

연속체 손상역학에 따른 구조재료의 유한요소해석

Finite Element Analysis of the Structural Material by the Theory of Continuum Damage Mechanics

김 승 조,* 김 위 대**
S. J. Kim, W. D. Kim

ABSTRACT

A theory of continuum damage mechanics based on the theory of materials of type N was developed and its nonlinear finite element approximation and numerical simulation was carried out. To solve the finite elastoplasticity problems, reasonable kinematics of large deformed solids was introduced and constitutive relations based on the theory of materials of type-N were derived. These highly nonlinear equations were reduced to the incremental weak formulation and approximated by the theory of nonlinear finite element method. Two types of problems, compression moulding problem and pure bending problem, were solved for aluminum 2024.

1. 서 론

자동차나 항공기 등은 그 운용중에 있어서 다양한 하중조건 하에 노출되기 때문에 점진적으로 국부적 손상이 전파되어 종국에 가서는 구조물의 파괴에 이르러 인명과 재산의 피해를 당할 수도 있게 된다. 따라서 자동차와 같이 많은 사람들이 이용하는 구조물들의 설계 시에는 손상허용의 개념이 대단히 중요하게 된다. 즉, 구조물의 설계에 있어서 최종의 단계는 손상허용에 관한 부분의 해석이라 할 수 있는데 아직까지 이 부분에 대해서는 정확한 설계지침이 확립되어 있지 못한 실정이다. 이는 재료가 손상을 입어가는 과정이 아직 정확히 규명되어 있지 못한 이유와 재료의 손상진전에 대한 적절한 모델이 구성되지 못한 이유,

그리고 이들 손상진전에 대한 실험의 어려움 등에 기인한다고 볼 수 있을 것이다. 이에 대해 재료과학이나 응용역학 분야에서 연구하고 있는 연구자들은 손상해석의 문제를 해결하기 위해 그간 많은 연구를 수행해오고 있는 상황인데, 아직도 그 연구결과들이 실제 상황에 응용되기에는 많은 괴리감이 있다고 할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 좀더 실제상황에 접근할 수 있는 손상모델을 제시하고자 한다.

거시적 관점에서 재료의 손상이 진전되어 간다는 것은 직관적으로 알 수 있으나 비손상 재료가 손상을 입어가는 전 과정은 명확하지가 않다. 이에 대해 연속체 손상역학의 입장에서 재질내의 균열의 분포를 어느정도 균일한 것으로 보고 연속체역학의 접근방법을 사용하고 있다. 이러한 연속체손상역학은 탄,

* 서울대학교 공대 항공우주공학과

** 서울대학교 공대 대학원 항공우주공학과

소성학과 파괴역학 사이의 전이상태에 대한 수학적 모델을 제공해 주는 것으로 근간에 와서 Kachanov¹⁾를 효시로 재료의 내부상태를 손상변수로 표시하는 연구가 활발히 진행되고 있다.

많은 연구자들^{2~9)}은 각기 스칼라, 벡터 그리고 텐서량으로 손상변수를 표시하여 손상해석을 수행하였는데 스칼라로 손상을 표시한 경우는 균열의 방향성을 고려할 수 없는 문제점을 지니고 있고 벡터의 경우는 방향성을 고려할 수 있으나 근본적으로 물리적 의미를 포함시키기 곤란하며, 텐서로 손상을 기술한 경우는 손상의 물리적 의미를 충분히 내포할 수 있으나 실제 상수들을 결정하거나 각 방향으로의 손상변수를 규명하기는 그리 간단한 문제가 아니다.

따라서 본 연구에서는 손상모델을 텐서로 기술하고 실제 연성재질에 부합하는 등방성 손상에 대해 언급하기로 한다. 이러한 손상모델은 자동차의 충돌, 단조 등에 의한 소성가공 등을 해석하는데 유용하게 사용되어 질 수 있을 것으로 본다.

2. 손상 이론

2.1 운동학(Kinematics)

대변형을 고려하기 위하여 Total Lagrangian의 개념에서 새로운 운동학을 정의하기로 한다.

물체 B 가 공간 R^3 상에서 움직일 때 B 상의 임의의 점 X 가 위치벡터 \mathbf{X} 에 의해 고정 기준축(Fixed reference frame)에 대해서 기술된다고 보자.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0 : B \rightarrow R^3 \\ \mathbf{X} = \mathbf{k}_0(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

이때 사상 $\mathbf{k}_0(B)$ 의 상 C_0 를 기준형상(Reference configuration)이라 하면 시간 t 에서 X 의 공간좌표 \mathbf{x} 는 다음의 식에 의해 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \\ \mathbf{X} \in C_0, t \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 \mathbf{X} 는 C_0 에서 R^3 로 가는 가역변환이며 $\chi(\mathbf{X}, t)$ 의 상을 현재형상(Spatial configuration 또는 Current configuration) C_t 라 부르자. 이때 변형도구배텐서 \mathbf{F} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \chi = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}} \quad (2)$$

극분해(Polar decomposition)에 의해 변형도구배텐서 \mathbf{F} 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (3)$$

여기서 $\mathbf{U}(\mathbf{V})$ 는 우(좌) 신장텐서(Right(Left) stretch tensor)이고 \mathbf{R} 은 양정치 직교회전텐서(Positive definite orthogonal rotation tensor)이다.

Fig.1처럼 C_{t-} 를 회전자유형상(Rotation free configuration)이라 하면

$$\overline{\mathbf{O}A}_{C_0} = \mathbf{X} + \Delta \mathbf{X} \quad (4)$$

이고

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{O}A}_{C_{t-}} &= \mathbf{x} + \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{x} \\ &= \chi(\mathbf{X}, t) + \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \Delta \mathbf{X} \\ &\quad + \mathbf{W}_1(\mathbf{X}, t, \Delta \mathbf{X}) \end{aligned} \quad (5)$$

이며 여기서 \mathbf{W}_1 은 다음과 같이 정의된다.

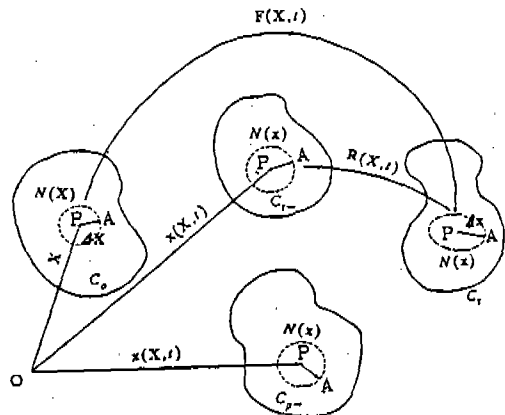


Fig.1 Configurations by the right polar decomposition

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|\Delta x\|} \|\mathbf{W}_1(\mathbf{x}, t, \Delta \mathbf{x})\| = 0 \quad (6)$$

또한 초기응력상태 σ_0 에서의 회전자유상태인 C_p -를 생각하면

$$\begin{aligned} \overline{O A}_{p-} &= \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{U}^p(\mathbf{X}, t) \Delta \mathbf{X} \\ &+ \mathbf{W}_2(\mathbf{X}, t, \Delta \mathbf{X}) \end{aligned} \quad (7)$$

이고 \mathbf{W}_2 는 앞에서 정의된 \mathbf{W}_1 과 유사한 의미로 정의된다.

이제 탄성신장텐서(Elastic stretch tensor) \mathbf{U}^e 를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^e(\mathbf{X}, t) \Delta \mathbf{X} - \Delta \mathbf{X} &= \overline{O A}_{C_p} - \overline{O A}_{C_p} \\ &= [\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{U}^p(\mathbf{X}, t)] \Delta \mathbf{X} + \mathbf{W}_1(\mathbf{X}, t, \Delta \mathbf{X}) \\ &- \mathbf{W}_2(\mathbf{X}, t, \Delta \mathbf{X}) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\Delta \mathbf{X} \rightarrow 0$ 이면

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^e + \mathbf{U}^p - \mathbf{I} \quad (9)$$

이고 식(3)은 다음과 같다.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{U}^e + \mathbf{R}\mathbf{U}^p - \mathbf{R} \quad (10)$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}' + \mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}^e\mathbf{U}^{-1} + \dot{\mathbf{U}}^p\mathbf{U}^{-1})\mathbf{R}' \quad (11)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}|_{sym} = \mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}^e\mathbf{U}^{-1}|_{sym} + \dot{\mathbf{U}}^p\mathbf{U}^{-1}|_{sym})\mathbf{R}' \quad (12)$$

탄, 소성변형률을 다음과 같이 정의하면

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{U}}^e\mathbf{U}^{-1}|_{sym} \quad (13)$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{U}}^p\mathbf{U}^{-1}|_{sym} \quad (14)$$

$$\mathbf{R}'\mathbf{D}\mathbf{R} = \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}} \quad (15)$$

탄, 소성변형텐서는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\mathbf{E} = \int_0^t \dot{\mathbf{U}}^e\mathbf{U}^{-1}|_{sym} dt \quad (16)$$

$$\mathbf{P} = \int_0^t \dot{\mathbf{U}}^p\mathbf{U}^{-1}|_{sym} dt \quad (17)$$

2.2 N형 재료이론

N형 재료이론¹⁰⁻¹³⁾은 다음의 장방정식들과 두개의 포텐셜을 도입하는데 이를 간단히 쓰면 다음과 같다.

* 질량 보존(Conservation of mass)

$$\rho \text{Det } \mathbf{F} = \rho_0 \quad (18)$$

* 선 및 각 운동량 보존(Balance of linear and angular momentum)

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{x}} \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t \quad (20)$$

* 에너지 보존(Conservation of energy)

$$\rho \dot{e} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}) - \text{div } \mathbf{q} + \rho r \quad (21)$$

* 엔트로피 생성법칙(Law of entropy production-Clausius-Duhem inequality)

$$\rho \dot{\eta} + \text{div } \frac{\mathbf{q}}{\theta} - \rho \frac{r}{\theta} \geq 0 \quad (22)$$

여기서 ρ_0 는 고정기준축에 대한 밀도, ρ 는 밀도, $\boldsymbol{\sigma}$ 는 Cauchy 응력, \mathbf{b} 는 단위질량당 체적력, e 는 비내부에너지(Specific internal energy) \mathbf{q} 열류벡터(Heat flux vector), r 은 단위시간, 단위질량당 공급열, η 은 비엔트로피(Specific entropy), 그리고 θ 는 절대온도이다. 여기서 내부에너지 대신 자유에너지 밀도함수(Free energy density function) ϕ 를 도입하자.

$$\phi = e - \eta\theta \quad (23)$$

또한 시간 t 에서 각 질점 $\mathbf{x} \in B$ 에 대해 자유에너지 ϕ , 응력 Σ , 엔트로피 N , 열류 \mathbf{Q} 등의 함수가 $(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d})$ 들로 표현될 수 있다는 가정을 도입하자.

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \Sigma(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \eta &= N(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}) \\ \mathbf{q} &= \mathbf{Q}(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (25)$$

그리고 포텐셜의 존재를 가정하자. 우선 물리량들 $\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}$ 가 존재하는 함수공간을 \mathbf{W} 라 하자. 그러면 포텐셜 ϕ 는 공간 \mathbf{W} 에서 실수공간으로 사상되는 범함수로서 다음과 같이 표시된다.

$$\psi : W \rightarrow (-\infty, \infty] \quad (26)$$

즉,

$$\dot{P} = - \frac{\partial \psi}{\partial S} \quad (27)$$

$$\dot{d} = - \frac{\partial \psi}{\partial D} \quad (28)$$

$$\dot{\alpha} = - \frac{\partial \psi}{\partial A} \quad (29)$$

식(21)과 (22)에서 r 을 소거하고 (23)식을 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\sigma : L - \rho \dot{\phi} - \rho \dot{\theta} \eta - \frac{1}{\theta} q \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (30)$$

또한 사상: $(E, \theta, g, \alpha, d) \rightarrow \phi(E, \theta, g, \alpha, d)$ 가 각 요소에 대해 C^1 을 만족한다면 자유 에너지의 변화율은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial \phi}{\partial E} : \dot{E} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \phi}{\partial g} \cdot \dot{g} + \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} : \dot{\alpha} \\ &+ \frac{\partial \phi}{\partial d} \cdot \dot{d} \end{aligned} \quad (31)$$

식(15)와 (31)을 (30)에 대입하면

$$\begin{aligned} (S - \rho \frac{\partial \phi}{\partial E}) : \dot{E} + S : \dot{P} - \rho (\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \eta) \dot{\theta} \\ - \rho \frac{\partial \phi}{\partial g} \cdot \dot{g} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} : \dot{\alpha} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial d} \cdot \dot{d} \\ - \frac{1}{\theta} q \cdot \nabla \theta \geq 0 \end{aligned} \quad (32)$$

를 얻는다. 이때 Dierie 응력 S 를 도입하자.

$$S = R' \sigma R \quad (33)$$

이의 시간미분형은

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \dot{R}' \sigma R + R' \dot{\sigma} R + R' \sigma \dot{R} \\ &= R' (\dot{\sigma} - \omega \sigma + \sigma \omega) R \end{aligned} \quad (34)$$

이고 여기서 ω 는

$$\omega = \dot{R} R' = - R \dot{R}' \quad (35)$$

이다. 여기에서 공칭응력률(Objective stress

rate) $\bar{\sigma}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\bar{\sigma} = R \dot{S} R' = \dot{\sigma} - \omega \sigma + \sigma \omega \quad (36)$$

여기에서 $\dot{\sigma}$ 는 C_t 에서의 응력률이고 \dot{S} 는 C_t -에서의 응력률이다.

이상의 결과로부터 다음의 식들을 얻을 수 있다.

$$S = \rho \frac{\partial \phi}{\partial E} \quad (37)$$

$$\eta = - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (38)$$

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial g} \quad (39)$$

$$S : \dot{P} - A : \dot{\alpha} - D : \dot{d} - \frac{1}{\theta} q \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (40)$$

여기에서 열역학적 컬레힘 A 와 D 는 다음과 같이 정의된다.

$$A = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \quad (41)$$

$$D = \rho \frac{\partial \phi}{\partial d} \quad (42)$$

2.3 포텐셜

Bodner 와 Partom^{14, 15)}은 현상적인 관찰을 통하여 고전적 Prandtl-Reuss 의 유동법칙을 수정한 새로운 유동법칙을 제안하였는데, 본 연구에서는 이 이론을 수정하여 손상효과를 고려할 수 있는 형태로 변환하였다. 또한 Lemaitre⁷⁾의 개념처럼 손상의 진전에 따른 강성의 저하를 고려하기 위해 다음과 같은 자유에너지 함수를 도입한다.

* 자유에너지 밀도함수

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{(1-d)}{2\rho_0} \{ [\lambda(\text{tr}E)^2 + 2\mu \text{tr}E^2] + h_{1z} \\ &+ \frac{1}{m} (h_1 - h_0) \exp(-mz) \} \end{aligned} \quad (43)$$

* 유동 포텐셜

$$\psi = D_0 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(2h^2)^i}{3^i i! (2i-1) J_2^{i-1/2}} - C_1 D^2 \exp\left(\frac{1}{1-d}\right) \quad (44)$$

여기에서 내부상태변수 α 와 d 를 등방성 손상
으로 보고 스칼라량으로 표시하면 다음과 같다.

$$\alpha = z1 \quad (45)$$

$$d = d1 \quad (46)$$

이에 대응되는 결체힘들은 다음과 같이 표시
된다.

$$A = h1 \quad (47)$$

$$D = D1 \quad (48)$$

식 (45)~(48)들은 소성변형과 손상현상이 등방성
임을 시사하고 있으며, J_2 는 S' 즉 회전자
유편차응력 (Deviatoric rotation free stress)
의 2차 불변량을 의미한다.

식들 (27)~(29)와 포텐셜 (43)~(44), 그리고 (37)~
(39) 식들을 이용하면 다음의 비선형구성방정식
들을 얻을 수 있게 된다.

$$S = \rho \frac{\partial \phi}{\partial E} = \frac{\rho}{\rho_0} (1-d) [\lambda (\text{tr} E) I + 2\mu E] \quad (49)$$

$$D = \rho \frac{\partial \phi}{\partial d} = \frac{\rho}{2\rho_0} [\lambda (\text{tr} E)^2 + 2\mu (\text{tr} E^2)] \quad (50)$$

$$h = \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\rho}{2\rho_0} [h_1 + (h_0 - h_1) \exp(-mz)] \quad (51)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial \psi}{\partial S} = D_0 \frac{1}{2h\sqrt{J_2}} \exp\left(-\frac{Bh^2}{J_2}\right) S' \quad (52)$$

$$\dot{d} = -\frac{\partial \psi}{\partial D} = C_1 D \exp\left(\frac{1}{1-d}\right) \quad (53)$$

$$\dot{z} = -\frac{\partial \psi}{\partial h} = \frac{1}{h} S' : P \quad (54)$$

3. 유한요소 정식화

이상에서 유도된 비선형 방정식들을 풀기 위
해서 체적력과 온도효과 등을 무시하고 Total
Lagrangian의 개념에 의한 증분이론¹⁶⁾을 도
입하여 평형방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\nabla_x \cdot T = 0 \quad \text{in } C_0 \quad (55)$$

여기서 T 는 1차 Piola-Kirchhoff 응력이고
Cauchy 응력 σ 와 Dienes 응력 S 와의 관계는
다음과 같다.

$$T = J F^{-1} \sigma (F^{-1})^t \\ = J R S U^{-1} \quad (56)$$

가용변위장에 포함되는 q 를 시험함수로 하
여 식(55)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega_0} T : \nabla q \, dx = \int_{\partial \Omega_0} T N \cdot q \, ds \quad (58)$$

여기에서 $\Omega_0 \equiv k_0(B)$, $\partial \Omega_0$ 는 Ω_0 의 경계, 그
리고 N 은 C_0 에서의 외향 수직 단위벡터이다.
평형상태가 $(n-1)$ 번째 증분단계에서 도달
되었다면

$$\int_{\Omega_0} T_{n-1} : \nabla q \, dx = \int_{\partial \Omega_0} T_{n-1} N \cdot q \, ds \quad (59)$$

로 쓸 수 있고, (n) 번째 단계에 대해

$$T_n = \sum_{i=1}^n \Delta T_i = T_{n-1} + \Delta T_n \quad (60)$$

$$t_n = \sum_{i=1}^n N = t_{n-1} + \Delta t_n \quad (61)$$

$$\int_{\Omega_0} \Delta T_n : \nabla q \, dx = \int_{\partial \Omega_0} \Delta t_n \cdot q \, ds \quad (62)$$

로 쓸 수 있다. 식 (56), (15), (33)으로부터 다음
의 관계를 얻는다.

$$\Delta T = \Delta (J R S U^{-1}) \\ = \Delta (\lambda (\text{tr} E) F^{-t} + 2\mu R E U^{-1}) \\ = \lambda (\text{tr} \Delta E) F^{-t} + 2\mu R \Delta E U^{-1} \\ + \lambda (\text{tr} E) \Delta F^{-t} \quad (63)$$

다시 식(15)와 (63)으로부터

$$\int_{\Omega_0} [\lambda \text{tr} (\Delta t D_n^i) I + 2\mu \Delta t D_n^i] (F^{-t})_n^{i-1} : \nabla q \, dx \\ = \int_{\Omega_0} [\lambda \text{tr} (\Delta P) F^{-t} \\ + 2\mu (R \Delta P U^{-1})]_n^{i-1} : \nabla q \, dx \\ - \int_{\Omega_0} [\lambda \text{tr} (E) \Delta F^{-t} + 2\mu (\Delta R E U^{-1})$$

$$+ RE\Delta U^{-1})]_n^{i-1} : \nabla q \, dx + \int_{\partial\Omega_0} t_n^i : q \, ds - \int_{\Omega_0} T_n^{i-1} : \nabla q \, dx \tag{64}$$

를 얻을 수 있다. 여기서

$$\Delta P_n^{i-1} = \frac{\partial \Delta P}{\partial \Delta U} \Big|_n^{i-1} \Delta U_n^i \tag{65}$$

$$\Delta R_n^{i-1} = \frac{\partial \Delta R}{\partial \Delta U} \Big|_n^{i-1} \Delta U_n^i$$

$$P_n = P_{n-1} + \sum_i^M \Delta P_n^i \tag{66}$$

이다.

이제 각 증분단계에서 미지함수 Δu_n^i 와 시험함수 q 를 내삽하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta u_n^i = u_\alpha \phi_\alpha(\mathbf{X}), \quad u_\alpha = \begin{Bmatrix} u_\alpha^1 \\ u_\alpha^2 \end{Bmatrix} \tag{67}$$

$$q = q_\alpha \phi_\alpha(\mathbf{X}), \quad q_\alpha = \begin{Bmatrix} q_\alpha^1 \\ q_\alpha^2 \end{Bmatrix} \tag{68}$$

여기에서 $\phi_\alpha(\mathbf{X})$ 는 형상함수이다. 따라서 구하고자 하는 해는 다음 식으로 표시된다.

$$u_n = u_{n-1} + \sum_{i=1}^M \Delta u_n^i \tag{69}$$

이때 M 은 반복계산의 횟수를 나타낸다.

이상의 연립방정식들은 대역피 해법에 의해 해가 구해지며, 구해진 u 를 구성방정식 (49)~(54)들에 대입하여 응력분포와 손상진전해석을 수행하게 된다. 이상에서 유도된 식들에 대한 자세한 언급은 참고문헌 [17, 18, 19]를 참조할 수 있다.

4. 해석결과 및 토의

이상 살펴본 바와 같이 본 연구에서는 N형 재료이론을 근간으로 비선형 구성방정식들을 이끌어냈으며, 이를 풀기 위해 Total Lagrangian의 개념에서 증분이론을 사용하여 유한요소 정식화를 수행했고, 해법으로는 Newton-Raphson 방법을 택했다. 앞의 식 (49)~(54)는

8개의 재료상수를 포함하고 있는데 이들은 참고문헌 [19]의 실험결과를 사용하였으며 그 값들은 Table 1에 나타내었다.

수치계산 예로는 첫째 압축하중을 받는 Billet Moulding 문제, 둘째 순수 굽힘력을 받는 보문제를 다루었다. 이들의 재질은 모두 알루미늄 2024이며 계산시 4CST 요소를 64개 사용하였고, 총 질점수는 149개, 그리고 하중율(Loading rate)은 0.4mm/100steps 이었다.

Fig. 2는 압축문제의 유한요소 모델이며, 뒷면에 분포 압축력이 가해지고 있다. Fig. 3은 각 단계별 변형된 형상이며 Fig. 4는 각 단계별 손상변수의 진전과정을 도시한 것이다. 그림에서 보듯이 변형구배가 가장 큰 곳에서 손상영역이 확대되고 있음을 알 수 있고 실제 단조나 압연시에 어느 부분이 가장 결함이 생길 여지가 많은지를 예측할 수 있을 것으로 보인다. Fig. 5는 손상변수의 값을 등고선의 형식으로 표시한 것이고, Fig. 6, Fig. 7, Fig. 8 들은 각각 전단응력, X, Y방향의 수직응력분포를 나타낸다.

Fig. 9는 굽힘문제의 유한요소 모델이며, Fig. 10은 각 단계별 변형된 형상을 나타낸다. Fig. 11은 각 단계별 손상변수의 진전과정을 나타낸 것인데 마찬가지로 변형구배가 큰 곳에서 손상영역이 확대되고 있음을 알 수 있다.

Table 1 Mechanical properties of Aluminum 2024

Young's Modulus	E	7.24×10^{10} Pa
Poisson's Ratio	ν	0.33
Shear Modulus	G	2.76×10^{10} Pa
Initial damage threshold	D_0	$1.35 \times 10^7 \text{sec}^{-1}$
Hardening constant	m	25
Initial Hardness constant	h_0	115 Pa
Ultimate Hardness constant	h_1	145 Pa
Dimension order	n	1
Damage constant	c_1	0.00019

Fig.12는 손상변수의 값들을 등고선의 형식으로 나타낸 것이다. Fig.13, Fig.14, Fig.15들은 각각 전단응력 X, Y방향의 수직응력분포를 나타내고 있다.

이상의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 변형된 형상에서 알 수 있듯이 본 모델이 제안한 운동학(Kinematics)은 대변형의 상태를 잘 묘사할 수 있다.

(2) 본 손상모델은 동방손상을 가정할 수 있는 연성재질의 손상진전을 적절히 예측할 수 있다.

본 손상모델은 많은 실험결과들을 토대로 앞으로 자동차의 충돌이나 단조와 같은 소성변형문제 등의 손상 해석으로 확장해 갈 수 있을 것으로 기대된다.

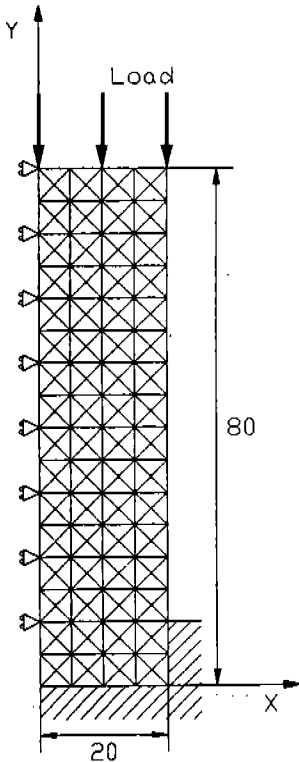


Fig.2 Finite element model for billet compression moulding

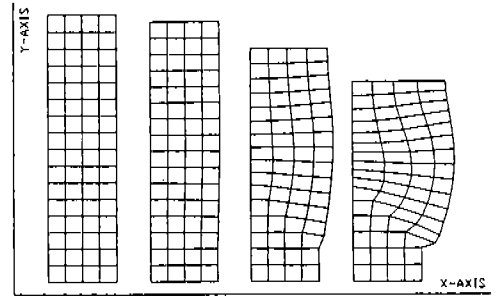


Fig.3 Initial and deformed shapes of the model

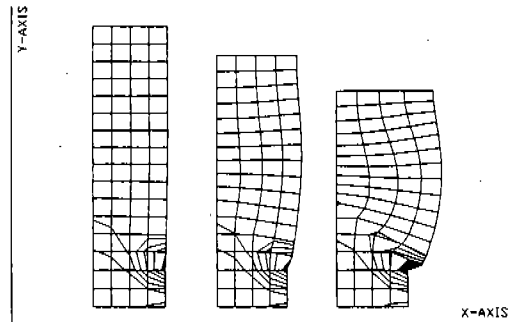


Fig.4 Damage progression according to the loading steps

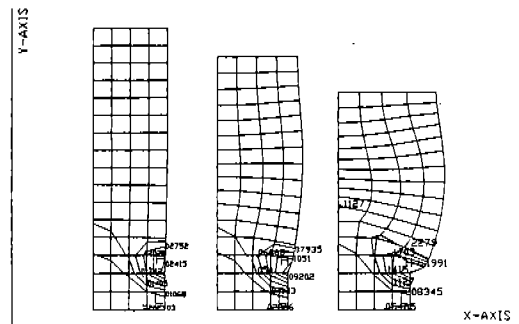


Fig.5 Damage progression contour according to the loading steps

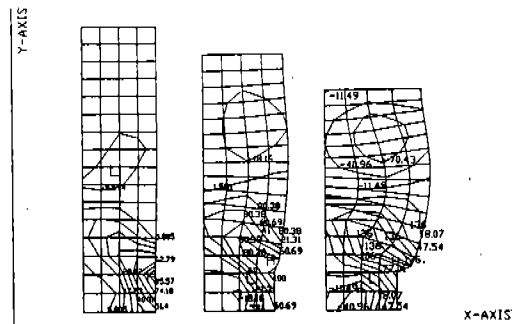


Fig.6 Shear stress distribution according to the loading steps

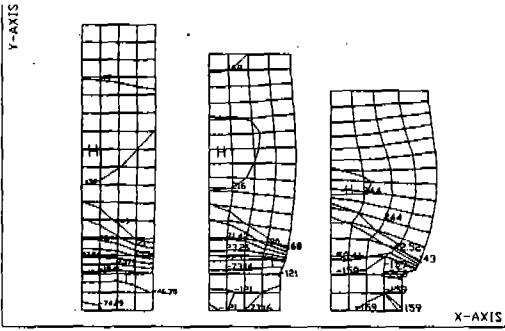


Fig. 7 X-direction normal stress distribution

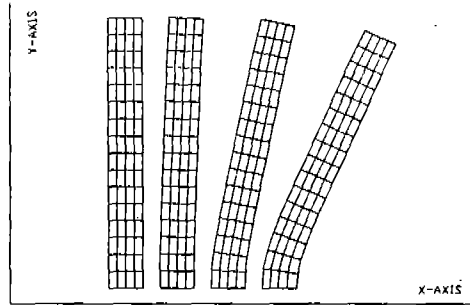


Fig. 10 Initial and deformed shapes of the model

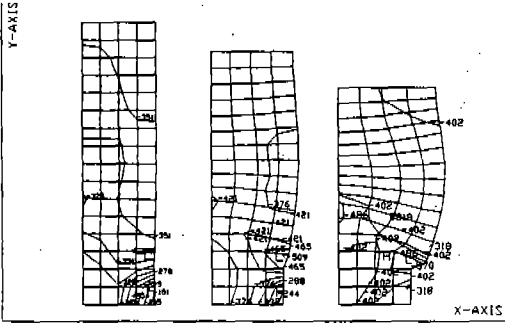


Fig. 8 Y-direction normal stress distribution

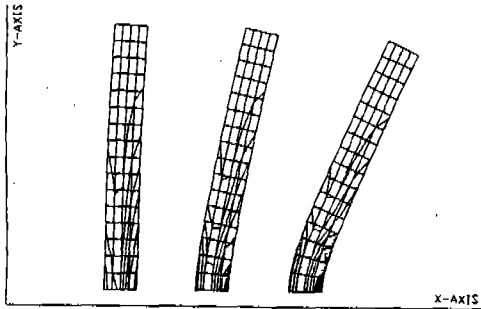


Fig. 11 Damage progression according to the loading steps

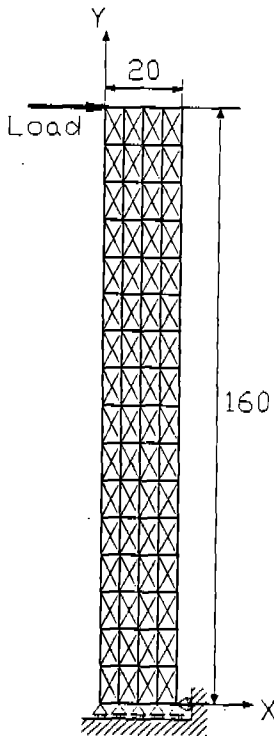


Fig. 9 Finite element model for pure bending model

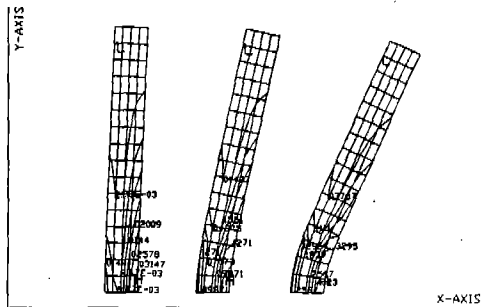


Fig. 12 Damage progression contour according to the loading steps

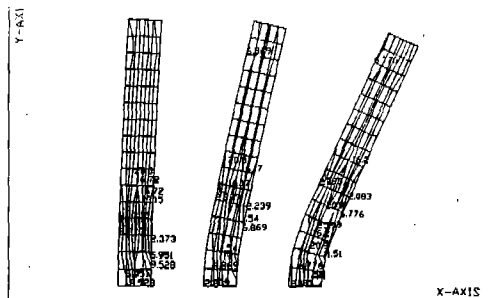


Fig. 13 Shear stress distribution according to the loading steps

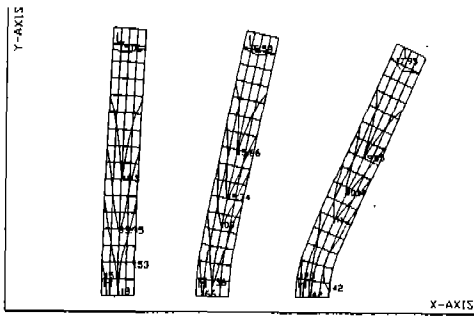


Fig. 14 X-direction normal stress distribution

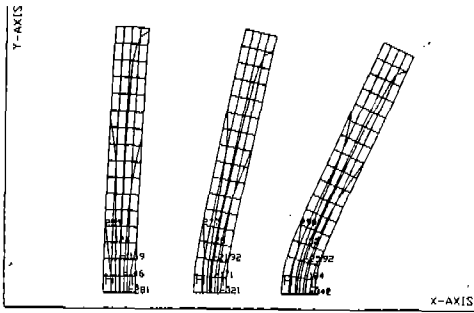


Fig. 15 Y-direction normal stress distribution

후 기

본 연구는 한국 학술진흥재단의 '90자유 공
모과제 연구지원에 의해 연구되었음을 밝히며,
이에 심심한 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

1. M.L. Kachanov, "On the Creep Fracture Time", *Izv. Akad. Nauk. SSR*, Vol. 8, pp. 26-31, 1958.
2. J.L. Chaboche, "Application of the Continuous Damage Approach to the Prediction of High Temperature Low-Cycle Fatigue, High Temperature Alloys for Gas Turbines", 1978.
3. D. Krajcinovic and G.U. Fonseka, "The Continuous Damage Theory of Brittle Materials, Part 1; General Theory", *J. Appl. Mech.*, Vol. 48, pp. 809-815, 1981.
4. P.J. Rabier and J.T. Oden, "Some Remark on Damage Theory", Ticom Report 88-11, 1988.
5. J.L. Chaboche, "Continuous Damage Mechanics - A Tool to Describe Phenomena before Crack Ignition", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 64, pp. 232-247, 1981.
6. D. Krajcinovic, "Continuum Damage Mechanics", *Appl. Mech. Reviews (AMR)*, Vol. 37, No. 1, pp. 1-6, 1984.
7. J. Lemaitre, "Coupled Elasto-Plasticity and Damage Constitutive Equations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 51, pp. 3149, 1985.
8. L.M. Kachanov, Introduction to the Continuum Damage Mechanics, Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
9. C.L. Chow and J. Wang, "An Anisotropic Theory of Elasticity for Continuum Damage Mechanics", *Int. J. Fracture* Vol. 33, pp. 3-16, 1987.
10. S.J. Kim and J.T. Oden, "Generalized Potentials in Finite Elastoplasticity", *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 22, No. 11/22, pp. 1235-1257, 1984.
11. S.J. Kim and J.T. Oden, "Finite Element Analysis of a Class of Problems in Finite Elastoplasticity based on the Thermodynamical Theory of Materials of Type-N", *Comp. Maths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 53, pp. 277-302, 1985.
12. S.J. Kim and J.T. Oden, "Generalized Potentials in Finite Elastoplasticity, II. example", *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 23, No. 5, pp. 515-530, 1985.
13. S.J. Kim and J.T. Oden, "A Note on the Numerical Analysis of Material Damage based on the Theory Materials of Type N", *Comp. Math. Applic.*, Vol. 15, No. 3, pp. 169-174, 1988.
14. S.R. Bodner and Y. Partom, "A Large

- Deformation elastic-viscoplastic analysis of a thick-walled spherical shell”, *ASME, J. Appl. Mech. Trans.*, Vol. 39, pp. 751-757, 1972.
15. S.R. Bodner and Y. Partom, “Constitutive Equations for Elastic – Viscoplastic Strain Hardening Materials”, *ASME, J. Appl. Mech. Trans.*, Vol. 42, No. 2, pp. 385-389, 1975.
 16. Oden, J.T., “*Finite Elements of Non-linear Continua.*”, McGraw-Hill Ad. Eng. Ser., 1972.
 17. 박승배, 김승조, 김위대, 이해경, “반복 하중에 따른 재료의 손상변수 규명과 손상해석에 관한 연구 (I)”, 한국항공우주학회지, 제 18권 2호, pp.39~49, 1990.
 18. 김승조, 박승배, 김위대, 이해경, “반복 하중에 따른 재료의 손상변수 규명과 손상해석에 관한 연구 (II)”, 한국항공우주학회지, 제 18권 2호, pp.50~59, 1990.
 19. S.J.Kim and W.D. Kim, “Material Characterization and Finite Element Analysis by the Theory of Continuum Damage Mechanics”, *28th JSASS conference proceedings*, pp: 80-83, 1990.