

충격하중을 받는 유한평판의 3차원 동탄성이론에 의한 응력해석
 - 충격하중 함수근사식의 제안을 중심으로 -

An Analytical Study of Impulsive Stresses in a Finite Plate Subjected Impact Load using the Three-Dimensional Dynamic Theory of Elasticity
 - Based on a Suggestion of Approximate Equation of Impact Load Function -

양 인 영*, 김 선 규**, 박 정 수**
 I. Y. Yang, S. K. Kim, C. S. Park

ABSTRACT

In this paper, an attempt is made to analyze the impulsive stress directly underneath the concentrated impact point for a supported square plate by using the three-dimensional dynamic theory of elasticity and the potential theory of displacement (stress function) on the supposition that the load, $F_0 \sin \omega t$, acted on the central part of it.

The results obtained from this study are as follows:

1. The impulsive stresses cannot be analyzed directly underneath the acting point of concentrated impact load in previous theories, but can be analyzed by using the three-dimensional dynamic theory of elasticity and the potential theory of displacement.
2. Theoretically, with increasing the pulse width of applied load, it was possible to clarify that the amount of stress in the point of concentrated impact load was increased and that of stress per unit impulse was decreased.
3. The numerical inversion of laplace transformation by the use of the F.F.T algorithm contributes the reduction of C.P.U time and the improvement of the accuracy of results.
4. In this paper recommended, it is found that the approximate equation of impact load function $P(\tau) = A\tau \exp(-B\tau)$, and $P(\tau) = 0.85A \exp(-B\tau) \sin C\tau$ could actually apply to all impact problem. In compared with the experimental results, the propriety of the analytical method is reasonable.

기 호 설 명

$2a$: Length of plate

$2c$: Applied area of uniformly distributed load

c_1 : Longitudinal propagation velocity

c_2 : Transverse propagation velocity

E : Modulus of elasticity

$f(t)$: Impact load

G : Modulus of shear elasticity

h : Plate thickness

H : Unit step function

* 정회원, 조선대학교 공과대학 기계설계공학과

** 조선대학교 대학원 기계공학과

- p : Laplace transform parameter
 $P(\tau)$: Nondimensional impact load
 q_0 : Uniformly distributed load
 u, v, w : Displacement components of x, y and z direction
 γ : Real part of Laplace parameter
 $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: Shear strain components in Cartesian coordinates
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$: Normal strains components in Cartesian coordinates
 ν : Poisson's ratio
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Normal stresses components in Cartesian coordinates
 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: Shear stresses in Cartesian coordinates

1. 서 론

기계의 고속화, 특히 수송기계의 고속화, 우주개발기술의 진보에 따라 평판 및 구조물 부재에 대한 충격문제의 중요성이 재인식되어 많은 연구가 행해져 오고 있다.

일반적으로 판이 충격을 받으면 응력은 파동해서 경계면에 도달하고 경계면에 도달하면 반사와 투과가 반복되어 각점의 응력은 그 점을 통과한 응력파를 중첩시켜서 구해지게 된다. 중첩된 응력파는 순간적으로 응력파가 크게 되어 정하중에서는 예상할 수 없는 응력분포가 형성되고 경우에 따라서는 파괴의 원인이 되기도 한다.

따라서 충격에 의한 판부재의 강도설계상 안정성 확보를 위해서도 충격응력의 해석이 선행되어야 하나, 반무한판의 충격문제에 있어서는 이론적 및 실험적인 연구¹⁻⁴⁾가 행해져 왔으나 유한판의 경우에는 아직도 해명되지 못한 점이 많다⁵⁾

더욱이 이제까지 평판의 응력해석에 주로 이용되고 있는 Lagrange의 고전판이론이나 여기에 전단변형의 영향을 고려한 Reissner의 식 및 회전판성과 전단변형을 고려함으로써 수정된 Mindlin의 식으로는 집중충격 하중작용점하에서는 응력의 해가 발산하기 때문에^{6,7)}

응력을 해석할 수가 없다.

따라서 최근 저자⁸⁾가 판이론으로는 해석할 수 없는 집중충격 하중작용점에서의 충격응력을 해석할 수 있는 충격응력해석 방법을 제안하였다. 그러나 충격응력의 해석시에 제안한 충격하중의 함수근사식이 실제의 현상에 비해 너무 과대평가된 결과 이론해석 결과와 충격 실험결과 사이에 상당한 오차가 발생하였다.

따라서 본 연구에서는 실제충격현상에 보다 잘 근사시킬 수 있는 새로운 충격하중의 함수근사식을 제안하여 어떠한 충격조건에서도 충격강도를 정확히 해석할 수 있는 평판의 충격응력해석방법, 특히 새로운 충격하중 근사식을 제안하고자 한다. 또한 본 연구에서는 직각좌표계를 이용한 3차원 동탄성 이론에 의한 충격응력을 해석코자 한 것으로, 변위의 방정식을 풀기 위하여 응력함수를 도입하였고 3차원 동탄성이론에서는 Laplace 역변환이 곤란하므로⁹⁾ 고속 Fourier 변환의 알고리즘을 이용하였다.¹⁰⁾

본 연구에서는 먼저 평판의 응력해석에 가장 널리 사용되는 강판(정방형)의 한 중앙에 $F(t) = F_0 \sin \omega t$ 라는 정현파가 단순지지된 평판에 작용하는 것으로 가정하여 pulse 폭의 크기에 따른 충격응력의 크기에 관해 이론적으로 해석하고, 본 응력해석방법이 평판의 강성, 충돌체의 질량, 충돌속도 등에 관계없이 모든 충격범위에 적용 가능하도록 충격하중 함수근사식을 제안하여 충격하중 작용점에서의 충격응력을 해석한다. 또한 수치 Laplace 역변환시 이용한 F. F. T. 알고리즘의 계산정도, 계산시간의 감소 등에 관해서 고찰한다.

마지막으로 본 연구에서는 새로 제안한 충격하중 함수근사식의 타당성을 확인하기 위하여 고속 혹은 저속충격실험에 의해 얻은 변형율의 계측결과와 비교한다.

시편으로는 강판의 경우는 한번의 충격으로 국부변형이 생겨 많은 시험편이 필요하게 되는 등 실험에 어려운 점이 많아, 비교적 가격이 싸고 구입이 쉬운 Flot 유리판을 사용하였다(실험의 편의를 위해 유리판을 사용한 것은

로 어떠한 재료의 판부재에서도 본 연구의 해석방법이 이용 가능하다).

2. 충격응력해석

Fig.1과 같이 정방형판의 중앙(2c×2c)인 영역내에 등분포하중 $q_0 f(t)$ 가 작용하는 경우를 생각하여 정방형판에 생기는 충격응력을 해석한다. 먼저 3차원동탄성 기초방정식으로 부터 얻어진 변위방정식을 풀기 위하여 변위 potential 이론을 도입하였고, 변위 potential 의 근사해의 형을 가정하여 응력성분과 변위 potential 과의 관계식을 구하고, 이들을 Laplace 변환하여 상미분방정식의 일반해를 구했으며, 미정계수는 정방형판의 상하면의 경계 조건과 Fourier cosine 급수의 전개에 의해 결정하여 수치해석에 의해 계산했다. 또 Fig.1에서 정방형판 중앙의 등분포하중 작용영역 c 를 0으로 수렴시켜 집중하중이 작용하는 것으로 하였고, 여기서 계산된 미정계수를 이용하여 응력과 변위 potential 과의 관계식으로 부터 Laplace 변환영역에서의 응력의 Laplace 변환식을 얻었고, 고속 Fourier 변환에 의한 수치 Laplace 역변환에 의해서 정방형판의 집중충격하중작용점에서 충격응력을 해석했다.

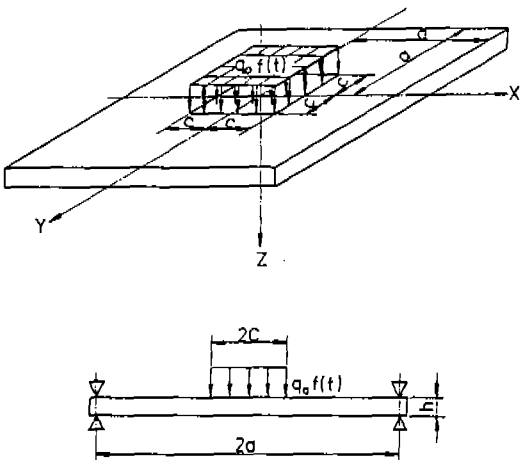


Fig. 1 A Square plate subjected a partial distributed impact load on center

2.1 3차원 동탄성 기초식

정방형판의 중앙에 원점을 잡고 직각좌표 (x, y, z) 에 대응한 변위성분을 (u, v, w) , 수직응력성분을 $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, 전단응력성분을 $(\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ 로 하면 3차원동탄성 평형방정식은 다음과 같다.¹¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

또한 응력성분과 변위성분과의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right), \\ \sigma_y &= 2G \left(\epsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ \sigma_z &= 2G \left(\epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right), \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (2)$$

..... 여기서,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ e &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \end{aligned}$$

이다.

식(2)를 식(1)에 대입하면 다음과 같은 변위의 방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3)$$

여기서

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

이며, G 는 전단탄성계수이다. 식(3)의 변위방정식을 풀기 위하여 변위 potential ($\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$)를 도입하면, 변위성분은 다음과 같다.¹²⁾

$$\begin{aligned} 2G u &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} \\ 2G v &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} - \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} \\ 2G w &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, φ_0 는 회전성분이 0, λ_1 은 x 축 둘레의 회전, λ_2 는 y 축 둘레의 회전인 변위 potential이며, z 축 둘레의 회전성분이 0이므로 $\lambda_3=0$ 으로 한다.

변위성분을 계산하기 위하여 식(4)의 변위 potential의 근사해의 형을 변위 경계조건을 만족하도록 다음과 같이 가정하였다.

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \Phi_{mn} \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \\ \lambda_1 &= \Delta_{mn}^1 \cos \alpha_m x \sin \alpha_n y \\ \lambda_2 &= \Delta_{mn}^2 \sin \alpha_m x \cos \alpha_n y \\ \lambda_3 &= \Delta_{mn}^3 \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, φ_0 는 $x=\pm a, y=\pm a$ 즉, 판의 끝에서 0이며, λ_1 은 $x=\pm a$ 에서, λ_2 는 $y=\pm a$ 에서 0이므로

$$\alpha_m = \frac{\pi(2m-1)}{2a}, \quad \alpha_n = \frac{\pi(2n-1)}{2a}$$

이다. 식(4)를 변위방정식 (3)에 대입하면 $\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2$ 에 대한 지배방정식으로서 다음의 3종류의 파동방정식이 얻어진다.

$$\nabla^2 \varphi_0 = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \lambda_1 = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \lambda_2 = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial t^2} \quad (6)$$

여기서,

$$c_1^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{G}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}$$

이며, ν 는 판의 포와송비, ρ 는 판의 밀도, c_1 은 종파의 전파속도, c_2 는 전단파의 전파속도이다.

또한 변위 potential의 식(4)를 식(2)에 대입하면 응력성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y \partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial z \partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial y \partial z} \right) \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial z^2} \right) \\ \tau_{yz} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z \partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

2.2 Laplace 변환

식(6)을 풀고 난후 식(7)을 이용하면 응력해석이 가능하지만 식(6)은 x, y, z 및 t 에 관한 2계편미분방정식(파동방정식)이기 때문에 먼저 시간 t 에 관한 Laplace 변환을 이용하여 x, y, z 에 관한 상미분방정식으로 변환한다. 충격을 받기전 ($t \leq 0$)에 판은 정지하고 있는 것으로 하면

$$(u, v, w)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \quad (8)$$

식(4)로부터 $\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2$ 에 관한 초기조건은 다음과 같다.

$$(\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2)_{t=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}, \frac{\partial \lambda_1}{\partial t}, \frac{\partial \lambda_2}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad (9)$$

또한 파동방정식 (6)을 위의 초기조건을 이용하여 Laplace 변환하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\varphi}_0 &= \frac{p^2}{c_1^2} \bar{\varphi}_0, & \nabla^2 \bar{\lambda}_1 &= \frac{p^2}{c_2^2} \bar{\lambda}_1, \\ \nabla^2 \bar{\lambda}_2 &= \frac{p^2}{c_2^2} \bar{\lambda}_2 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, p 는 laplace 변환 파라미터이며,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_0 &= \int_0^\infty \varphi_0 e^{-pt} dt, & \bar{\lambda}_1 &= \int_0^\infty \lambda_1 e^{-pt} dt, \\ \bar{\lambda}_2 &= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-pt} dt \end{aligned}$$

이다. 식(5)를 Laplace 변환하여 식(10)에 대입하면 다음과 같은 상미분방정식으로 되며,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\Phi}_{mn}}{dz^2} &= \left(\alpha_m^2 + \alpha_n^2 + \frac{p^2}{c_1^2}\right) \bar{\Phi}_{mn} \\ \frac{d^2 \bar{\Delta}_{mn}^1}{dz^2} &= \left(\alpha_m^2 + \alpha_n^2 + \frac{p^2}{c_2^2}\right) \bar{\Delta}_{mn}^1 \\ \frac{d^2 \bar{\Delta}_{mn}^2}{dz^2} &= \left(\alpha_m^2 + \alpha_n^2 + \frac{p^2}{c_2^2}\right) \bar{\Delta}_{mn}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

일반해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_0 &= \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty [C_1 \exp(\beta_{mnz}) \\ &+ C_2 \exp(-\beta_{mnz})] \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \\ \bar{\lambda}_1 &= \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty [D_1 \exp(\gamma_{mnz}) \\ &+ D_2 \exp(-\gamma_{mnz})] \cos \alpha_m x \sin \alpha_n y \\ \bar{\lambda}_2 &= \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty [E_1 \exp(\gamma_{mnz}) \\ &+ E_2 \exp(-\gamma_{mnz})] \sin \alpha_m x \cos \alpha_n y \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \beta_{mn}^2 &= \left(\alpha_m^2 + \alpha_n^2 + \frac{p^2}{c_1^2}\right), \\ \gamma_{mn}^2 &= \left(\alpha_m^2 + \alpha_n^2 + \frac{p^2}{c_2^2}\right) \end{aligned}$$

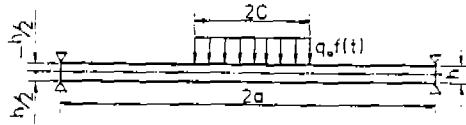


Fig. 2 Boundary condition

이며, $C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$ 는 정방형판의 상하면의 경계조건에 의해 결정되는 미정계수이다. 미정계수를 결정하기 위하여 한변의 길이 $2a$ 이고 판 두께 h 인 정방형판의 중앙에 Fig. 2와 같은 등분포하중 $q_0 f(t)$ 가 판의 중앙부 영역($2c \times 2c$)에 작용하는 것으로 하면(여기서 $f(t) = F_0 \sin \omega t$), 평판의 상하면에서의 경계조건은 다음과 같다.

i) 평판의 상면
 $Z = -h/2$ 에서

$$\begin{aligned} \tau_{zx} = \tau_{zy} &= 0 \\ \sigma_z &= -q_0 f(t) H(c - |x|) H(c - |y|) \end{aligned} \quad (13)$$

ii) 평판의 하면
 $Z = h/2$ 에서

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (14)$$

여기서, $H(c - |x|) H(c - |y|)$ 는 단위 step 함수이다. 식(13), 식(14)를 Laplace 변환하면,

i) $Z = -h/2$ 에서

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{zx} = \bar{\tau}_{zy} &= 0 \\ \bar{\sigma}_z &= -q_0 \bar{f}(p) H(c - |x|) H(c - |y|) \end{aligned} \quad (15)$$

ii) $Z = h/2$ 에서

$$\bar{\sigma}_z = \bar{\tau}_{zx} = \bar{\tau}_{zy} = 0 \quad (16)$$

여기서,

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

이다.

또한 경계조건 of Laplace 변환식과 응력의 Laplace 변환식과의 관계를 이용하여 미정계수를 결정하기 위하여 식(7)을 Laplace 변환하면 응력성분은 다음과 같다.

$$\bar{\sigma}_z = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_1}{\partial z \partial y} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \nabla^2 \bar{\varphi}_0$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{zx} &= \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\lambda}_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_2}{\partial z^2} \right) \\ \bar{\tau}_{zy} &= \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_0}{\partial z \partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\lambda}_2}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_1}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

식(17)에 식(12), 식(15), 식(16)을 대입하면 미정 계수를 구할 수 있는 6원연립대수방정식이 얻어진다. 그러나 식(17)의 $\bar{\sigma}_z$ 에 변위 potential의 일반해의 식(12)를 대입하면 주기함수꼴이 되고, 식(15)의 $\bar{\sigma}_z$ 는 단위 step 함수이므로 두식의 $\bar{\sigma}_z$ 를 같은 형태로 표현하기 위하여 Fourier cosine 변환한다.

변환할 때는 Fig. 3과 같이 지지된 정방형판에 단위 step 하중이 작용하는 경우를 생각하여 식(15)와 식(17)에 $\cos \alpha_i x$ 를 곱하여 $-a$ 에서부터 $+a$ 까지 적분하면 다음과 같다.

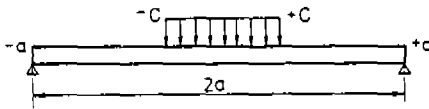


Fig. 3 The case of uniform distributed load on center(2c) of a square plate

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [K_1 \exp(\beta_{mnz}) C_1 + K_1 \exp(-\beta_{mnz}) C_2 - K_2 \exp(\gamma_{mnz}) D_1 \\ &\quad + K_2 \exp(-\gamma_{mnz}) D_2 + K_3 \exp(\gamma_{mnz}) E_1 - K_3 \exp(-\gamma_{mnz}) E_2] \\ &\quad \cos \alpha_m x \cos \alpha_i x \cos \alpha_n y \\ &= -q_0 \bar{f}(p) H(c-|x|) \int_{-a}^a H(c-|x|) \cos \alpha_i x dx \end{aligned} \quad (18)$$

여기서,

$$\begin{aligned} K_1 &= \beta_{mn}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{p^2}{c_1^2}, \quad K_2 = \gamma_{mn} \alpha_n, \\ K_3 &= \alpha_m \gamma_{mn} \end{aligned}$$

이다.

식(18)의 우변을 계산하기 위하여 단위 step 함수 $H(c-|x|)$ 의 항을

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \alpha_m x \quad (19)$$

으로 가정하여 Fourier 급수를 전개한다. 식(19)의 양변에 $\cos \alpha_i x$ 를 곱하여 $-a$ 에서부터 $+a$ 까지 적분하면,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-a}^a A_m \cos \alpha_m x \cos \alpha_i x dx \\ = \int_{-a}^a f(x) \cos \alpha_i x dx \end{aligned} \quad (20)$$

i) $m \neq i : \int_{-a}^a \cos \alpha_m x \cos \alpha_i x dx = 0$

ii) $m = i : \int_{-a}^a \cos \alpha_m x \cos \alpha_i x dx = a \quad (21)$

고로

$$\int_{-a}^a A_m \cos \alpha_m x \cos \alpha_i x dx = A_m a$$

이므로 식(20)에서

$$A_m a = \int_{-a}^a f(x) \cos \alpha_m x dx$$

이다.

그런데,

$$\begin{aligned} f(x) &= H(c-|x|) \\ &= \begin{cases} 1 & : -c \leq x \leq c \\ 0 & : -a \leq x \leq -c, \quad c \leq x \leq a \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) \cos \alpha_m x dx \\ = \int_{-a}^a H(c-|x|) \cos \alpha_m x dx \\ = \int_{-c}^c \cos \alpha_m x dx \\ = \frac{2 \sin(\alpha_m c)}{\alpha_m} \\ \therefore A_m = \frac{2 \sin(\alpha_m c)}{a \alpha_m} \end{aligned} \quad (23)$$

이 된다. 위와 같은 방법으로

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \alpha_n y$$

를 계산하면

$$A_n = \frac{2 \sin(\alpha_n c)}{a \alpha_n}$$

를 얻을 수 있다.

식(21)~(23) 및 A_n 값을 식(18)에 대입하면 Laplace 변환영역에서 $\bar{\sigma}_z$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [K_1 \exp(\beta_{mnz}) C_1 \\ & + K_1 \exp(-\beta_{mnz}) C_2 - K_2 \exp(\gamma_{mnz}) D_1 \\ & + K_2 \exp(-\gamma_{mnz}) D_2 + K_3 \exp(\gamma_{mnz}) E_1 \\ & - K_3 \exp(-\gamma_{mnz}) E_2] \\ = & -q_0 \bar{f}(p) \frac{4 \sin(\alpha_m c) \sin(\alpha_n c)}{\alpha_m \alpha_n a^2} \end{aligned} \quad (24)$$

윗식의 우변을 집중하중이 작용하는 형태로 만들기 위하여 Fig.1에서 등분포하중 작용영역 C 를 중앙점으로 수렴시켜 Fig.4와 같이 집중하중 F_0 가 작용하는 것으로 하여 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} \left\{ 4 q_0 c^2 \frac{\sin(\alpha_m c) \sin(\alpha_n c)}{a^2 (\alpha_m c) (\alpha_n c)} \right\} \\ = \frac{F_0}{a^2}, \quad F_0 = 4 c^2 q_0 \end{aligned} \quad (25)$$

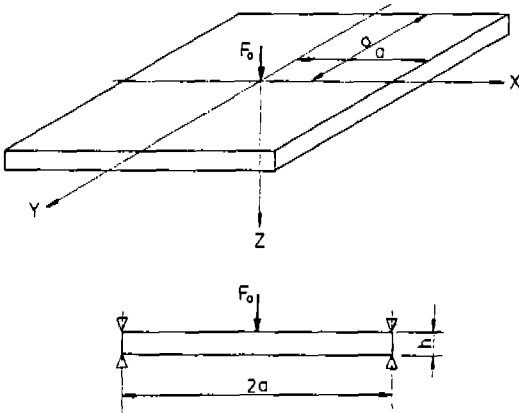


Fig. 4 A square plate subjected a concentrated load on center

이상의 결과들을 이용하여 미정계수 $C_1 \dots E_2$ 를 수치해석에 의해 구하고, 여기서 구해진 미정계수를 식(12)에 대입하고, 식(7)을 Laplace 변환한 후의 식에 대입하면, Laplace 변환영역에서의 응력성분의 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(-\alpha_m^2 + \frac{\nu p^2}{(1-2\nu)c_1^2} \right) \exp(\beta_{mnz}) C_1 \right. \\ & + \left(-\alpha_m^2 + \frac{\nu p^2}{(1-2\nu)c_1^2} \right) \exp(-\beta_{mnz}) C_2 \\ & - \alpha_m \gamma_{mn} \exp(\gamma_{mnz}) E_1 \\ & \left. + \alpha_m \gamma_{mn} \exp(-\gamma_{mnz}) E_2 \right\} \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \\ \bar{\sigma}_y = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(-\alpha_n^2 + \frac{\nu p^2}{(1-2\nu)c_1^2} \right) \exp(\beta_{mnz}) C_1 \right. \\ & + \left(-\alpha_n^2 + \frac{\nu p^2}{(1-2\nu)c_1^2} \right) \exp(-\beta_{mnz}) C_2 \\ & + \alpha_n \gamma_{mn} \exp(\gamma_{mnz}) D_1 \\ & \left. - \alpha_n \gamma_{mn} \exp(-\gamma_{mnz}) D_2 \right\} \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \\ \bar{\sigma}_z = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\beta_{mn}^2 + \frac{\nu p^2}{(1-2\nu)c_1^2} \right) \exp(\beta_{mnz}) C_1 \right. \\ & + \left(\beta_{mn}^2 + \frac{\nu p^2}{(1-2\nu)c_1^2} \right) \exp(-\beta_{mnz}) C_2 \\ & - \gamma_{mn} \alpha_n \exp(\gamma_{mnz}) D_1 \\ & + \alpha_m \gamma_{mn} \exp(-\gamma_{mnz}) D_2 \\ & + \alpha_m \gamma_{mn} \exp(\gamma_{mnz}) E_1 \\ & \left. - \alpha_m \gamma_{mn} \exp(-\gamma_{mnz}) E_2 \right\} \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \end{aligned} \quad (26)$$

또한 Laplace 변환영역에서 변형율성분의 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2G} [(-\alpha_m^2) \{ C_1 \exp(\beta_{mnz}) \\ & + C_2 \exp(-\beta_{mnz}) \} - \alpha_m \gamma_{mn} \{ E_1 \exp(\gamma_{mnz}) \\ & - E_2 \exp(-\gamma_{mnz}) \}] \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2G} [(-\alpha_n^2) \{C_1 \exp(\beta_{mnz}) \\ &+ C_2 \exp(-\beta_{mnz})\} + \alpha_n \gamma_{mn} \{D_1 \exp(\gamma_{mnz}) \\ &- D_2 \exp(-\gamma_{mnz})\}] \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \\ \bar{\varepsilon}_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2G} [(\beta_{mn}^2) \{C_1 \exp(\beta_{mnz}) \\ &+ C_2 \exp(-\beta_{mnz})\} + \alpha_m \gamma_{mn} \{E_1 \exp(\gamma_{mnz}) \\ &- E_2 \exp(-\gamma_{mnz})\} - \alpha_n \gamma_{mn} \{D_1 \exp(\gamma_{mnz}) \\ &- D_2 \exp(-\gamma_{mnz})\}] \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \quad (27)\end{aligned}$$

3. 수치해석

3.1 고속 Fourier 변환을 이용한 수치 Laplace 역변환

본 절에서는 2장에서 3차원동탄성이론에 의해 해석한 Laplace 변환영역에서의 응력성분의 식(26)을 수치 Laplace 역변환하여 충격응력을 해석하였다. 그러나 3차원동탄성 이론에서는 Laplace 역변환이 곤란하므로, 다음과 같은 이산 Fourier 변환⁹⁾을 고속 Fourier 변환으로 고속화¹³⁾하여 수치 Laplace 역변환했다.

$$\begin{aligned}(\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2)_k &= \frac{\exp(\gamma \cdot k \Delta t)}{T} \\ \sum_{n=0}^{N-1} (\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2)_n &\times \exp(i 2\pi n k / N) \\ (k=0, 1, 2, \dots, N-1) &\quad (28)\end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}(\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2)_k &= (\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2)_t = k \Delta t \\ (\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2)_n &= (\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2)_p = \gamma + i \omega \\ i &= \sqrt{-1}\end{aligned}$$

γ 및 ω 는 각각 Laplace 변환 parameter p 의 실수부와 허수부이고, N 및 T 는 샘플링 분할수 및 분할시간이며, $\Delta t = T/N$, $\Delta \omega = 2\pi/T$, $\gamma > 0$ 이다.

또한 계산정도를 높이기 위하여 길이의 무차원을 $1/h(1/m)$, 시간의 무차원을 (C_1/h)

t 로 하였으며, 식(28)의 변수 γ 는 수치계산시에 임의로 택할 수 있으나 충격응답의 해석에는 $\gamma = 6/T$ 근방이 최적값이었으므로 이 값을 수치계산에 이용하였다.

3.2 충격하중의 함수근사

충격하중의 측정이 곤란한 경우인 강구 및 비산하는 물체가 판에 충돌하는 경우를 대상으로 하여 무차원에 강구가 충돌하는 경우 국부변형을 고려한 Hertz의 접촉이론과 Lagrange의 고전판이론을 이용하여 충격하중을 해석하고

$$\tau = \frac{8D}{m C_b} t, \quad P(\tau) = \frac{C_b}{8D v_0} F_0(t)$$

로 무차원화하면 무차원 충격하중의 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}IP \cdot P(\tau)^{2/3} &= \tau - \int_0^\tau \int_0^\tau P(\eta) d\eta d\xi \\ &- \int_0^\tau P(\eta) d\eta \quad (29)\end{aligned}$$

여기서, IP 는 충격조건에 관계되는 충격하중 계수로서

$$IP = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{v_0} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{k} \right)^{2/3} \left(\frac{8D}{C_b} \right)^{5/3}$$

이며, m 은 강구의 질량, k 는 Hertz의 접촉상수, v_0 는 강구의 충돌속도, D 는 판의 굽힘강성계수, $C_b = \sqrt{D/\rho h}$, ρ 는 판의 밀도이다.

본 연구에서는 무차원 충격하중의 식(29)를 충격응력의 해석에 이용할 수 있도록 해석가능한 함수로 근사시키기 위해 다음과 같은 함수 근사식을 제안하였다.

$$P(\tau) = A\tau \exp(-B\tau) \quad (30)$$

충격하중의 함수근사는 충격하중의 식(29)가 비선형 적분방정식이므로 해석적으로 풀기가 곤란하며 전진차분 근사에 의해 무차원 충격하중을 수치계산하고 식(29)에 의해 수치계산된 충격하중과 근사하중의 식(30)의 peak 값이 일치하도록 하고, 두 하중의 역적이 될 수 있

는 한 같게 되도록 근사시켰다. 또 충격하중 계산시 시간간격을 $\Delta\tau = 0.01$, 분할수는 1,000 으로 하였다.

4. 수치계산결과 및 고찰

4.1 F. F. T.의 계산정도

본 응력해석의 수치 laplace 역변환에 이용한 F. F. T. 알고리즘의 계산정도 및 계산시간 절약에 관해 고찰하기 위해 $F(\tau) = \sin \pi \tau$ 라는 정현파가 작용하는 경우를 가정하여 Laplace 변환 parameter의 실부수 γ 값과 sampling 분할수 N 을 바꿔가며 $\sin \pi \tau$ 파형에 가장 잘 근사하는 범위를 결정하였으며 $\sin \pi \tau$ 의 Laplace 변환식은 다음과 같다.

$$\bar{f}(p) = \pi / (p^2 + \pi^2) \quad (31)$$

이상과 같이 수치 Laplace 변환한 결과 Fig. 5와 같이 $\gamma = 6/T$, $N = 2^8 (= 256)$ 이 가장 정도가 좋았으며, γ 값이 클수록 $\tau = T$ 근방에서 발산하는 경향이 있었다. 또한 N 값이 작은 범위에서도 비교적 정도가 좋았고 계산 시간도 98% 절약되었다.

4.2 충격응력의 수치계산결과

본 이론해석결과를 계산하기 위하여 판두께 10mm, 한변의 길이 1000mm인 정방형강판의 중앙에 Fig. 6과 같은 $F_0 \sin \omega \tau$ 로 주어진 하중이

$$F(\tau) = \begin{cases} F_0 \sin \omega \tau : 0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ 0 : \tau_0 \leq \tau \end{cases} \quad (32)$$

와 같이 집중으로 작용하는 경우의 응답을 3차원 동탄성 이론에 의한 해석결과에 기초를 두고 계산했다.

계산시에는 식 (25)에서와 같이 집중충격하중이 작용하는 것으로 하여 계산하였다. 하중작용조건은 Fig. 6과 같이 하였으며 다음과 같다.

$$F(\tau) = F_0 \sin \omega \tau H(\tau) H\left(\frac{\pi}{\omega} - \tau\right) \quad (33)$$

윗식을 Laplace 변환하면

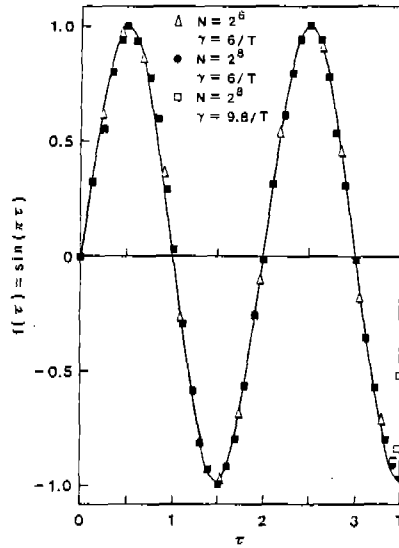


Fig. 5 Accuracy of numerical inversion of Laplace transformation method by using fast Fourier transformation

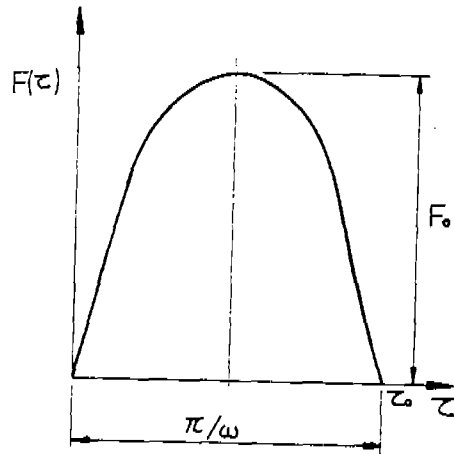


Fig. 6 Load condition

$$\bar{f}(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} (\exp(-p \times \pi/\omega) + 1) \quad (34)$$

이 되며 식 (34)의 충격하중의 Laplace 변환값 $\bar{f}(p)$ 는 식 (15)의 $\bar{f}(p)$ 값과 같다. 또 수치계산에 이용한 강판의 재료정수는 탄성계수 $E = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$, 포아손비 $\nu = 0.3$, 밀도 $\rho = 7.86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 정강형강판의 크기는 $1000 \times 1000 \times 10 \text{ mm}$ 로 했으며, 급수 m, n 은 수렴

할 때까지 계산하여 충돌점에서는 각각 90, 충돌점으로부터 임의의 거리 100mm 떨어진 곳에서는 각각 50으로 계산했다.

또 수치Laplace 역변환의 분할수 $N = 256$ ($= 2^8$), 고려할 최대시간은 $T = 800$ 으로 했으며, 식(4)에서 ω 는 π/τ_0 로서 pulse 폭 τ_0 의 크기는 20, 50, 150으로 하여 각각의 무차원화량에 의하여 판의 응답을 구했다.

위와같이 하여 계산한 충격응답의 무차원 응력변동 $\sigma_x \cdot a^2/F_0$, $\sigma_y \cdot a^2/F_0$ 의 계산결과를 Fig. 7~Fig. 11에 도시하였다.

그러나 종래의 연구결과로는 집중충격하중 작용점에서는 응력의 해가 발산하기 때문에 비교할 대상이 없으므로 응력의 크기에 따른 응력의 변화 및 단위역적당 최대응력의 변화 등으로 본 이론의 타당성을 검토한후 다음장에서 충격하중의 함수 근사식을 제안하여 변형율의 수치계산 결과와 충격실험에 의한 변형율의 계측결과와 비교검토하기로 하고, 여기서는 응력파의 전파현상에 관해서 파동이론과 비교검토한다. $G = E/2(1+\nu)$ 의 관계를 이용하여 응력파의 전파속도를 계산해 보면, 종파의 전파속도

$$C_1 = 5997 \text{ m/sec} \\ (C_1 = \sqrt{2G(1-\nu)/\rho(1-2\nu)})$$

전단파의 전파속도

$$C_2 = 3205 \text{ m/sec} \quad (C_2 = \sqrt{G/\rho})$$

로 된다. Fig. 7은 충돌점에서의 응력변동의 수치계산결과를 나타낸 것으로 정방형판의 표면에서 하중이 가해지기 시작한 ($t=0$) 것과 거의 동시에 인장이 생겨, $21 \mu\text{sec}$ 부근에서 ($t = hT/C_1$ 로 환산한 값) 최대치에 도달하여, 그 후 급격히 0에 접근한다. 또 진동을 개시하는 시각은 $330 \mu\text{sec}$ 부근인데, 이것은 전단파가 판의 주변으로부터 반사되어 되돌아오는 시간과 거의 같다. ($C_2 = 2 \times 0.5 / (330 - 21) = 3230 \text{ m/sec}$) Fig. 8, 9는 각각 pulse 폭이 50, 150인 경우의 집중충격하중의 작용점에서의 수치계산결과로서 Fig. 7 (pulse 폭 20인 경우)에서와 같은 결과를 얻을 수 있다. Fig. 10은

충돌점으로부터 100mm 떨어진 곳에서의 응력변동 $\sigma_x \cdot a^2/F_0$ 의 수치계산결과로서, 응력변동의 개시시각은 $31.2 \mu\text{sec}$ 이며 ($T = 18.23$, $t = hT/C_1 = 31.2 \mu\text{sec}$), 충격하중작용점으로부터 100mm를 이 시간으로 나누면 3200 m/sec ($t = x/C_2$, $C_2 = x/t = 0.1/31.2 = 3200 \text{ m/sec}$)라고 하는 강판내의 전단파의 전파속도 ($C_2 = 3205 \text{ m/sec}$)와 거의 일치한다. 그 후 큰진폭으로 인장, 압축을 반복하는데 Fig. 10에서 알 수 있는 바와같이 $280 \mu\text{sec}$ 를 지나면 판의 진동이라고 생각되는 응력변동이 일어나기 시작한다. 충돌점으로부터 발생한 응력파가 정방형판의 주변으로부터 반사되어 이 위치에 되돌아 올 때까지의 거리 900mm를 $280 \mu\text{sec}$ 로 나누면 3210 m/sec 가 되어 이것도 전단파의 전파속도와 거의 일치함을 알 수 있다.

따라서 응력파의 전파현상에 관해서 본 이론의 수치해석결과와 파동이론에 의한 계산결과와의 사이에는 서로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 또한 Fig. 11은 충돌점으로부터 100mm 떨어진 곳에서의 $\sigma_y a^2/F_0$ 의 계산결과를 나타냈다.

본 연구에서는 집중충격하중작용점에서의 충격응력의 해석방법을 제안한 것이 주목적임으로 충돌점으로부터 임의의 거리와 100mm 떨어진 곳에서의 무차원 충격응력 $\sigma_x a^2/F_0$, $\sigma_y a^2/F_0$ 의 계산은 pulse 폭이 20인 경우만 계산하고 50, 150인 경우는 생략한다.

또한 응력변동의 크기에 관한 수치계산결과를 정리해보면 Fig. 12는 pulse 폭(τ_0)의 변화에 따른 집중충격하중작용점에서의 무차원 응력변동 ($\sigma_x a^2/F_0$)_{max}의 변화를 나타낸 것으로, pulse 폭이 증가하면 무차원 응력은 증가함을 알 수 있다 (Fig. 7~9 참조). Fig. 13은 단위 역적당 무차원응력변동 $1/F_s \cdot (\sigma_x a^2/F_0)$ _{max}의 계산결과로서 pulse 폭의 증가에 따른 단위 역적당 무차원응력의 변화는 Fig에서와 같이 감소함을 알 수 있다. 여기서 F_s 는 pulse 폭의 면적으로

$$F_s = \int_0^{\tau_0} F(\tau) d\tau \text{ 이다.}$$

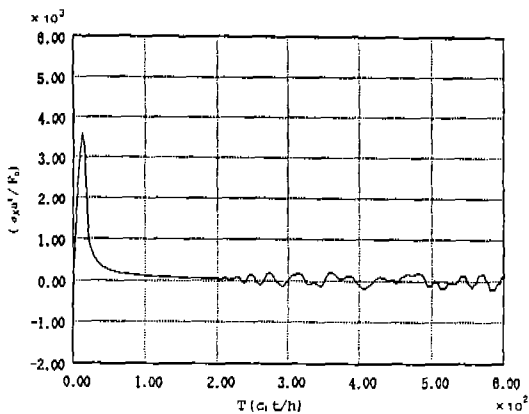


Fig. 7 Variation with time of nondimensional stress $(\sigma_x a^2 / F_0)$ at impact point for pulse width 20 ($x=y=0, z=h/2$)

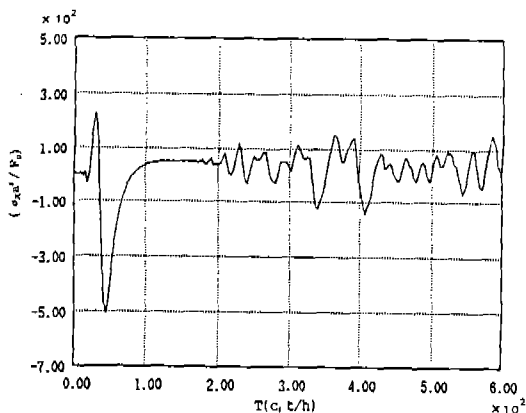


Fig. 10 Variation with time of nondimensional stress $(\sigma_x a^2 / F_0)$ at the 100mm apart from impact point for pulse width 20 ($x=100\text{ mm}, y=0, z=h/2$)

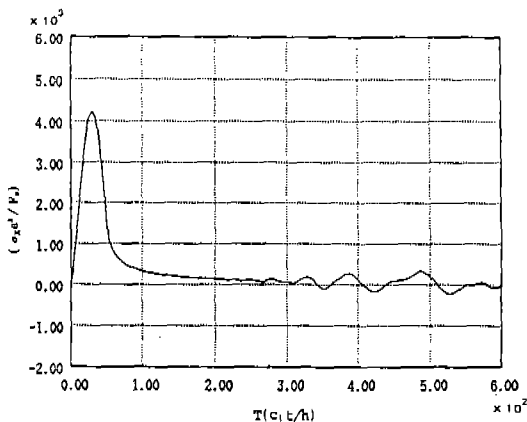


Fig. 8 Variation with time of nondimensional stress $(\sigma_x a^2 / F_0)$ at impact point for pulse width 50 ($x=y=0, z=h/2$)

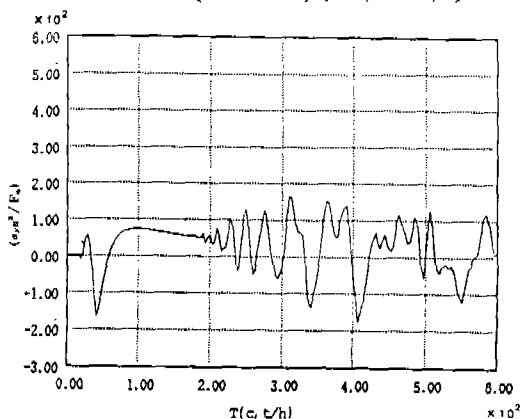


Fig. 11 Variation with time of nondimensional stress $(\sigma_y a^2 / F_0)$ at the 100mm apart from impact point for pulse width 20 ($x=100\text{ mm}, y=0, z=h/2$)

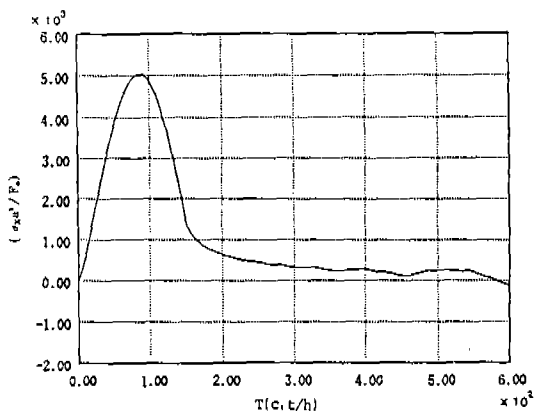


Fig. 9 Variation with time of nondimensional stress $(\sigma_x a^2 / F_0)$ at impact point for pulse width 150 ($x=y=0, z=h/2$)

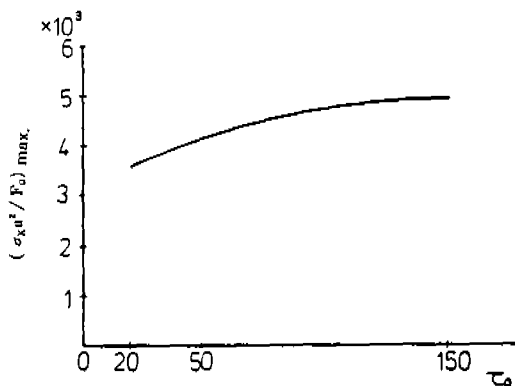


Fig. 12 The change of variation with time of max. stress according to increase of pulse width ($x=y=0, z=h/2$)

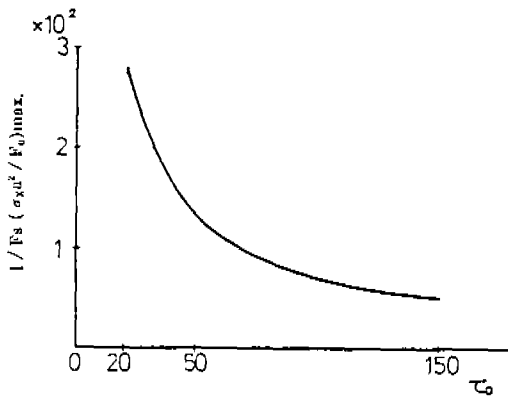


Fig.13 The change of max. stress per unit impulse according to increase of pulse width ($x=y=0, z=h/2$)

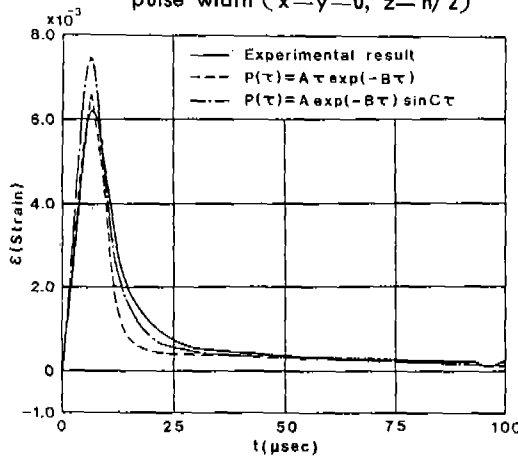


Fig.14 Comparison analytical result with experimental result of variation with time of strain at impact point ($r_0=2.5 \text{ mm}, h=3 \text{ mm}, v_0=40 \text{ m/sec}$)

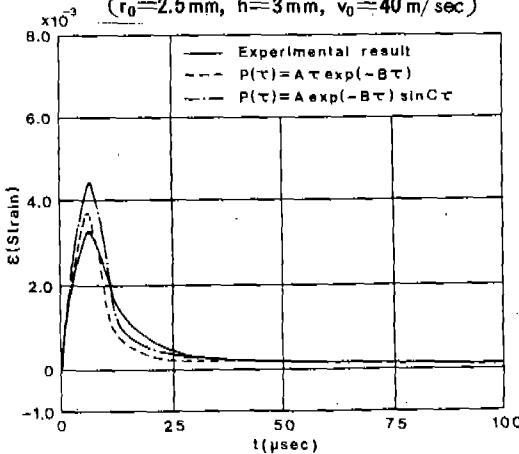


Fig.15 Comparison analytical result with experimental result of variation with time of strain at impact point ($r_0=2.5 \text{ mm}, h=3 \text{ mm}, v_0=25 \text{ m/sec}$)

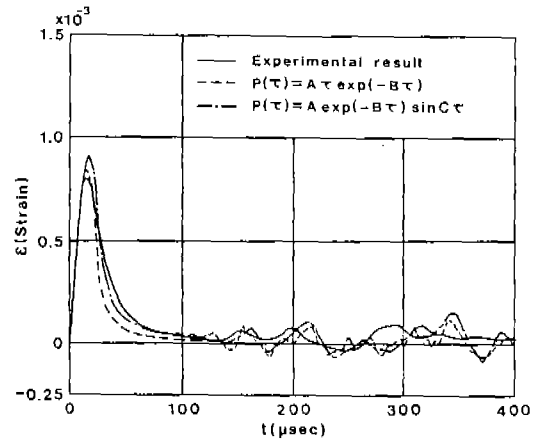


Fig.16 Comparison analytical result with experimental result of variation with time of strain at impact point ($r_0=5 \text{ mm}, h=5 \text{ mm}, v_0=4.5 \text{ m/sec}$)

계산결과로부터 pulse 폭이 20, 50, 150 일때 F_s 값은 각각 $12.7324 F_0$, $31.83 F_0$, $95.5 F_0$ 이다. 이상의 결과들을 종합해 볼때 고전판이론으로는 해석할 수 없는 충격하중작용점에서의 충격응력을 3차원동탄성이론을 이용하여 해석한 본 응력해석방법이 적용가능함을 알 수 있었다.

5. 이론해석결과의 타당성 검토

본 충격응력해석 방법이 관부재의 모든 충격문제에 실제 응용할 수 있도록, 세로 제한한 충격하중 함수근사 식(30)과 3차원 동탄성이론을 이용하여 해석한 본 응력해석 방법의 타당성을 변형율의 계측결과와 비교하여 확인하고자 한다.

먼저 충격하중의 함수근사 식(30)을 Fig.6과 같은 구간내에서만 고려하여 Laplace 변환하면 다음과 같다.

$$\bar{f}(p) = \frac{A}{(B+p)^2} [1 - \exp\{-\pi(1+p/B)\}] - \frac{A\pi \exp\{\pi(1+p/B)\}}{B(B+p)} \quad (35)$$

식(35)를 식(24)의 우변 $\bar{f}(p)$ 에 대입하고 평판의 상하면에서의 경계조건식의 Laplace 변환식(15)와 Laplace 변환영역에서의 응력성분의 식

(7)을 대입하여 미정계수를 계산하고 Laplace 변환영역에서의 변환율성분의 식(7)에 대입한 후, 수치 Laplace 역변환하면 충격하중작용점에서의 변형율의 값을 얻을 수 있다.

실험은 비교적 고속충격의 범위인 25 m/sec 이상인 경우는 공기압 충격시험장치를 이용하여 시편에 직경 5mm인 강구를 발사시켜 충돌점 반대편 중앙에 부착시킨 스트레인 게이지의 파형을 storage oscilloscope에 기록한 후 X-Y recorder에 기록하였으며 저속 충격의 경우는 자유낙하 시험장치의 상단에 부착된 전자식의 착탈에 의해 강구를 낙하시켜 변형율 값을 계측하였다.

본 연구에서 새로 제안한 충격하중함수 근사식을 이용하여 Fig.14, 15, 16에 집중 충격하중작용점에서의 변형율의 수치계산 결과와 실험 결과를 나타내었다. Fig.14는 구경 5mm인 강구가 관두께 3mm인 유리판에 40 m/sec로 충돌하였을 때, Fig.15는 25 m/sec로 충돌하였을 때의 변형율의 계측결과와 본 이론해석에 대한 수치계산결과를 비교한 것이며, Fig.16은 구경 10mm인 강구가 관두께 5mm인 유리판에 4.5 m/sec로 충돌했을 때의 본 이론해석에 의한 수치계산결과와 변형율의 계측결과를 비교한 것이다.

Fig.14~16에서 실선은 실험결과를 나타내며, 점선은 본 연구에서 새로 제안한 충격하중의 함수근사식 $P(\tau) = A\tau \exp(-B\tau)$ 을 이용하여 해석한 변형율의 수치계산결과이고, 일점 쇄선은 이미 저자⁸⁾가 제안하였던 충격하중의 함수근사식 $P(\tau) = A \exp(-B\tau) \sin C\tau$ 의 근사식을 이용한 수치계산결과와 본 연구에서 제안한 $P(\tau) = A\tau \exp(-B\tau)$ 의 근사식을 이용한 수치계산결과와의 사이에는 15% 정도의 오차가 발생하였다.

따라서 본 연구에서 제안한 충격하중의 근사식 $P(\tau) = A\tau \exp(-B\tau)$ 가 실제의 현상에 잘 근사하고 있음을 알 수 있으며, 저자가 제안했던 식에 0.85의 계수를 곱한 식 $P(\tau) = 0.85A \exp(-B\tau) \sin C\tau$ 를 이용해도 실제의 충격문제의 해석에 적용할 수 있음을 알 수 있었다. 또한 변형율의 계측결과와 본 연구에

서 제안한 식을 이용한 수치계산결과와의 사이에 생긴 약간의 오차는 첫째, 이론해석은 어느 1점에서의 값이지만 strain gage는 어떤 면적을 가지고 있기 때문에 계측값은 평균값으로 나타나므로 실제의 값보다 작기 때문이며, 둘째는 강구가 정확히 수직으로 충돌할 수 없기 때문에 이론값 보다는 실험값이 작게 나타나기 때문이라 생각된다.

이상의 문제점을 고려한다면 본 연구에서 제안한 충격하중의 함수 근사식 $P(\tau) = A\tau \exp(-B\tau)$ 및 $P(\tau) = 0.85A \exp(-B\tau) \sin C\tau$ 를 3차원 동탄성 이론에 이용하여 충격응력을 해석하는 방법이 실제의 현상과 거의 일치함을 알 수 있다.

6. 결 론

집중충격하중 작용점에서 충격응력을 해석할 수 있는 새로운 응력해석방법을 제안한 본 연구결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 고전판 이론으로는 해석할 수 없는 집중충격하중 작용점에서의 충격응력이 3차원 동탄성 이론과 변위 potential 이론(응력함수)을 이용하여 해석한 본 응력해석 방법에 의해 해석 가능했다.

2. 집중충격하중 작용점에서 작용하중의 pulse 폭이 증가함에 따라 응력의 크기가 증가하며, 단위역적당 응력의 크기가 감소함을 본 응력해석결과에 의해 이론적으로 알 수 있었다.

3. 3차원 동탄성 이론에서는 Laplace 역변환이 극히 어려우나, 본 응력해석에 이용한 수치 Laplace 역변환법(F. F. T.)에 의해 쉽게 해결되었고, 계산시간의 감소 및 계산결과의 정도 향상에 극히 유효했다.

4. 본 연구에서 제안한 충격하중의 함수근사식 $P(\tau) = A\tau \exp(-B\tau)$ 및 $P(\tau) = 0.85A \exp(-B\tau) \sin C\tau$ 가 실제의 모든 충격문제에 적용 가능함을 알 수 있으며 실험결과와 비교함으로써 본 해석 방법의 타당성이 확인되었다.

후 기

본 연구는 1990 학년도 조선대학교 학술연구비에 의해 연구되었음.

참 고 문 헌

1. Julius Miklowitz, "Flexural Stress Wave in a finite Elastic Plate due to a Suddenly Applied Concentrated Transverse Load", *Journal of Applied Mechanics*, pp. 681-689, 1960.
2. Nisim Levy and Werner Goldsmith, "Normal Impact and perforation of thin plates by Hemispherically Tipped projectiles-II Experimental results", *International Journal for Impact Engineering*, Vol. 2, No. 4, pp. 299-324, 1984.
3. 中原一郎外 2人, "自由縁に衝撃荷重をうける半無限板", *日本機械學會論文集(第1部)*, 第33卷, 第252號, pp.1191~1199, 1967.
4. 澁谷壽一外 2人, "差分法による半無限板の衝撃應力", *日本機械學會論文集(第1部)*, 第40卷, 第339號, pp. 2997~3004, 1974.
5. 深津鋼次外 2人, *日本機械學會論文集(A)*, 第49卷, 第437號, p. 66, 1983.
6. Timoshenko, S.P., Woinowsky, K.S., "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, New York, pp. 63-69, 1959.
7. Ugural, A.C., "Stresses in Plates and Shells", McGraw-Hill, New York, p. 38, 1981.
8. 양인영 외 4인, "취성재료의 충격파괴에 관한 연구(I) - 충격응력의 근사해석방법을 중심으로 -", *대한기계학회논문집*, 제14권, pp.298~309, 1990.
9. 足立忠晴外 2人, "水撃をうける有限長圓筒殻の衝撃應答の解析", *日本機械學會論文集(A)*, Vol. 51, No. 467, pp.1886~1892, 1985.
10. E. Oran Brigham, "The Fast Fourier Transform", Prentice-Hall. In., p. 94, 1974.
11. W. Johnson, "Impact Strength of Materials," Edward Arnold, p. 106, 1972.
12. 中原一郎, "應用彈性學", 實教出版社, 東京, p. 207, 1985.
13. 安居院猛, 中山鳥之, "FFTの使い方", 産報出版, pp. 91~111, 1981.