[L_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, Lf_1 \rangle & \langle w_1, Lf_2 \rangle & \dots \\ \langle w_2, Lf_1 \rangle & \langle w_2, Lf_2 \rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[\alpha_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad [g_m] = \begin{bmatrix} \langle w_1, Lf_1 \rangle \\ \langle w_2, Lf_1 \rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (7)$$

만약 행렬 $[L]$ 이 비특성이고 $[L^{-1}]$ 인 역이 존재한다면 α_n 은 다음과 같다.

$$[\alpha_n] = [L^{-1}_{mn}] [g_m] \quad (8)$$

그리고 식 (2)에 의해서 주어진 f 의 해이다. 이 결과의 간결한 표현은 행렬의 함수로 정의된다.

$$[\tilde{f}] = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ \dots] \quad (9)$$

다시쓰면

$$f = [\tilde{f}_n] [\alpha] = [\tilde{f}_n] [L^{-1}_{nm}] [g_m] \quad (10)$$

이 해는 f_n 는 w_m 의 선택에 따라서 정확할 수도 있고 대략적일 수도 있다. 그리고 $w_m = f_n$ 로 놓는것을 Galerkin 법이라고 한다.

여러 특별한 문제에서 주요한 과제중의 하나는 f_n 과 w_m 의 선택이다. f_n 은 선형적으로 독립이어야만 하고 식 (2)에서 근사실 f_n 은 적절하게 선택되어야만 한다. w_m 또한 선형적으로 독립이어야만 하고 $\langle w_m, g \rangle$ 는 g 의 연관적 독립 특성에 의존한다. f_n 과 w_m 의 선택에 영향을 미치는 추가할 요소들은 다음과 같다.

- a) 요구되는 해의 정확성
- b) 행렬 요소 계산의 용이성
- c) 역 변환 될 수 있는 행렬의 크기
- d) 좋은 상태를 갖는 행렬^[1]의 실현

III. 전자장에서의 응용

1. 임의의 모양을 갖는 선소

얇은 선소 물체의 전자장 형태는 중요한 공학적인 문제이다. 그러한 물체의 일반적인 해석이 모멘트 법에 의해 이 절에서 소개된다. 인가장은 임의로 하며, 안테나 및 산란체문제가 해를 구하는 데 모두 포함된다. 안테나와 산란체간의 구분은 원천의 위치에 따른다. 원천이 물체에 있으면 안테나로, 물체로부터 떨어져 있으면 산란체로 간주된다.

이것은 간단히 다음을 표현한다.

- a) 얇은 선소에 유효한 근사 방정식에 의해 도체 표면에 대한 정확한 해의 근사
- b) 근사연산자를 만드는 미분의 유한차분 근사로의 대

치

c) 전류 및 전하에 계단근사를 주는 확장함수에 펄스 함수 사용

d) 시험에 대해 점정함을 사용

회로망 정수를 사용하여 해에 대한 특별한 설명을 할 수 있다. 해를 구하기 위해 선소는 서로 연결된 N개의 작은 구간으로 간주된다. 각 구간의 끝점들은 공간내의 두 단자를 나타낸다. 이 N개의 단자쌍은 N단 회로망을 형성하는 것으로 간주되며, 선소 물체는 회로의 모든 단을 단락시킴으로써 구해진다. 모든 단에서의 개방전류 전압을 계산하고 각 단에 차례로 전류원을 적용함으로써 N단 회로망에 대한 임피던스 행렬을 결정할 수 있다. 이 과정은 단지 빈 공간내의 전류요소만을 포함한다. 어드미턴스 행렬을 알게 되면, 단 전류(선소상의 전류분포)가 행렬 곱에 의해 어느 특정한 전압인가(인가장)에 대해 구해진다. 인가장 E를 알고 있는 도체 S상의 전하밀도 σ_s 와 전류 J에 대한 적분방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$E^s = -j\omega A - \nabla\phi \quad (11)$$

$$A = \mu \iint_s J_s \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} ds \quad (12)$$

$$\phi = \frac{1}{\epsilon} \iint_s \sigma_s \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} ds \quad (13)$$

$$\sigma_s = \frac{-1}{j\omega} \nabla_s \cdot J_s \quad (14)$$

$$n \times E^s = -n \times E^i \quad \text{on } S \quad (15)$$

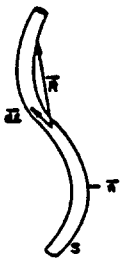


그림 1. (a) 선소 산란체 (b) N개의 구간으로 나눈 선소축

그림 1.(a)는 아래의 근사가 행해지는 임의의 얇은 선소 산란체를 나타낸다.

a) 전류는 단지 선소의 축방향으로만 흐른다.

b) 전류와 전하밀도는 선소 축상의 전류선소 I와 전하 σ_s 에 의해 근사된다.

c) 경계조건 식(43)이 선소 표면에서 단지 E의 축방향 성분에만 적용된다.

이러한 근사로 식(11)~(15)는

$$-E = -j\omega A - \frac{\partial\phi}{\partial l} \quad \text{on } S \quad (16)$$

$$A = \mu \int_{\text{axis}} I(l) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl \quad (17)$$

$$\phi = \frac{1}{\epsilon} \int_{\text{axis}} \sigma(l) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl \quad (18)$$

$$\sigma_s = \frac{-1}{j\omega} \frac{dI}{dl} \quad (19)$$

로 된다.

여기서 l 은 선소 축을 따라가는 길이 변수이고 R 은 축상의 원천점으로 부터 선소 표면상의 장점까지의 거리로 측정된다.

미분항은 적분에 이용된 같은 구간 전체에 걸쳐 유한 차분으로 근사된다. 그림 1.(b)는 N개의 구간으로 나눈 선소 축을 나타낸다. 선소가 끊어져 있으면 선소의 끝에서 부터 처음 구간 $l/2$ 구간을 시작함으로써 경계조건 $I=0$ 이 적용된다. 이것이 그림 1.(b)에 각 끝의 부가적인 $l/2$ 구간으로서 나타나 있다. n 번째 구간은 시작점 n^- , 중간점 n , 끝점 n^+ 로 나타내어진다. 증분 Δl_n 은 n 와 n^+ 사이를 나타내고, Δl_n^+ 는 l 을 따라 $l/2$ 구간 만큼 $+$ 와, $-$ 로 각각 이동된 증분을 표시한다. 이때 식(16)~(19)에 대한 원하는 근사식은 다음과 같다.

$$-E^i(m) \approx -j\omega A^i(m) - \frac{\phi(m^+) - \phi(m^-)}{\nabla l_m} \quad (20)$$

$$A(m) = \mu \sum_n I(n) \int \nabla l_n \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl \quad (21)$$

$$\phi(m^+) = \frac{1}{\epsilon} \sum \sigma(n^+) \int_{\Delta l_n^+} \sigma(l) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dl \quad (22)$$

$$\sigma_s \approx \frac{-1}{jw} \left[\frac{I(n+1) - I(n)}{\Delta l_n^+} \right] \quad (23)$$

$\phi(m^-)$, $\sigma(n^-)$ 에 대해서는 식(22)~(23)과 비슷하다. 식(20)에 의해 표현된 N개의 방정식은 단자쌍(n^+ , n^-)를 가진 N단 회로망에 대한 방정식으로 볼 수 있다. 각 단에 인가된 전압은 근사적으로 $E' \cdot \Delta l_n$ 이다. 그러므로

$$[I] = \begin{bmatrix} I(1) \\ I(2) \\ \vdots \\ I(N) \end{bmatrix} \quad [V] = \begin{bmatrix} E'(1) \cdot l_1 \\ E'(2) \cdot l_2 \\ \vdots \\ E'(N) \cdot l_N \end{bmatrix} \quad (24)$$

라 정의한다.

행렬 [Z]의 요소는 식(21)~(23)을 두개의 분리된 요소에 적용하여 직접적으로 임피던스 요소를 구할 수 있다.

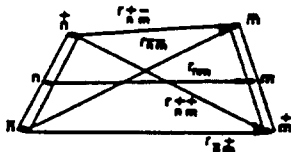


그림 2. 두개의 구간으로 나눈 선소 산란체

그림 2.처럼 선소 산란체의 대표요소를 고려하자. 식(21), (22)의 적분은 같은 형태로써 다음과 같다.

$$\Psi(n, m) = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{\Delta l_n} \frac{e^{-jkR_{mn}}}{4\pi R_{mn}} dL_n \quad (25)$$

+, -기호는 m, n에 포함시켜 사용한다.

식(25)의 스칼라 함수 Ψ 의 정확한 계산이 필요하다. 좌표계 원점이 점 n에 위치하고 적분경로가 z축을 따라 놓여 있다고 하자. 그러면

$$\Psi(n, m) = \frac{1}{8\pi\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{-jkR_{mn}}}{R_{mn}} dz' \quad (26)$$

가 되고, 여기서

$$2\alpha = \Delta l_n$$

$$R_{mn} = \begin{cases} \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2} & m \neq n \\ \sqrt{a^2 + (z')^2} & m = n \end{cases} \quad (27)$$

$$(28)$$

이며, a는 선소 반경이다.

이 수식에 대한 기하학적인 모양은 그림 3.에 나타나 있다.

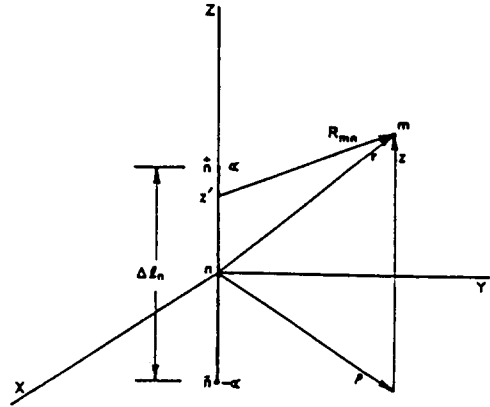


그림 3. $\Psi(m,n)$ 의 기하학적 계산

Ψ 에 대한 근사는 지수함수를 Maclaurin 급수로 전개함으로써 다음과 같이 구해진다.

$$\Psi = \frac{1}{8\pi\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{1}{R_{mn}} - jk - \frac{k^2}{2} R_{mn} + \dots \right] dz' \quad (29)$$

첫항은 전하선소의 정적 포텐셜과 같다. 두번째 항은 R_{mn} 에 무관하다. 그러므로 식(26)의 2항 근사는

$$\Psi(m, n) \approx \frac{1}{8\pi\alpha} \log \left[\frac{z + \alpha + \sqrt{\rho^2 + (z + \alpha)^2}}{z + \alpha + \sqrt{\rho^2 + (z + \alpha)^2}} \right] - \frac{jk}{4\pi} \quad (30)$$

이다. 만약에 $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ 이 크고, $\alpha \ll \lambda$ 이면

$$\Psi(m, n) \approx \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (31)$$

이 된다. 1계 해에서는, 작은 r 즉, $r \leq 2\alpha$ 에 대해서는 식 (30)을 사용하고 큰 r , 즉 $r > 2\alpha$ 에 대해서는 식 (31)을 사용할 수 있다.

고계 근사에 대해서는 위상항 e^{-jkr} 을 적분밖으로 꺼냄으로써 더욱 빠른 수렴을 얻을 수 있다. 그러면

$$\Psi = \frac{e^{-jkr}}{8\pi\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{1}{R_{mn}} - \frac{jk(R_{mn} - r)}{R_{mn}^2} - \frac{k^2(R_{mn} - r)^2}{2R_{mn}^3} + \dots \right] dz' \quad (32)$$

이 된다. 각 항을 적분하면

$$\Psi(m, n) = \frac{e^{-jkr}}{8\pi\alpha} \left[I_1 - jk(I_2 - rI_1) - \frac{k^2}{2} (I_3 - 2rI_2 + r^2I_1) + j\frac{k^3}{6} (I_4 - 3rI_3 + 3r^2I_2 - r^3I_1) + \dots \right] \quad (33)$$

가 되며, 여기서

$$I_1 = \log \left[\frac{z + \alpha + \sqrt{\rho^2 + (z + \alpha)^2}}{z + \alpha + \sqrt{\rho^2 + (z + \alpha)^2}} \right] \quad (34)$$

$$I_3 = 2\alpha \quad (35)$$

$$I_3 = \frac{\alpha + z}{2} \sqrt{\rho^2 + (z + \alpha)^2} + \frac{\alpha - z}{2} \sqrt{\rho^2 + (z - \alpha)^2} + \frac{\rho^2 I_1}{2} \quad (36)$$

$$I_4 = 2\alpha\rho^2 + \frac{2\alpha^3 + 6\alpha z^2}{3} \quad (37)$$

이다. 식(33)의 전개는 이론적으로 모든 r 에 대해 유효하다. 그러나 큰 r 에 대해서는 수치적으로 이것이 거의 같은 수의 항을 포함하고 있으므로 불가능하다. $\rho \ll a$ 에 대해, 전개시 $\rho = a$ 로 놓아야 한다. 큰 r 에 대한 적절한 표현은 식(27)을 다음과 같이 z' 로 Maclaurin 급수를 전개함으로써 구해진다.

$$\Psi = \frac{1}{8\pi\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[f(0) + f'(0)z' + \frac{1}{2!} f''(0)(z')^2 + \dots \right] dz' \quad (38)$$

$$\text{여기서 } f(z') = \frac{e^{-jkr} \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} \text{ 이다.}$$

식(38)의 5항 전개식의 각 항에 대해 적분이 수행될 때, 그 결과는

$$\Psi = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \left[A_0 + jk\alpha A_1 + (k\alpha)^2 A_2 + j(k\alpha)^3 A_3 + (k\alpha)^4 A_4 \right] \quad (39)$$

가 되고, 여기서

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 \left[-1 + 3 \left(\frac{z}{r}\right)^2\right] \\
 &\quad + \frac{1}{40} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^4 \left[3 - 30 \left(\frac{z}{r}\right)^2\right. \\
 &\quad \left. + 35 \left(\frac{z}{r}\right)^4\right] \\
 A_1 &= \frac{1}{6} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 \left[-1 + 3 \left(\frac{z}{r}\right)^2\right] \\
 &\quad + \frac{1}{40} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^4 \left[3 - 30 \left(\frac{z}{r}\right)^2\right. \\
 &\quad \left. + 35 \left(\frac{z}{r}\right)^4\right] \\
 A_2 &= -\frac{1}{6} \left(\frac{z}{r}\right)^2 - \frac{1}{40} \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 \\
 &\quad \left[1 - 12 \left(\frac{z}{r}\right)^2 + 15 \left[\left(\frac{z}{r}\right)^4\right]\right] \\
 A_3 &= \frac{1}{60} \left(\frac{\alpha}{r}\right) \left[3 \left(\frac{z}{r}\right)^2 - 5 \left(\frac{z}{r}\right)^4\right] \\
 A_4 &= \frac{1}{120} \left(\frac{z}{r}\right)^4 \tag{40}
 \end{aligned}$$

1% 이상의 정확성을 위해서는 $r < 10\alpha$ 에 대해 식 (33), $r \geq 10\alpha$ 에 대해 식(39)를 사용할 수 있다.

식(39) 형태의 또다른 유도 과정은 다음과 같다. $z > z'$ 에 대해 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{-jkR_{mn}}}{-jkR_{mn}} &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(kz') h_n^{(2)} \\
 &\quad (kr) P_n\left(\frac{z}{r}\right) \tag{41}
 \end{aligned}$$

여기서 j_n 은 1종 구형 Bessel 함수이고, $h_n^{(2)}(kr)$ 은 제 2종 구형 Hankel 함수, $P_n(z/r)$ 은 Legendre 다항식이다. 식(41)을 식(27)에 대입하고 각 항을 적분하면, 그 결과는

$$\begin{aligned}
 \Psi(m, n) &= \frac{1}{4\pi j} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n h_n^{(2)} \\
 &\quad (kr) P_n\left(\frac{z}{r}\right) \tag{42}
 \end{aligned}$$

이다. 여기서

$$b_n = \frac{2n+1}{2\alpha} \int_{-k\alpha}^{k\alpha} j_n(x) dx \tag{43}$$

이다.

식(43)은 비록 $h_n^{(2)}$ 및 P_n 에 대한 반복수식이 식(42)로부터 쉽게 직접적으로 계산된다 할지라도 식(39)의 형태로 재배열할 수 있다.

그림 2의 요소는 선소전류 $I(n)$ 으로 구성되어 있다고 하자. 그러면 순전하의 두 전하선소는

$$q(n^+) = \frac{1}{j\omega} I(n) \quad q(n^-) = \frac{-1}{j\omega} I(n) \tag{44}$$

이고

여기서 $q = \sigma \Delta l$ 이다. $I(n)$ 에 의한 m 에서의 벡터 포텐셜은 식(21)에 의해

$$A = \mu I(n) \Delta l_n \Psi(n, m) \tag{45}$$

가 된다.

전하 식(44)에 의한 m^+ , m^- 에서의 스칼라 포텐셜은 식(22)에 의해

$$\begin{aligned}
 \phi(m^+) &= \frac{1}{j\omega \epsilon} [I(n) \Psi(n^+, m^+) \\
 &\quad - I(n) \Psi(n^-, m^+)] \tag{46}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi(m^-) &= \frac{1}{j\omega \epsilon} [I(n) \Psi(n^+, m^-) \\
 &\quad - I(n) \Psi(n^-, m^-)] \text{가 된다.}
 \end{aligned}$$

식(45)~(46)을 식(20)에 대입하고
 $Z_{mn} = \mathbf{E}'(m) \cdot \Delta l_n / I(n)$ 을 구하면

$$Z_{mn} = j\omega\mu\Delta l_n \cdot \Delta l_n \Psi(n,m) + \frac{1}{j\omega\epsilon} [\Psi(n^+,m^+) - \Psi(n^-,m^+) - \Psi(n^+,m^-) + \Psi(n^-,m^-)] \quad (47)$$

을 얻게 된다.

이 결과는 상호 임피던스 및 자기 임피던스($m=n$)인 경우에 적용된다. 두 전류 요소가 멀리 떨어져 있으면 전류 요소로 부터의 복사장에 기초한 간단한 수식이 사용될 수 있다.

일단 전류 분포를 알면, 전자장 패턴, 입력 임피던스, 에코 영역등과 같은 관심있는 파라미터들은 적절한 수식들을 수치적으로 계산함으로써 계산할 수 있다.

2. 선소 안테나

선소 안테나는 선소가 길이를 따라 1개 혹은 그 이상의 점에서 전압에 의해 여기될 때 얻어진다. 그러므로 n 번째 구간에서 여기된 안테나에 대해 인가전압 행렬(24)는

$$[V^3] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ V_n \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

이 된다.

즉, n 번째를 제외하고 모든 요소는 0이며, 원천전압과 같다. 전류분포는 식(30)에 의해 주어지며 식(48)의 $[V]$ 에 대해

$$[I] = V_n \begin{bmatrix} Y_{1n} \\ Y_{2n} \\ \vdots \\ Y_{Nn} \end{bmatrix} \quad (49)$$

가 된다.

그러므로 어드미턴스 행렬의 n 번째 열은 n 번째 구간에 가해진 단위 전압 원천에 대한 전류분포이다. 그러므로

임피던스 행렬의 역행렬은 안테나가 길이를 따라 어떤 임의 구간에서 여기될 때 동시에 전류분포를 제공한다. 어드미턴스 행렬의 대각요소 Y_{nn} 은 n 번째 구간에 급전된 선소의 입력 어드미턴스이고, Y_{mn} 은 n 번째 및 m 번째 구간의 단 사이의 변환 어드미턴스이다. 선소 안테나의 복사패턴은 안테나를 N 개의 전류요소 $I(n) \cdot \Delta l_n$ 의 배열로 다룸으로써 구할 수 있다. 대표적인 무한영역벡터 포텐셜 수식은

$$A = \frac{\mu e^{-jk_0 r}}{4\pi r_0} \sum I(n) \Delta l_n e^{jk_0 r_n \cos \xi_n} \quad (50)$$

로 주어지며, 여기서 r_0, r_n 은 각각 떨어져 있는 장점 및 원천점까지의 반경 벡터이며, ξ_n 은 r_0, r_n 사이의 각도이다.

무한영역 장 요소는

$$E_\theta = -j\omega A_\theta \quad E_\phi = -j\omega A_\phi \quad (51)$$

이고,

여기서 θ, ϕ 는 구좌표계의 각도이다. 복사패턴에 대한 또다른 유도는 가역성에 의해 구해진다. 그림 4.는 멀리 떨어진 전류요소 Il (첨자 r 은 수신기를 표시)을 나타내며 안테나 부근에서 단위 평면파를 발생하도록 조절된다.

$$E_r = u_r e^{-jk_r \cdot r_n} \quad (52)$$

여기서 u_r 은 파의 극성을 나타내는 단위 벡터이고 k_r 은 파 전달 방향을 나타내는 파수 벡터이며, r_n 은 안테나상의 한 점 n 까지의 반경 벡터이다.

가역 정리에 의해

$$E_r = \frac{1}{Il} \int_{\text{안테나}} E_r \cdot Idl \quad (53)$$

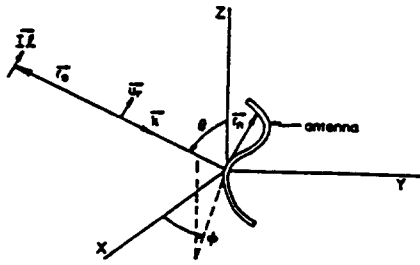


그림 4. 선소 안테나와 다이폴의 거리

이 되고

여기서 E은 안테나로 부터 E의 u. 성분이며 I는 안테나 상의 전류이다.

상수 1/I는 원점에서 단위 평면파를 발생시키는 데 필요한 값으로

$$\frac{1}{I} = \frac{\omega\mu\epsilon^{-jk_0 r_0}}{j4\pi r_0} \quad (54)$$

과 같다.

식(53)에 대한 수치근사는 전압 행렬

$$[V^r] = \begin{bmatrix} E^r(1) \cdot \Delta l_1 \\ E^r(2) \cdot \Delta l_2 \\ \vdots \\ E^r(N) \cdot \Delta l_N \end{bmatrix} \quad (55)$$

를 정의함으로써 구해진다.

여기서 E^r는 식(52)에 의해 주어지며 식(53)을 행렬의 곱

$$\begin{aligned} E^r &= \frac{\omega\mu\epsilon^{-jk_0 r_0}}{j4\pi r_0} [\tilde{V}^r] [I] \\ &= \frac{\omega\mu\epsilon^{-jk_0 r_0}}{j4\pi r_0} [\tilde{V}^r] [Y] [V^s] \end{aligned} \quad (56)$$

으로 표시하게 된다.

여기서 [V]는 [V]의 전치행렬을 나타낸다.

[V^r]은 선소의 평면파 여기에 대한 행렬과 같다.

복사 장의 u. 성분에 대한 전력이득 패턴은

$$g(\theta, \phi) = \frac{4\pi r_0^2}{\eta} \frac{|E^r(\theta, \phi)|^2}{P_{in}} \quad (57)$$

로 주어지며 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ 은 공간내의 특성 임피던스, P_{in}은 안테나로의 전력입력

$$\begin{aligned} P_{in} &= \text{Re} \{ [\tilde{V}^s] [I^*] \} \\ &= \text{Re} \{ [\tilde{V}^s] [Y] [V^s]^* \} \end{aligned} \quad (58)$$

이다>(*은 공액을 의미한다)

식(48)과 같은 단일 원천의 경우, P_{in}은 간단히 R_c(|V_n|² Y_{nn})이 된다.}

식(56), (58)를 식(57)에 대입하면

$$g(\theta, \phi) = \frac{\eta k^2}{4\pi} \frac{|[\tilde{V}^r(\theta, \phi)] [Y] [V^s]^*|}{\text{Re} \{ [\tilde{V}^s] [Y^*] [V^s]^* \}} \quad (59)$$

을 얻는다.

여기서 [V^r (θ, φ)]는 각 입사각도 θ, φ에 대해 식(55)로 주어진다. 식(59)는 단지 복사장의 단일 편파에 대한 이득패턴이다. 총 전력이득 패턴을 구하고자 하면 두 직교하는 편파에 대한 g를 함께 추가해야 할 것이다.

선형 선소 안테나에 대한 계산이 본 질의 수식을 이용하여 수행되었으며 좋은 결과가 구해진다. 복사패턴과 같은 원거리장의 양에 대해, 파장당 10개 구간 정도로도 좋은 결과가 얻어진다. (복사패턴은 연속 선형 범함수들이며, 다시 말해, 이들은 안테나 전류의 가중된 적분에 의존한다) 전류 자체에 대해서는 수렴속도가 느려도 반파장 안테나에 대한 전형적인 결과는 20개에서 40개 구간으로 바꾸는데 약 4% 정도가 변했다. 전류에 대해 계단 근사로 부터 구분적 선형근사까지 변화시킴으로써 빠른 수렴을 얻을 수 있다. 이 수정 방법은 대부분의 계산에 대해

사용되었다. 그림 4가 전형적인 경우이다. 이것은 32구간을 사용한 길이 대 반경 비율이 $74.2(\Omega=2\log L/a=10)$ 인 중앙급전 선형 안테나의 입력 임피던스를 나타낸다.

시험된 점에 대해 식(47)을 사용하였을 때 이것은 64구간 해와 거의 동일하였다. 이것은 Y.Y.Hu의 2계 변분해 및 Hallen의 2번 반복한 방정식에 의한 해와 비교된다. 전도율은 $L>1.3\lambda$ 의 해를 제외하고 거의 일치한다. 이 경우 Hu의 시험상수는 부적절하다. 입력 서셉턴스는 일치하지 않는데, 이는 각 해법들이 간격을 다르게 취급하기 때문인 것으로 예상된다. 본고의 행렬 해는 이것을 하나의 구간로 간주하여 다룬다. Hu의 해는 간극에서 전후의 특이점을 표현할 수 있는 시험함수를 포함하지 않으므로 낮은 gap capacitance를 발생한다. King-Middleton 법은 반복 과정이므로 B는 반복연산의 수에 의존한다.

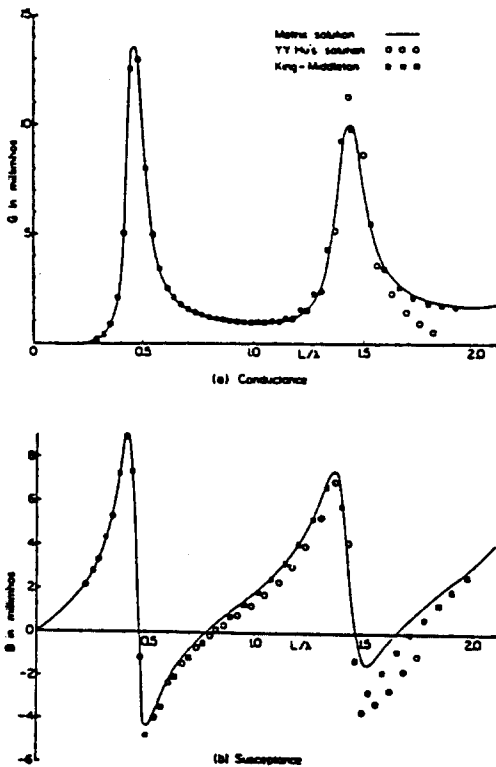


그림 5. 길이 L과 직경 L/74.4인 중앙급전 선소 안테나의 입력 어드미턴스

3. 선소 산란체

이제 평면파 입사장내의 선소 물체에 의해 선란된 장을 생각해 보자. 그림 5는 산란체와 두 개의 떨어져 있는 원천 전류 즉, 송신점 r에서의 I_s 및 수신점 r에서의 I_r 을 나타낸다.

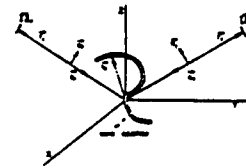


그림 6. 평면파 산란체의 정의

I_s 는 산란체에 다음과 같은 단위 평면파를 발생시키도록 조정된다.

$$E_r = u_r e^{-jkt \cdot r_0} \quad (60)$$

전압여기 행렬 식(24)는 이 때

$$[V'] = \begin{bmatrix} E'(1) \cdot \Delta l_1 \\ E'(2) \cdot \Delta l_2 \\ \vdots \\ E'(N) \cdot \Delta l_N \end{bmatrix} \quad (61)$$

이고, [I]에 의해 발생된 장은 종래의 방법으로 구해진다.

멀리 떨어진 산란장도 안테나 경우에서와 같이 가역정리에 의해 계산된다. 수신점에서의 다이폴 I_r 는 산란체에서 단위 평면파 식(52)를 발생하도록 조정한다. 이때 산란장은 $[V']$ 를 $[V]$ 로 대체하고 식(56)에 의해 구해진다. 즉,

$$E_r = \frac{\omega \mu \epsilon}{j4\pi r} e^{-jkr} [\tilde{V}'] [Y] [V'] \quad (62)$$

관심이 되는 파라미터는 입사파가 전방향 복사에 의해

장 E_r 을 발생시키기에 충분한 전력을 포함하는 영역으로 정의되는 BSCS(Bistatic Scattering Cross Section) σ_i 이다. 이를 방정식으로 표시하면

$$\sigma = 4\pi r^2 |E_r|^2 = \frac{\eta^2 k^2}{4\pi} |[\tilde{V}_r][Y][V_r]|^2 \quad (63)$$

이 된다.

MCS(Monostatic Cross Section)에 대해서는 식(63)에서 $[V_r]=[V]$ 로 한다. CS(Cross Section)은 입사파 및 수신기의 파라미터에 의존한다. 산란행렬을 사용하면 산란체에 대해 더 좋은 표현을 할 수 있다.

또 다른 관심이 되는 파라미터는 입사파의 전력밀도에 대한 총 산란 전력의 비로서 정의되는 SCS(Scattering Cross Section) σ 이다.

[I]에 의해 복사된 총 전력은 임의의 여기에 대해서 식(58)에 의해 주어진다.

입사전력밀도는 $1/\eta$ 이므로

$$\sigma_i = \eta \operatorname{Re} [\tilde{V}_r][Y^*][V_r^*] \quad (64)$$

이 된다. σ_i 는 입사파의 분극에 의존한다.

선형 선소 산란체에 대한 계산은 같은 [Y] 행렬을 안테나에서 처럼 사용하여 행해졌다. 또한 예코영역과 같은 원거리장 양은 파장당 10 구간로 구해진 좋은 결과와 함께 빠른 속도로 수렴한다. 전류의 계산은 원거리장 양보다는 수렴속도가 느리지만, 안테나 상의 전류계산 때 보다는 빠르게 수렴한다. 이는 평면파 산란시 인가 장 E' 가 안테나 문제의 impulsive 인가장과 비교하여 well-behaved 함수이기 때문이다. 그림 7.은 그림 4.의 안테나에 사용된 것과 같은 선소에 대한 예코영역을 보여준다.

그러므로 길이 대 지름비는 74.2이고 32구간 구분적 선형 전류근사가 이용되었다. 이것은 Hu의 2계 변분해법과 비교된다. 또한 $L < 1.3\lambda$ 영역에서 잘 일치하며 Hu의 시험함수는 적절하고 $L > 1.3\lambda$ 에 대해서는 약간 일치하지 않는 것을 볼 수 있다.

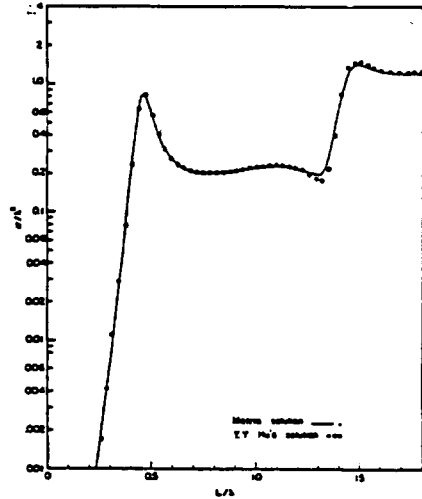


그림 7. 길이 L과 직경 L/72.4인 선소산란체의 예코영역

IV. 결 론

전자장 이론에서, 일반 회로망의 파라미터로 해를 표현하는 것은 매우 일반적이고, 임의의 형상과 임의의 물질을 가진 물체에 적용된다.

임의 모양의 선소에 대한 해는 적절한 미적분 방정식에 대한 1계 해이다. 고차해는 better-behaved 확장 및 / 또는 시험함수를 사용하고 구간 내의 선소의 굴곡을 고려함으로써 구할 수 있다. 일반적인 해는 해석적인 과정 보다는 수치적인 과정을 사용하는 것이 더욱 편리하다는 것을 알게 된다. 이 수치해법 과정은 각 선소 구간을 더 많이 분할하고 [Z]의 요소를 구하기 위해 세분된 부분으로 부터의 결과를 합함으로써 수행될 수 있다.

해의 차수가 증가할 수록 특이점을 다룸으로써 오는 복잡성이 늘어나게 된다. 전류(전하)의 미분은 선소의 끝단과 선소를 따르는 전압 원천지점에서 불연속이 된다. 1계 해에서 이 문제는 정확히 다루어지지 않았으며, 계산은 이 과정이 허용된다는 것을 보여준다. 예를 들면 선소의 끝단에서 해 식(47)은 전하를 1/2 구간 확장된 등가 선 구간으로 다룬다. 실제 전하는 특이점을 갖게되며, 특별한 과정으로 다루어진다. 이 과정이 간단한데 비해 선소를 따르는 전압원천에 대한 비슷한 과정이 일반적인 문제에 대해서는 실제적이지 못하다. 이것은 임피던스 행렬 선소 물체 그 자체의 특성보다 원천의 위치에 의존하

기 때문이다. 경험적으로, 특별히 특이점을 다루지 않은 1계 해가 대부분의 공학적인 목적에 적당하다는 것을 알게 된다. 이는 특히 전류분포의 작은 오차에 대해 비교적 둔감한 복사패턴 및 에코영역과 같은 무한영역 양에 대해서는 사실이다.

많은 다른 전자장 문제가 문헌에서 점 정합을 사용하는 모멘트 법과 근본적으로 같은 과정을 사용하여 다루어져 왔다. 이들 중 일부는 도체 원통주에 의한 산란, 유전체 원통주에 의한 산란, 회전형 물체에 의한 산란이다.