

3차원 순환 유동 효과를 고려한 압출공정에서의 체류시간 분포해석

주진우 · 권태현

포항공과대학 기계공학과
(1991년 8월 31일 접수)

Analysis of Residence Time Distribution in Extrusion Process Including the Effect of 3-D Circulatory Flow

J.W. Joo and T.H. Kwon

*Department of Mechanical Engineering, Pohang Institute of Science and Technology,
P.O. Box 125, Pohang 790-600, Korea
(Received August 31, 1991)*

요 약

압출공정 중에 화학반응이 수반되는 경우에 화학반응은 온도와 체류시간분포(Residence Time Distribution (RTD))에 의해 결정되므로, 압출기의 설계 및 공정조건의 확립에 있어서 RTD를 정확히 측정하거나 예측하는 것은 매우 중요하다.

RTD를 예측하기 위해 제안된 종래의 방법은 압출기내에서의 유동을 2차원으로 단순화하여 RTD와 체류시간 분포함수 $f(T)$ 와 누적 체류시간 분포함수 $F(T)$ 를 해석적으로 구하였다. 그러나 이러한 종래의 RTD에 관한 해석방법은 실제 압출기 내부에서 일어나는 3차원적 순환유동(Circulatory Flow)을 정확하게 고려하지 못하는 문제점을 갖고 있다.

본 논문에서는 RTD를 정확하게 예측하기 위하여 3차원 순환유동을 고려한 RTD를 구하는 방식을 제시하고, $f(T)$ 에 관한 새로운 공식을 유도하였다. 새로운 방식을 적용하기 위해서 유사 3차원(Quasi-3-Dimensional) 유한요소 해석법을 이용하여 속도분포를 구한 후에 순환유동을 고려한 RTD 및 $f(T)$, $F(T)$ 를 계산하였다. 순환유동이 고려안된 종래의 방법에 따른 계산 결과와 비교한 결과로서 종래의 방식은 순환유동이 고려안되었기 때문에 RTD를 과소평가하는 경향이 있음을 알 수 있었다.

Abstract—It is of great importance to accurately measure or predict Residence Time Distribution (RTD) in designing extruders and/or in setting up a proper operating condition, because chemical reactions depend significantly on the RTD and temperature when chemical reactions take place during the extrusion process.

A previous method to predict the RTD can analytically determine RTD, Residence Time Distribution Function $f(T)$ and Cumulative Residence Time Distribution Function $F(T)$, based on a simplified 2-dimensional velocity field in an extruder. However, this previous method cannot accurately take into account the 3-dimensional circulatory flow inside the extruder.

The present paper suggests a new method to accurately determine the RTD taking into account the 3-dimensional circulatory flow and presents a new formula derived to calculate $f(T)$. In order to demonstrate the application of the new method including the circulatory flow effect, RTD, $f(T)$ and $F(T)$ were calculated based on a 3-dimensional velocity field obtained via a quasi-3-dimensional finite element analysis. It was found that

the previous method has a tendency to underestimate the RTD due to the neglect of the 3-dimensional circulatory flow in comparison of the new method.

Keywords: Residence Time Distribution, Residence Time Distribution Function, Screw Extrusion, Three-Dimensional Circulatory Flow, FEM Analysis

1. 서 론

스크루 압출기의 성능을 결정하는 중요한 요소로 압출기내에서 가공재료의 체류시간분포(Residence Time Distribution(RTD))을 들 수 있다. 이것은 단면의 각 위치에 따라 속도의 크기가 다르기 때문에 재료가 압출기내에서 체류하는 시간이 다르게 되어 생긴다. 고온의 상태에서 장시간 체류하는 경우에 고분자가 화학반응을 일으킬 수 있으므로 RTD를 정확히 파악하는 것은 매우 중요하며 많은 연구가 이론[1-7] 및 실험[8-10]을 통하여 진행되어 왔다. 이 가운데 Lindor와 Tadmor[9]는 가소화 스크루 압출기에서의 RTD를 해석적으로 구하였다. Pinto와 Tadmor[3]는 스크루의 단면을 직각사각형으로 가정하고 단면의 종횡비(Aspect Ratio)가 커서 중립면에서 Flight의 영향을 무시할 수 있다고 가정하여 단면상에서 임계점을 중심으로 각각 양의 방향과 음의 방향으로 1차원 유동을 한다고 가정하여 뉴우톤 유체의 경우 RTD와 체류시간 분포함수 $f(T)$ 와 누적 체류시간 분포함수 $F(T)$ 를 해석적으로 구하였으며 압출기 및 유체의 유동특성을 나타내는 무차원수 Π 를 도입하여 운전조건의 변화에 따른 경향을 분석하였다. 그러나 이러한 종래의 RTD에 관한 해석방법은 압출기 내부에서의 유동을 2차원 유동으로 너무 단순화하였기 때문에 실제 압출기내부에서 일어나는 3차원적 순환유동을 정확하게 고려하지 못하고 있는 결함이 있다. 따라서 이런 해석방법은 스크루 Flight 부근에서 순환유동의 정확한 영향을 알 수 없게되고, 특히 단면의 종횡비가 그다지 크지 않은 경우에 RTD 예측이 부정확하게될 위험을 갖고 있다. 한편 유한요소법을 이용한 압출기내에서의 유동해석이 가능하게 되어[예, 6] 3차원 유동장을 수치적으로 알 수 있게 되었다. 그러나 3차원 유동장이 구해져 있는 경우 RTD를 구하는 방법이 아직까지 문헌에 발표된 바 없다.

따라서 본 논문에는 RTD를 정확하게 예측하기

위하여 3차원 속도장이 주어질 때 이로부터 3차원 순환유동을 고려한 RTD를 구하는 방법을 제시하고, 이와 관련된 새로운 RTD 공식을 유도하였다. 또한 단축 스크루 압출기의 실제 스크루 및 배럴의 기하학적인 형상을 바탕으로 유한요소해석을 통하여 3차원 유동장을 구한 후 새로이 제시된 RTD 계산방법을 적용하였다.

3차원 유동장을 구하기 위하여 본 논문에서는 나선 형태로 꼬여있는 압출기내의 유동로를 펴서 Fig.1과 같은 형상을 갖게되어 곡률에 의한 영향을 무시한 유동 공간을 해석하였다. 유동로내에서 실제 가공재료는 비뉴우톤 유체 유동을 하므로 이 영역에서의 유동해석을 위해 유사 3차원 해석(Quasi-3-Dimensional Analysis)을 위한 유한요소법을 이용하여 시스템 전체에서의 압력 및 속도분포를 구하였다[6]. 유한요소 해석결과인 속도분포를 이용하여 Flight의 영향에 의한 단면내에서의 순환유동(Circulatory Flow)을 고려한 RTD 및 체류시간 분포함수 $f(T)$ 와 $F(T)$ 를 새로이 계산하였고 순환유동이 고려안된 종래의 계산 결과와 비교하여 논의하였다.

2. 유동해석 모델 및 유한요소 해석

2.1. 유동해석 모델

단축 스크루 압출기내에서의 거동을 연구하는데 이용되는 기하학적 형상은 Fig.1과 같다. 이 형상은 압출기의 축방향을 따라 나선형으로 꼬여있는 스크루의 유동로(Channel)를 이 평면상에 늘려놓은 형상이다. 따라서 이 형상에서는 유동로를 따라 흐르는 유체가 곡률에 의하여 받는 영향을 무시한 형상이라고 할 수 있다. 압출기내에서의 유동속도는 실제로 매우 느리기 때문에 곡률의 영향을 무시할 수 있으므로 위의 형상은 타당하다고 할 수 있다. 유동해석을 위한 좌표계는 Fig.1에 나타나 있다. 스크루의 루트(Root)에 수직인 평면을 xy 평면이라 하고 유동로 방향을 z 축방향이라 한다. z 축 방향은 스크

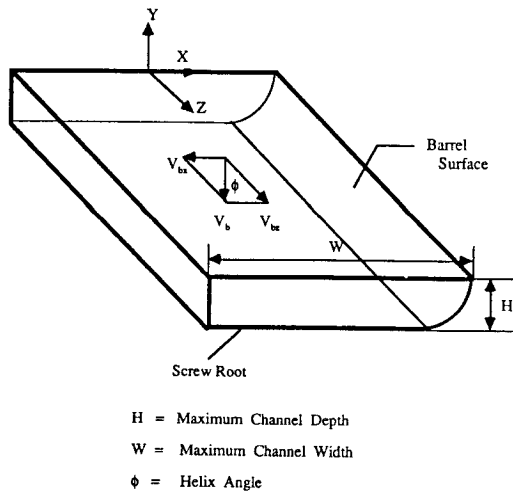


Fig. 1. Geometric model of the single screw extruder ignoring the curvature effect.

루의 축방향과 $(90-\Phi)$ 도 만큼 기울어져 있다. 실제 압출기에서는 스크루가 회전을 하고 배럴(Barrel)은 정지해 있으나 기하학적 형상이 매우 복잡하므로 위의 모델에서는 상대운동적 관점에서 스크루는 정지해 있고 배럴이 움직인다고 가정한다. 실제로 압출기 유동로내에서 유체입자는 나선형을 그리며 움직인다. 이 모델에서도 배럴이 움직이는 방향이 스크루의 축방향에 수직하므로 Fig. 1의 단면 형상에서 x 와 z 방향의 속도성분이 존재하기 때문에 유동로를 따라 나선형을 그리며 전진하게 된다.

이러한 모델에서 유동을 해석하는데 다음과 같은 가정을 한다.

1. 유체와 배럴 및 스크루 루트가 만나는 부분에서 상대운동은 존재하지 않는다(No Slip Condition). 따라서 배럴이 움직이는 모델로부터 배럴부분을 제외한 스크루 루트부분에서 3축 방향의 속도는 0이며, 배럴에서는 y 축 방향의 속도성분은 0이고, x 와 z 축 성분은 스크루의 회전속도와 Helix Angle에 의하여 결정된다. 이 가정은 경계조건이기도 하다.
2. 스크루의 첨단과 배럴사이에 생길 수 있는 Leakage Flow는 무시한다.
3. 전체 시스템은 등온상태로 가정한다(Isothermal State).
4. 유체는 비압축성 유동을 한다(Incompressible

Flow).

5. 유체의 유변학적 특성은 비뉴턴 점성유체의 모델을 따른다.

6. 유동조건과 유체의 특성은 시간에 따라 변하지 않는다(Steady State).

7. 유동로 방향인 z 축 방향으로 온도변화로 인하여 속도가 변하기는 하지만 유동로에 수직인 x , y 축 방향보다는 속도구배가 작다. 이런 가정하에서 z 축 방향으로의 변화를 거의 무시할 수 있다.

즉,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \ll \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \ll \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \quad (1)$$

이다. 따라서 속도 벡터는 x , y 의 함수로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\vec{V} = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j} + w(x, y)\vec{k} \quad (2)$$

이렇게 속도는 3차원 성분을 갖지만 각 성분이 x , y 에 따라 변하므로 이를 유사 3차원 모델(Quasi-3 Dimensional Model)이라고 명명하였다[6].

8. 중력의 영향은 무시한다.

9. 유동로를 따라 흐르는 유체의 유속은 매우 느리다(Creeping Flow). 따라서 관성력의 영향을 무시할 수 있으며 곡률에 의한 원심력의 영향을 무시할 수 있으므로 Fig. 1과 같은 모델은 타당하다고 할 수 있다.

10. 유동로에 수직인 단면은 유동로를 따라 일정하다.

2.2. 유한요소해석(Finite Element Analysis)

압출기의 가공재료로 쓰이는 고분자(Polymer)의 유동특성은 일반적으로 뉴턴 유체와는 달리 가공 온도 및 유동장내에서 유체의 전단속도에 의하여 변한다. 이를 본 논문에서는 Power Law Model을 이용하여 표현하였다[11].

유동해석 모델에서 도입된 가정을 이용하면 유체의 거동은 운동방정식 및 연속방정식을 통하여 볼때 유동로에 수직인 단면상의 유동인 Cross Channel Flow는 점성계수 관계에서 전단속도를 결정하는 요소들 중에 나타나는 w 성분을 알고 있는 경우에 순수한 2차원 유동의 지배방정식과 같음을 알 수

있다. 한편 유동로 방향의 유동인 Down Channel Flow의 지배방정식은 u, v 성분은 알고 있을 때 z 축 방향으로 유동의 변화가 거의 없으므로 이 방향의 압력구배가 일정하다고 할 수 있으므로 Poisson Equation이 됨을 알 수 있다. 따라서 이런 비선형 지배방정식들을 Down Channel Flow와 Cross Channel Flow로 분리하여 Iteration 함으로써 해석할 수 있는 방법을 도입하였다[6].

Cross Chanel Flow의 경우 가상일의 원리를 이용하여 해석하였는데, 유체가 비압축성이라는 제한 조건을 범함수에 도입하기 위하여 Lagrangian Multiplier를 도입하여 아래와 같은 확장된 범함수를 이용하여 해석하였다.

$$\delta J^* = \int_V \tau_{ij} \delta d_{ij} dV - \int_{S_q} t_i \delta V_i dS - \int_V \rho b_i \delta v_i dV - \int_V \delta \lambda \Delta_{ii} dV - \int_V \lambda \delta D_{ii} dV = 0 \quad (3)$$

여기서 Lagrangian Multiplier λ 는 압력을 의미한다.

Down Channel Flow는 Bubnov-Galerkin Weighted Residual Method를 이용하였다. 경계조건은

$$w = \bar{w} \quad \text{on } S_w$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{n_x} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{n_y} = \bar{w}_n \quad \text{on } S_q \quad (4)$$

이다. 이때 유한요소 해석을 위한 식은 다음과 같다.

$$\int_{S_q} \bar{w}_n N_i dS - \int_V \left[\mu \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \mu \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] dV - \int_V \frac{\partial p}{\partial z} N_i dV = 0 \quad (5)$$

요소의 형태는 2차 6절점 삼각형 요소를 사용하였다. 압력과 속도는 동일한 요소내에서 계산이 되며 압력은 삼각형 요소의 꼭지점에서 계산이 되고 속도는 6개의 절점에서 계산되었다.

재료의 특성이 전단속도에 따라 변하므로 유한요소 해석을 해나가는데 있어 Newton-Raphson Method를 도입하였으며, 계산하는데 필요한 기억장소를 줄이기 위하여 Frontal Wave Technique를 이용하였다[6].

3. 체류 시간 분포

지금까지의 스크루 단면상의 유동을 해석할 때에는 단순화시키기 위하여 Flight의 영향을 무시하여 y 축 방향의 유동을 무시하므로써 2차원적인 해석을 하였다[3]. 그러나 실제의 유동상태는 스크루 루트와 배럴 및 Flight로 완전히 밀폐된 단면내에서 일어나므로 xy 평면상에 수직인 z 축상에서 바라보았을 때 순환 유동(Circulatory Flow)을 하는 것을 보여준다. 단면의 종횡비(Aspect Ratio)가 큰 경우에는 배럴에 평행한 유동이 xy 평면상에서의 유동의 대부분을 차지하므로 2차원적인 접근 방식도 어느정도 타당성이 있으나 일반적인 스크루 단면형상의 경우에는 y 축 방향의 속도 성분 v 도 고려해야 한다.

3.1. 기존의 2차원적 방식(Pinto and Tadmor's model)

Pinto와 Tadmor[3]는 종횡비가 큰 스크루 단면상에서 Flight의 영향을 무시하고 x, z 축 방향의 속도 성분만을 고려하여 체류시간을 정의하였고 유동특성이 변하지 않는 뉴우튼 유체의 경우 해석적으로 체류시간을 구하였다.

이 경우 Fig. 2에 나타난 바와 같이 H1지점에서 x 방향의 속도 성분이 존재하지 않게된다. 2차원 접근방법에서는 실제 유체입자가 단면내에서 순환 유동을 하므로 한바퀴 회전하는데 지나게 되는 y 축상의 지점으로써 채널의 아랫부분의 y_c 를 구하고 이 입자가 압출기내에 체류하는 전체 시간에 대한 채널의 윗부분(배럴에서 H1지점사이)에 체류하는 시간의 분률 T_f 를 이용하여 축 방향의 평균속도를 다음과 같이 결정하였다.

$$\bar{V}_{axial}(y) = V_{axial}(y)T_f + V_{axial}(y_c)(1 - T_f),$$

$$V_{axial} = u \cos \Phi + w \sin \Phi \quad (6)$$

위의 결과를 이용하면 압출기의 축방향의 길이가 L 인 경우 y, y_c 지점을 통과하는 유체 입자의 체류 시간은 다음과 같다.

$$T(y) = \frac{L}{\bar{V}_{axial}(y)} \quad (7)$$

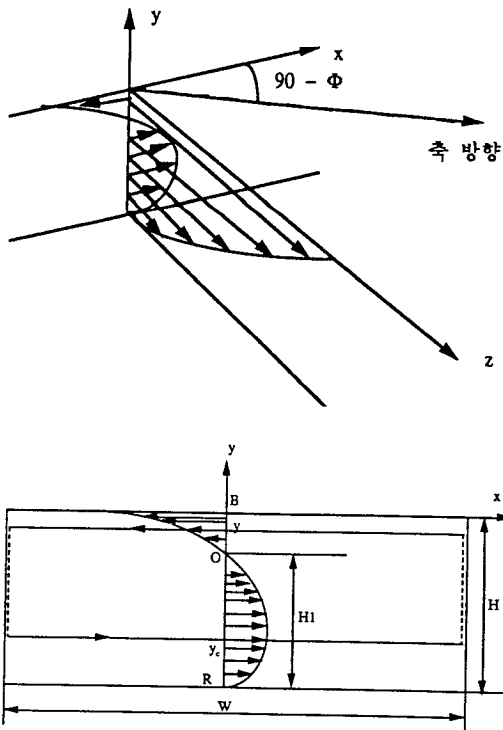


Fig. 2. (a) Schematic digram of velocity distribution in 2-D approach, (b) u distribution with imaginary circulatory flow path included in 2-D approach.

또한 이러한 관계를 이용하여 체류시간 분포함수 $f(T)$ 와 누적 체류시간 분포함수 $F(T)$ 를 구하였다. $f(T)$ 와 $F(T)$ 의 관계는 아래에서 소개될 예정이다.

3.2. 새로운 3차원적 방식

일반적으로 압출기내의 유동에서는 x, z축 방향의 유동뿐 아니라 Flight의 영향에 의한 y축 방향의 유동의 영향을 고려해야 한다. 이러한 3차원 유동 현상을 이해하기 위하여 우선 유동장내에서 유체입자의 운동을 알아보기 위하여 그 궤적을 알아보는 것이 중요하다. 입자의 궤적을 추적하는 경우 y축 방향의 속도 v를 고려하게 되므로 이를 이용하여 새로운 체류시간 및 체류시간 분포함수에 관한 정의를 하는데 이용하게 된다.

3.2.1. 입자의 궤적 추적(Particle Tracing)

속도와 변위 사이에는 다음과 같은 관계가 성립

한다.

$$\frac{dr(t)}{dt} = \vec{V}(x, y) \tag{8}$$

우리는 이미 유한요소법을 이용하여 기하학적인 모델링에 적용할 수 있는 운동방정식을 풀어 단면 전체에 걸친 속도분포를 알고 있으므로 식 (8)의 관계를 4차 Runge-Kutta Method를 이용하여 풀면 입의 위치에서 출발한 입자가 xy평면상에서 그리는 궤적을 구할 수 있다. 입자의 궤적을 구해가는데 있어 요소(Element)들간의 상호관계(Connectivity)를 이용하여 한 요소에 접해있는 요소들을 파악하므로써 한 위치에서 입의의 미소 시간간격(Time Step) 후의 다음 위치를 구하는데 효율을 높였다.

입의의 위치를 차지하는 입자에 위의 과정을 반복적으로 수행하므로써 유동로를 따라 흐르는 유체 입자의 궤적을 3차원적으로 구할 수 있다.

3.2.2. 체류시간(Residence Time) 및 체류시간 분포함수

3.2.2.1 체류시간

정의

Flight의 영향을 고려할 때 xy평면은 사방이 모두 막혀 있으므로 단면내에서의 유동은 완전한 순환을 이룸을 알 수 있었다. 이때 y축상의 입의의 위치에서 출발한 입자가 xy평면에서 완전히 한바퀴 돌고 다시 제자리로 돌아오는데 걸리는 시간을 T_{cir} 로 정의하고 이것은 입자궤적 추적을 Runge Kutta 식에서의 각 단계의 시간간격을 더함으로써 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_{cir} = \sum_j (\Delta T_j) \tag{9}$$

여기서 (ΔT) 는 각 단계에서 전진하는데 걸리는 시간간격을 의미한다. 이때 스크루의 축방향의 속도성분을 V_{axial} 라 하면 Fig.1로부터 배열이 Helix Angle 만큼 기울어져 움직이므로 다음과 같이 표현할 수 있음을 알 수 있다.

$$V_{axial} = u \cos \Phi + w \sin \Phi \tag{10}$$

식 (9)와 식 (10)를 이용하면 y축상의 입의의 위치에서 출발한 입자가 완전히 한바퀴 도는 동안에

축방향으로의 전진 길이를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta L_{axial} &= \int_0^{T_{cir}} V_{axial} dt \\ &= \int_0^{T_{cir}} (u \cos \Phi + w \sin \Phi) dt \end{aligned} \quad (11)$$

위의 식 (10)과 (11)을 이용하여 스크루 축방향의 평균속도를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\bar{V}_{axial}(y) = \frac{\Delta L_{axial}}{T_{cir}} = \frac{\int_0^{T_{cir}} V_{axial} dt}{T_{cir}} \quad (12)$$

위의 결과를 이용하면 전체 압출기의 축방향의 길이를 알고 있으므로 이 두 가지를 이용하면 y축상의 임의의 위치를 차지하는 유체입자가 압출기내에 체류하는 시간은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T(y) = \frac{L}{\bar{V}_{axial}(y)} \quad (13)$$

여기서 L은 압출기의 축방향 길이이며 T(y)는 y축상의 임의의 위치 y에서 출발한 유체 입자의 체류시간이다. 실제로 y는 x=0인 중심면에서 측정된 어느 셀의 y축 좌표를 나타내고 체류시간은 단순히 y의 함수가 아니라 셀의 함수인 것이다(Fig.3 참조).

위의 관계를 관찰해 보면 유동로에 수직한 xy 단면상의 유동뿐 아니라 z축 방향의 속도성분도 고려함으로써 3차원적으로 압출기내에서의 체류시간을 정의한 것을 알 수 있다.

계산 방법

입자의 궤적을 구하는 과정에서 각 단계의 입자의 위치에서 x, y, z축 방향의 속도성분을 구할 수 있다. 이를 이용하면 각 단계에서 입자가 축방향으로 이동한 거리와 그때 소요된 시간이 계산되며 각 단계에서의 결과를 모두 더하므로써 단면상에서 한바퀴 완전히 회전하는 동안에 축방향으로 이동한 거리 ΔL_{axial} 과 전체 소요된 시간 T_{cir} 을 구할 수 있다. 이를 식 (12)에 대입하여 축방향 평균속도 성분을 구하고 식 (13)을 이용하여 체류시간을 구한다.

3.2.2.2. 체류시간 분포함수(Residence Time Distribution Function)

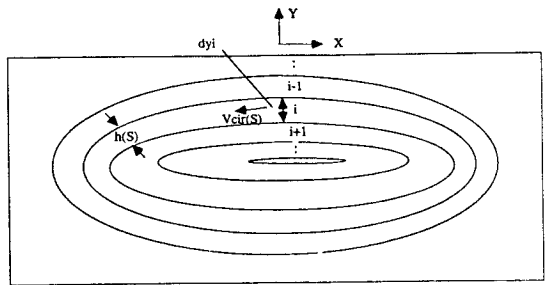
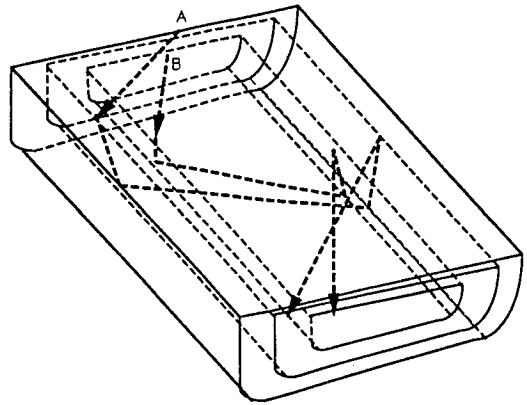


Fig. 3. (a) Schematic diagram of particle path in screw channel, (b) Representation of shell shape, h(S) and $V_{cir}(S)$ in xy plane.

정의

체류시간 분포함수 f(T)는 다음과 같이 정의된다.

$$f(T)dT = \frac{d\dot{Q}}{\dot{Q}} \quad (14)$$

즉, 전체 유량 \dot{Q} 에 대하여 체류시간이 T와 T+dT 사이에 있는 재료들이 흘러나가는 유량 $d\dot{Q}$ 의 비율을 나타낸다. 일반적으로 단면의 각 지점에서 속도의 크기가 다르므로 단면내에서 각 지점의 체류시간이 다르므로 dT 동안 흘러나간 유량이 각 지점에 따라 다르므로 체류시간과 체류시간 분포함수는 상호관계가 있음을 알 수 있다. 여기서 호퍼에 재료가 들어가서 처음 재료가 다이로 흘러나오는데 소요되는 시간을 T_0 라고 표시하면 이 T_0 에서 임의의 체류시간 T까지 흘러나온 유량의 비율을 누적체류시간 분포함수(Cumulative Residence Time Distribution Function) F(T)라고 정의한다.

$$F(T) = \int_{T_0}^T f(T) dT = \frac{\int_{T_0}^T d\dot{Q}}{\dot{Q}} \quad (15)$$

체류시간 T가 ∞될 때까지 고려하면 F(T)는 1을 갖게된다.

새로운 접근방법에서는 y상의 임의의 입자를 선택하여 궤적을 추적했을 때 그 입자의 궤적이 다른 입자의 궤적과 교차되지 않는 성질을 이용하여 Fig. 3과 같이 xy평면을 입자의 궤적을 이용한 여러 개의 셸(shell)의 형태로 나눌 수 있다. 셸을 이루는 각 곡선은 z축에서 보았을 때 입자의 궤적을 표시한다. 이 모델에 적합한 형태로 체류시간 분포함수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

각 셸의 중심부를 지나는 입자의 궤적을 추적하면 하나의 폐곡선을 이루는 궤적을 구할 수 있다. Fig. 3으로 설명을 하자. y축상의 한점에서 유체입자가 출발을 할 때 입자의 순환속도(Circulation Velocity)를 y축상의 점을 기준으로 궤적의 길이 S에 대한 함수로 표현할 때 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V_{cir}(S) = \sqrt{u(S)^2 + v(S)^2} \quad (16)$$

유체 입자가 각 셸에서 경계를 통과하지 못하므로 하나의 유동로와 같이 그 셸의 어느 부분이든지 S에 수직한 면(축방향으로는 단위길이라고 한다. 이를 이후부터는 폭이라 칭하겠다.)을 단위시간에 흘러나가는 유량은 일정하게 된다. 따라서 Fig. 3에서 i번째 셸에 적용시키면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_{cir}(S) \cdot h(S) = V_{cir}(0) \cdot h(0) = u_i dy_i = \text{constant}$$

으로부터

$$h(S) = \frac{u_i dy_i}{V_{cir}(S)} \quad (17)$$

이다. 여기서 h(S)는 임의의 위치에서의 폭을 나타내며 u_i 와 dy_i 는 y축상의 입자의 출발지점에서의 x 방향의 속도 성분 및 폭을 각각 나타내는 것으로 이 위치에서는 y축 방향의 속도 성분은 0이다. 단면상에서 임의의 셸의면적을 $dA(i)$ 라 할 때 위의 식 (17)을 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$dA(i) = u_i dy_i \int_c \frac{dS}{V_{cir}(S)} \quad (18)$$

식 (14)에 나타나 있는 체류시간 분포함수에 대한 일반적인 정의를 새로이 제시한 모델에 부합되도록 하기 위하여 스크루의 축방향에 대한 사영(Projection)으로 표현할 때 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(T) dT = \frac{d\dot{Q}_{axial}}{\dot{Q}_{axial}} = \frac{\bar{V}_{axial}(y) \frac{dA}{\cos\Phi}}{\int_A \bar{V}_{axial}(y) \frac{dA}{\cos\Phi}} \quad (19)$$

식 (18)을 식 (19)에 대입하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(T) dT = \frac{\bar{V}_{axial}(y) u_i dy_i \int_c \frac{dS}{V_{cir}(S) \cdot \cos\Phi}}{\dot{Q}_{axial}} \quad (20)$$

식 (13)을 y에 관하여 미분하여 구하는 dT와 dy_i 의 관계를 식 (20)에 도입하면 다음과 같은 새로운 형태의 체류시간 분포함수를 얻을 수 있다.

$$-\frac{1}{T} \frac{\bar{V}'_{axial}(y)}{\bar{V}'_{axial}(y)} u_i \int_c \frac{dS}{V_{cir}(S) \cdot \cos\Phi}$$

$$f(T) dT = \frac{\quad}{\dot{Q}_{axial}} dT \quad (21)$$

여기서 $\bar{V}'_{axial}(y)$ 은 $\bar{V}_{axial}(y)$ 의 y에 관한 미분을 의미한다. 위의 식을 관찰하면 단면내에서의 순환에 의한 유동과 체류시간 τ 이 고려됨으로써 z축 방향으로 발생하는 유동의 영향을 고려한 것을 모두 포함하고 있어 3차원적인 체류시간의 분포를 구할 수 있는 새로운 수학공식이라 하겠다.

식 (21)을 고분자가 압출기로부터 나오기 시작하는 시간 T_0 로부터 T까지 적분하면 누적 체류시간 분포함수 F(T)을 식 (15)에 의하여 구할 수 있게 된다.

계산 방법

i번째 셸에서 입자 궤적상의 임의의 지점 S에서 순환속도를 식 (16)을 통하여 구할 수 있다. 이때 입자 궤적을 구하는 과정에서 j번째 시간단계에서 j+1번째 단계로 넘어갈 때 이동하게 되는 거리를

구할 수 있다. 이를 이용하면 i 번째 셀의 면적은 식 (18)로부터 다음과 같이 합의 형식으로 나타낼 수 있다.

$$dA(i) = \sum_{j=1}^N \frac{u_i \cdot dy_i}{V_{cir,j}} dS_j \quad (23)$$

여기서 N 은 i 번째 셀에서 유체 입자가 완전히 한 바퀴 도는데 걸리는 전체 시간단계(Total Time Step) 횟수이다. 식 (23)을 이용하면 단면을 M 개의 셀로 나눈 경우 식 (19)로부터 체류시간 분포함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(T_i) = \frac{d\dot{Q}_{axial}}{\dot{Q}_{axial} \Delta T_i} = \frac{\bar{V}_{axial}(i) dA(i)}{\sum_{i=1}^M \bar{V}_{axial}(i) dA(i)} \frac{1}{\Delta T_i} \quad (24)$$

여기서 ΔT_i 는 i 번째 셀에서 이 셀의 경계를 이루는 입자들의 체류시간의 차이이다.

4. 체류시간 분포에 관한 연구결과 및 고찰

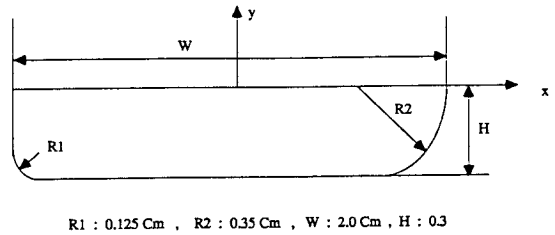
체류시간 분포에 영향을 미치는 중요 인자들의 영향을 효과적으로 관찰하기 위하여 Pinto와 Tadmor[3]가 제안한 무차원수를 이용하여 본 논문에서는 다이에 의하여 발생하는 압력과 배럴의 움직임에 의하여 발생하는 유동의 비를 이용하여 무차원수 Π 를 다음과 같이 정의하였다.

$$\Pi = - \frac{H^2}{6m_0 V_z} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (25)$$

위의 무차원수는 기하학적인 형상을 대표하는 값으로서 단면의 높이 H 를 취했으며, 유체의 점성계수로써 전단속도가 1일 때의 비뉴턴성 점성유체의 점성계수 m_0 를 취했으며 운전조건 및 다이의 특성을 지정하는 값으로 각각 V_z , $\frac{\partial p}{\partial z}$ 를 도입하였다.

4.1. FEM 시뮬레이션

FEM 시뮬레이션을 하기 위해서 해석하고자 하는 실제 단축 스크루 압출기에서 사용되고 있는 스크루의 단면과 유한요소 해석을 위한 메쉬로 나눈 것이 Fig. 4에 나타나 있다. 이를 이용하여 유한요소법을 적용하면 Fig 5와 같은 결과를 얻는다. Fig 5의 (c)



R1 : 0.125 Cm , R2 : 0.35 Cm , W : 2.0 Cm , H : 0.3

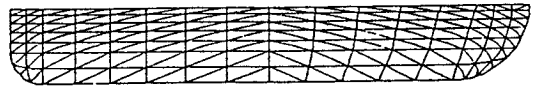


Fig. 4. (a) Cross section, i.e. xy plane, perpendicular to screw flight, (b) Mesh generation for FEM simulation.

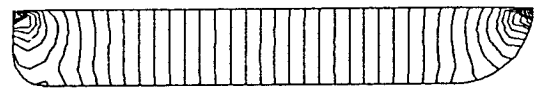
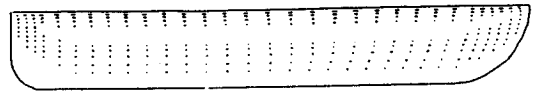


Fig. 5. Results of finite element analysis under an operating condition (20 rpm, 1.0 bar/turn: $\Pi = -0.0684$), (a) vector plot for u, v velocity components (b) Isolvel contours of w (c) Pressure contours.

에서 보면 스크루 Flight와 배럴이 만나는 부분에서 속도의 불연속점 때문에 이 부근에서는 압력의 변화가 매우 심한 Singular Point를 이룸을 알 수 있다.

4.2. 입자의 궤적 추적

단면상의 y 축상에서 3지점을 선택하여 출발한 입자가 z 축 방향으로 20 cm 이동할 때까지 그리는 궤적을 Fig. 6-1과 Fig. 6-2에서 (a)는 3차원적으로 나타낸 것이고 (b)는 z, x, y 축상에서 내려다 본 2차원적인 입자의 궤적을 보여주고 있다.

Fig. 6-1과 Fig. 6-2에서 Π 가 작은 Fig. 6-1의 경우

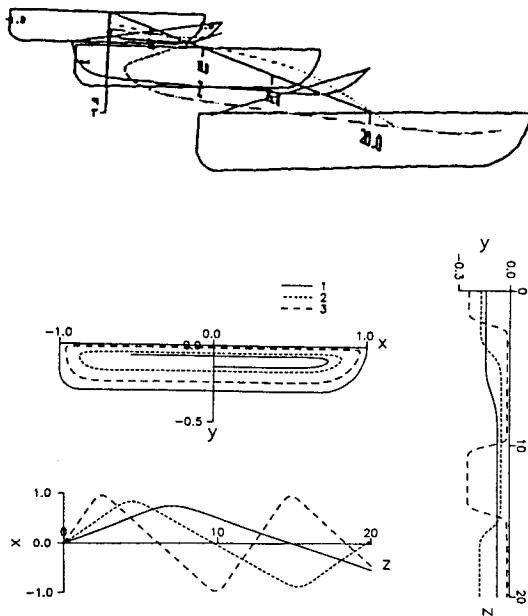


Fig. 6-1. Particle trajectories in screw channel under an operating condition (30 rpm, 0.2 bar/turn: $\Pi = 0.0091$). (a) 3-D plot, (b) 2-D plots projected in x-y, y-z, z-x planes (Length dimension is in cm.).

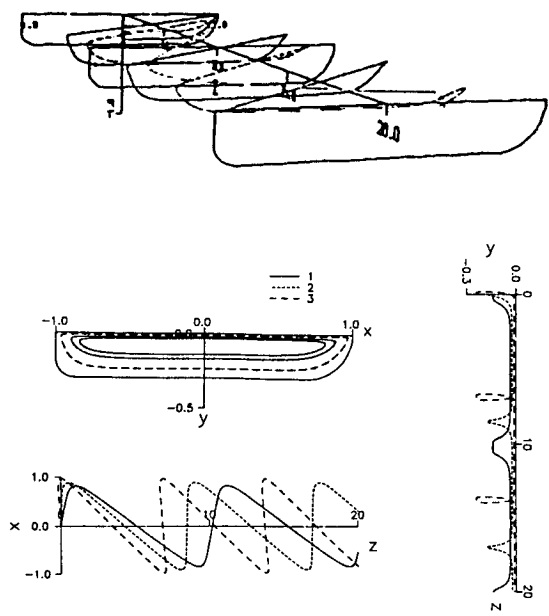


Fig. 6-2. Particle trajectories in screw channel under an operating condition (20 rpm, 1.0 bar/turn: $\Pi = 0.0684$). (a) 3-D plot, (b) 2-D plots projected in x-y, y-z, z-x planes (Length dimension is in cm.).

z축 방향의 전진속도가 매우 빠르기 때문에 입자가 그리는 나선형의 운동이 Fig. 6-2보다 훨씬 간단한 운동을 함을 알 수 있다. 그리고 경계면에서 멀리 떨어져 있는 곳에서 출발한 입자는 y방향의 속도 성분이 크지 않아 Fig. 6-2의 경우에는 거의 직선에 가까운 운동을 함을 알 수 있다. xy평면상의 유체입자의 궤적을 관찰해 보면 스크루의 Flight에서 멀리 떨어져 있는 경우 y축 방향의 속도성분의 크기는 거의 무시할 수 있을 정도로 작아 2차원적인 접근이 가능한 것을 알 수 있다. yz평면상의 유체입자의 궤적은 y축 방향의 속도성분의 영향을 고려하였을 경우에 입자의 거동을 보여주는 것으로 y축 방향으로 상하 움직이는 것을 보여주고 있다. 이때 Π 가 큰 경우 다이 부분의 압력이 매우 높아 입자가 계속 양의 z축 방향으로 움직이지 못하고 배럴에서 멀리 떨어진 부분에서는 압력에 의해 발생하는 유동이 배럴의 이동에 의해 발생하는 유동보다 크기 때문에 입자가 z축 방향으로 후진했다(Backward Flow) 전진하는 양상을 보여주고 있다. xz평면상의 유체

입자의 궤적에서는 Π 가 큰 경우 스크루의 루트부분에서는 음의 z축 방향으로 약간 이동하며 전진하는 모양을 보여주고 있다.

4. 3. 체류시간 및 체류시간 분포함수

Fig. 7과 8은 Pinto와 Tadmor[3]의 모델을 이용하였을 때 주어진 3가지 공정조건하에서 단면내의 체류시간 및 체류시간분포를 계산한 결과를 보여주고 있다.

Fig. 9에서 11까지는 새로이 제안한 모델을 이용하여 구한 결과를 보여주고 있다. Fig. 9의 (a), (b)를 보면 경계면 부근에서의 식 (12)에 의해 구해진 z축 방향의 평균속도의 크기가 작고 중앙부분에서 가장 크게 나타난다. 한편 이 위치에서 유체입자의 z축 방향의 이동거리가 가장 큰 것을 알 수 있다. 또한 Fig. 9(b)는 Π 가 작을수록 속도의 크기가 큰 것을 보여주고 있다. 따라서 Fig. 10에 나타난 것과 같이 체류시간은 식 (25)에 의해 구해진 Π 가 작을수록 짧고 클수록 긴 것을 알 수 있다. 체류시간은

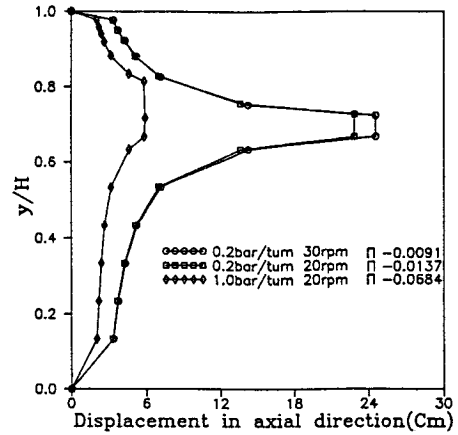
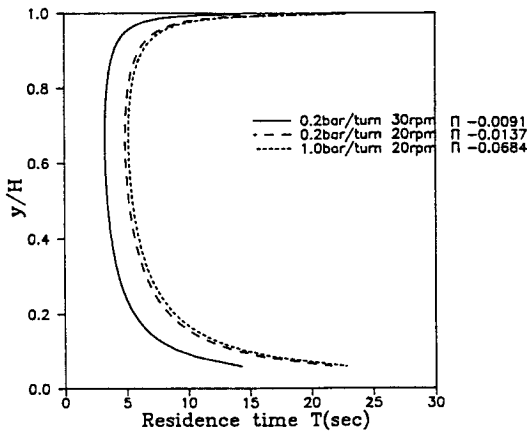


Fig. 7. Residence time as a function of y by means of Pinto and Tadmor's model.

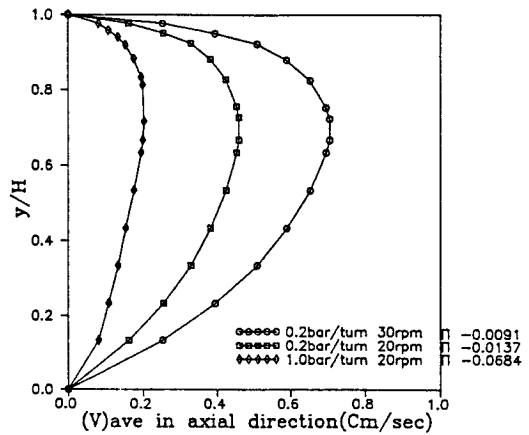
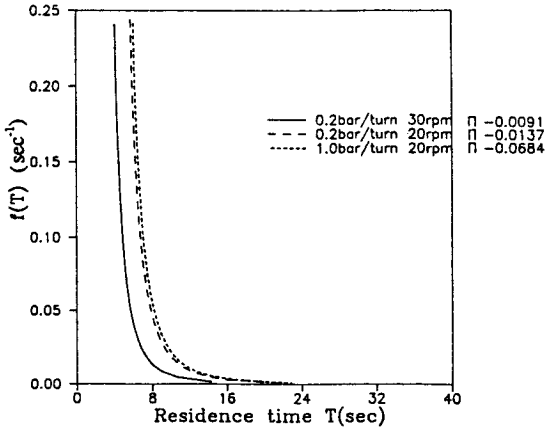


Fig. 9. (a) Displacement in axial direction as a function of y while fluid particle circulates 1 turn in xy plane, (b) Average velocity in axial direction as a function of y .

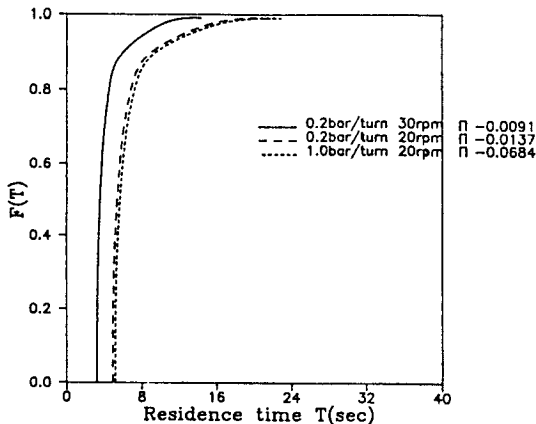


Fig. 8. Residence time distribution function by means of Pinto and Tadmor's model. (a) Residence time distribution function $f(T)$, (b) Cumulative residence time distribution function $F(T)$.

일반적으로 단면의 중앙부에서 작고 경계면으로 갈수록 커짐을 알 수 있다.

이 결과를 Fig. 7의 결과와 비교해 보면 다이의 영향에 의한 압력 상승이 클수록 Fig. 6에 나타난 바와 같이 동일한 거리를 움직이는데 유동로내에서 유체입자의 회전수가 많으므로 Flight의 영향이 크게 나타남을 관찰할 수 있다.

Fig. 8은 Pinto와 Tadmor[3]가 제안한 모델을 이용하여 체류시간 분포함수를 구한 것이다.

Fig. 11은 새로이 제안한 모델을 이용하여 구한 것으로, 시간이 경과됨에 따라 $f(T)$ 는 급격히 감소하고 $F(T)$ 는 1에 접근하는 것을 알 수 있다. 이것은 앞에서 전개한 바와 같이 체류시간 분포함수는 체

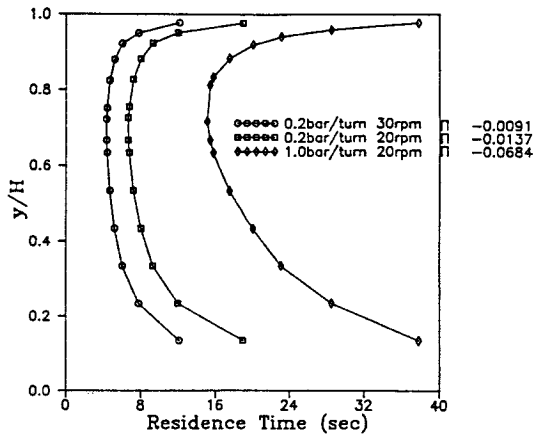


Fig. 10. Residence time as a function of y by means of new approach.

류시간의 분포에 따른 유량 분율을 나타내므로 예측한 것과 일치함을 알 수 있다. Π 가 큰 경우에는 다이부분의 압력이 높거나 배럴의 회전이 느린 경우를 나타낸다. 따라서 이러한 경우에는 유동 유체가 압출기 내부에 체류하는 시간이 길어질 것이다. Fig. 11의 (a), (b)의 경우에서 보면 Π 가 큰 경우 처음 유체가 압출기 내부에서 빠져 나오기 시작하는데 걸리는 시간도 길며, 유체가 완전히 다 빠져 나오는데 걸리는 시간이 긴 것을 알 수 있다.

이 결과를 Fig. 8과 비교해 보면 Fig. 7과 Fig. 10의 비교에와 마찬가지로 다이에 의한 압력의 상승이 클수록 Flight의 영향이 커져 $f(T)$ 곡선의 경우 체류시간이 더 길어지는 분포를 갖는 것을 알 수 있다. 그런데 비해 Pinto와 Tadmor의 모델에서는 압력구배가 커져서 Π 가 커지는 경우에 순환 유동 효과가 반영되지 않아 큰 영향을 받지 않음을 알 수 있다. 즉 Pinto와 Tadmor의 2차원적 모델은 순환 유동 효과를 제대로 포함시키지 못하기 때문에 일반적으로 체류시간을 과소평가하는 경향을 나타낸다.

5. 결 론

종래의 RTD 계산방법[3, 4]은 단순화된 2차원 모델을 기준으로 하였기 때문에 부정확한 RTD를 예측할 위험이 있다. 본 논문에서는 3차원 순환 유동을 고려한 RTD의 정의를 제안하고 새로운 공식을

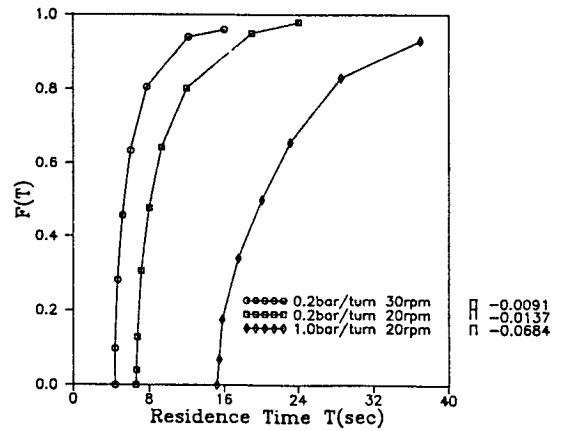
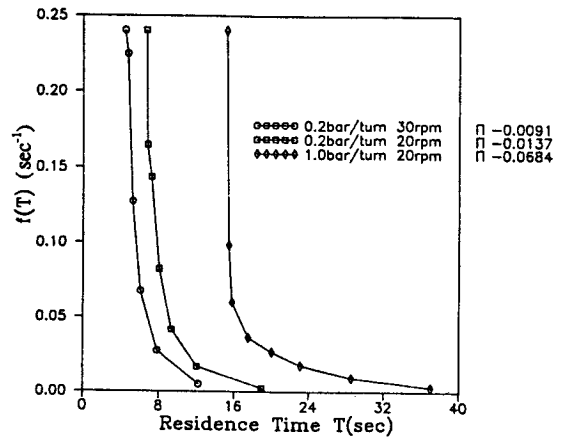


Fig. 11. Residence time distribution function by means of New approach. (a) Residence time distribution function $f(T)$, (b) Cumulative residence time distribution function $F(T)$

유도하였다. 유한요소법을 이용한 유동 해석의 결과로써 얻어진 3차원 속도분포를 새로이 제시된 RTD 계산방법을 적용하여 스크루의 Flight 효과인 순환 유동이 RTD에 미치는 영향에 대하여 고찰해보았다. 본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 유동로를 따라 흐르는 유체의 유동을 관찰하였을 때 유체입자는 3차원적으로 유동로를 따라 나선형을 그리며 xy 평면상에서는 완전한 폐곡선을 이루는 것을 알 수 있다. 이러한 유체 입자의 궤적은 4차 Runge Kutta Method를 이용하여 구하였다.
2. 유동로를 따라 나선형의 곡선을 그리며 운동을 하는 유체의 체류시간을 다음과 같이 정의하였다. 임의의 위치에서 출발한 유체입자가 xy 평면상에서

한바퀴 회전한 후 다시 제자리로 돌아오는 동안 걸린 시간과 그 동안에 유동로 방향으로 이동한 거리로부터 평균속도를 구하면 전체 유동로 길이로부터 체류시간이 구해진다. 이런 정의하에 RTD에 관한 새로운 공식 및 계산방법을 제시하였다.

3. 체류시간 분포함수를 압출기의 성능 평가를 위해 도입한 무차원수 Π 에 대하여 관찰하면 다음과 같다. Pinto와 Tadmor의 기존방법에 의해 주어진 체류시간에 비하여 3차원 속도장으로부터 새로운 계산방법에 의하여 구해진 체류시간은 Π 가 크면 더 크게 나타난다. 그 이유는 Π 가 클수록 동일거리를 이동하는데 더 많은 순환회전이 요구되고 따라서 스크루 Flight로 인한 순환 유동 효과가 더 많이 나타나기 때문이다. 이런 경우일수록 기존의 방법은 체류시간을 과소평가하게 된다.

이와 같은 관찰에 의하면 스크루 단면의 종횡비가 작을수록, 또한 압력구배 증가로 인한 Π 가 클수록 3차원 순환 유동 효과가 RTD에 미치는 영향이 크게 되고, 이런 경우에 종래의 계산방법은 체류시간을 과소평가하므로 본 논문에서 제시한 RTD 계산방법이 추천된다.

후 기

본 연구를 지원해 준 한국과학재단과 포항공과대학에 감사드립니다.

기 호

- b_i : 단위 질량당 체력(body force)
- D_{ij} : Rate of Deformation Tensor
- $f(T)$: Residence Time Distribution Function
- $F(T)$: Cumulative Residence Time Distribution Function
- H : screw channel의 최대 깊이
- $h(S)$: 셸의 폭
- dy_i : $S=0$ 인 지점에서 셸의 폭
- n : power law index
- n_x : x Component of an outward normal vector
- n_y : y Component of an outward normal vector

- tor
- p : pressure
- $\vec{r}(t)$: displacement
- RTD : Residence Time Distribution
- S : surface
- t : time
- T : Residence Time
- T_{cir} : total elapsed time per 1 turn
- T_i : Residence Time for i-th shell
- u : velocity component in the x-direction
- V_{axial} : axial velocity
- $\vec{V}(x, y)$: velocity vector
- $V_{cir}(S)$: 각 셸에서의 회전속도(circulating velocity)
- v : velocity component in the y-direction
- W : maximum width of the screw channel
- w : velocity component in the z-direction
- x : x-coordinate
- y : y-coordinate
- z : z-coordinate
- $(\bar{\quad})$: prescribed value of(..)

Greek Letters

- $\delta(..)$: variation of (..)
- λ : Lagrangian multiplier
- Φ : pitch angle
- μ : viscosity

참고문헌

1. E.E. Agur and J. Vlachopoulos, *Polymer Eng. & Sci.*, **22**, 1084 (1982).
2. A. Hannachi and E. Mitsoulis, *Intern. Polymer Processing*, **4**, 244 (1990).
3. G. Pinto and Z. Tadmor, *Polymer Eng. & Sci.*, **10**, 279 (1970).
4. Z. Tadmor and I. Klein, "Engineering Principles of Plasticating Extrusion", Reinhold Book Cooperation, 1970.
5. T. Sakai, *Intern. Polymer Processing*, **4**, 229 (1990).
6. T. Sastrohartono and T.H. Kwon, *Int. J. Numer. Method in Eng.*, **11**, 1369 (1990).
7. R.T. Steller, *Polymer Eng. & Sci.*, **30**, 400 (1990).

8. C.D. Han and K.Y. Lee, *Polymer Eng. & Sci.*, **30**, 1557 (1990).
9. G. Lidor and Z. Tadmor, *Polymer Eng. & Sci.*, **15**, 437 (1975).
10. J.T. Lindt, *Polymer Eng. & Sci.*, **16**, 284 (1976).
11. R.B. Bird, R.C. Armstrong and O. Hassager, "Dynamics of Polymeric Liquids", Vol.1: Fluid Mechanics, 2nd Ed., Wiley-Interscience, 1987.