

<연구논문>

미분형 Maxwell 유체내 구형기포의 수축에 관한 연구

김 종 열

충남대학교 공과대학 고분자공학과
(1991년 4월 2일 접수)

A Study on the Collapse of Spherical Bubbles in Maxwell Fluids of Differential Model

Chongyup Kim

Chungnam National University, Yuseong-Gu, Taejeon 305-764
(Received April 2, 1991)

요 약

본 연구에서는 구형기포가 미분형의 upper convected Maxwell 모델을 따르는 유체내에서 수축할 때의 현상을 이론적으로 해석하였다. 수치해법으로는 Lagrangian 좌표계에서 지배방정식을 유도 사용함으로써 자연스럽게 자유표면을 추적하는 동시에 압력변수도 반복에 의하지 않고 직접적인 방법(explicit numerical scheme)으로 계산할 수 있는 Galerkin-유한요소법을 개발 사용하였다. 본 연구의 결과 유체의 탄성은 변형초기에 충분히 발달치 못하기 때문에 수축을 가속화시키지만, 수축 후기에는 지연시킴을 알 수 있었다. 수축의 속도는 적분형 Maxwell 유체에서 보다 빠른 것을 알 수 있었는데, 이는 유체의 정지이력(rest history)에 의한 것으로 판단되었다. 또한 Maxwell 유체내에서 기포가 수축할 경우 탄성에 의한 반동(rebound)현상이 나타나며, 반동이 점성에 의하여 감쇄될 때의 진폭과 주기는 비례함을 보였다.

Abstract—In this research, the collapse of a spherical bubble contained in a large body of fluid was analyzed theoretically. The governing equations were derived in the Lagrangian frame of reference, and a fully explicit numerical scheme was developed using the Galerkin-finite element method for the upper convected Maxwell fluid of differential model. It was observed that the fluid elasticity accelerated the collapse in the early stage due to the slow growth of viscoelastic stress, while in the later stage, it retarded the collapse. In the differential model fluid, the pace of bubble collapse was faster than in the integral model fluid, which was ascribed to the effect of rest history. During the collapse bubble rebounds were observed and the rebound period scaled the amplitude.

Keywords: Lagrangian frame, viscoelasticity, cavitation, rebound

1. 서 론

비뉴턴성 유체내의 공동화 현상(cavitation)에 의하여 생성되는 기포는 뉴턴성 유체(Newtonian fluid)내의 기포와 많은 차이를 나타내며, 특히 공

동화의 발생현상(cavitation inception)과 공동화에 의한 손상(cavitation damage)이 현저히 감소되는 것으로 실험적으로 관찰되고 있다[1-6]. 특히 아주 낮은 농도의 고분자 용액, 예로써 마찰 감소 유체(drag reducing fluid)내에서는 공동화현상 자체가

현저히 감소할 뿐만 아니라 기포의 수축 때 생기는 손상자채도 뉴턴성유체의 경우와 비교할 때 상당히 작은 것으로 알려져 있다.

그러나 비뉴턴성 유체내의 기포의 변형에 대하여는 아직 구대칭성(spherical symmetry)이 유지되는 경우에도 유연학적인 시스템의 해석이 이론적으로 충분히 되어 있지 못한 실정이다. Foggler와 Goddard[7]는 비뉴턴성유체내의 기포의 수축에 관한 연구에서 가장 선구적인 연구를 하였으나 선형 점탄성 유체(linear viscoelastic model)만을 사용하여 변형이 큰 시스템 해석에서 아주 중요한 material objectivity를 만족하지 못하였다. Ting[8]은 Oldroyd의 3 상수 모델을 이용하여 해석을 시도하였으나, 그의 해에는 물리적 현상으로 받아들이기에 곤란한 해가 포함되어 있고, 최근 Papanastasiou 등[9]이 K-BKZ형의 모델을 사용하여 관성이 없는 경우에 대한 해석을 시도하였다. Papanastasiou 등은 비교적 높은 점도를 갖는 고분자 용액의 인장점도(extensional viscosity)를 측정하는 Pearson과 Middleman[10], Johnson과 Middleman[11]의 실험치와 비교하여 좋은 결과를 보였으나 그들이 지적한 대로 이 경우는 관성이 무시될 수 있는 경우만을 대상으로 하여 실제 관성이 매우 중요한 공동화 기포의 운동을 모사할 수 없다.

관성항을 포함시키고 material objectivity를 만족시키는 constitutive식을 이용하여 구형 공동화 기포의 수축과정을 연구하기 위하여 Kim[12]은 K-BKZ형 모델의 하나인 upper convected Maxwell 유체에 대하여 Hassager[13]의 K-BKZ type의 유체 운동에 관한 Lagrangian 좌표계에서의 변분법(variational principle)을 이용하여 유한요소법으로 수치해를 구하였다. Kim은 일반적으로 사용되는 Eulerian 좌표계에서가 아니라 Lagrangian 좌표계에서 자연스럽게 자유표면을 추적하는 반복에 의하지 않은 완전한 직접수치해법(explicit numerical scheme)을 개발함으로써 수치해법상의 문제를 해결하였고, 유체의 탄성이 수축초기에 수축을 가속화 하지만 후기에는 지연시킴을 보고하였다. 본 연구는 Kim[12]의 연속으로서 변분법이 없는 미분형의 upper convected Maxwell 유체를 대상으로 Lagrangian 좌표계에서 지배방정식을 직접 유도한 후 Galerkin-유한요소법으로 수치해를 구하였다. 결과 유변학, 제 3 권 제 1 호, 1991

의 해석에서는 공동화조건에서 비뉴턴성 유체가 가지는 변형에 있어서 점탄성(viscoelasticity)의 역할을 중점적으로 검토하였다.

2. Lagrangian 좌표계에서의 지배방정식

Eulerian 좌표계에서 일반적인 유체변형에 관한 지배방정식은 다음과 같은 Cauchy의 운동량보존식, 연속방정식 및 constitutive 방정식으로서

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda \dot{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta \mathbf{D} \quad (3)$$

여기서 \cdot 는 upper convected derivative, \mathbf{D} 는 변형률(rate of deformation) 텐서이며 다음과 같이 정의된다:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} - \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{v})^T \quad (4)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (5)$$

식 (1)-(3)을 Lagrangian 좌표계에서의 지배방정식으로 변환하려면 좌표 \mathbf{x} 가 종속변수가 되어야 하고, 독립변수는 유체입자라벨(fluid particle label)로 대치되어야 한다. 입자라벨은 기준시간 t_0 에서 입자의 좌표 \mathbf{x}^0 로 정하는 것이 편리하며, 이 경우 좌표를 입자라벨과 시간의 함수로서 변위함수

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t_0, t) \quad (6)$$

로 표시할 수 있다. 또 다른 종속변수로는 유체입자의 Lagrangian 속도 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^0, t_0, t)$ 와 Lagrangian 압력 $p = p(\mathbf{x}^0, t_0, t)$ 가 있고, 이 중 Lagrangian 속도장은 다음과 같이 좌표의 미분으로 표시할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(\mathbf{x}^0, t_0, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}^0, t_0, t) \quad (7)$$

이러한 Lagrangian 변수들을 Eulerian으로 표현한 식 (1), (2) 및 (3)에 대입하면 Lagrangian 좌표계

에서의 지배방정식이 된다. 식 (2)의 연속방정식은 운동량방정식에서와 같이 Lagrangian 속도의 미분 대신 Kim[12]의 변분법을 이용한 문제구성에서와 같이 변형그레디언트(deformation gradient) $E = \partial x / \partial x'$ 의 행렬식 값이 비압축성 유체에 대하여 1이라는 다음과 같은 식으로 대체하는 것이 수치해를 구할시 가장 편리한 것으로 나타났다.

$$a = \det E = 1 \quad (8)$$

또한 식 (3)의 응력에 관한 식에서 식 (4)의 upper convected 미분 중 material 미분은 Lagrangian 미분으로 대체하고 속도기울기는 Lagrangian 속도의 유체입자 라벨에 대한 미분으로 대체한다.

이러한 과정을 통하여 Lagrangian 좌표계에서의 일반적인 형태의 지배방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau \quad (9)$$

$$\det E = 1 \quad (10)$$

$$\tau + \lambda \dot{\tau} = 2\eta D \quad (11)$$

여기서 시간에 대한 미분 d/dt 는 Lagrangian 시간 미분(time dervative), ∇ 는 질점(material point)에 대한 그레디언트 연산자이다.

3. 문제의 구성

본 연구에서는 그림 1과 같이 정지된 유체내에 반경 R_0 의 구형 공동화 기포를 생각하기로 한다. 기포에서 충분히 떨어진 곳의 압력을 p_0 , 기포경계면에서의 표면장력을 σ 라고 하고, 시간 $t=0$ 까지는 기포내의 압력을 p_i 로 유지시키다가, 즉

$$p_i - p_0 = \frac{2\sigma}{R_0} \quad (12)$$

로 평형을 유지하다가, $t=0$ 에서 기포내의 압력을 0으로 하고 기포로부터 충분히 먼곳의 압력을 p_0 로 그대로 유지시키면 기포내와 유체간의 압력차에 의하여 기포가 수축하기 시작한다. 이러한 기포의 수축현상을 해석하기 위하여 다음과 같은 가정을 도입하였다 :

1) 중력 등의 질량에 작용하는 힘(body force)이

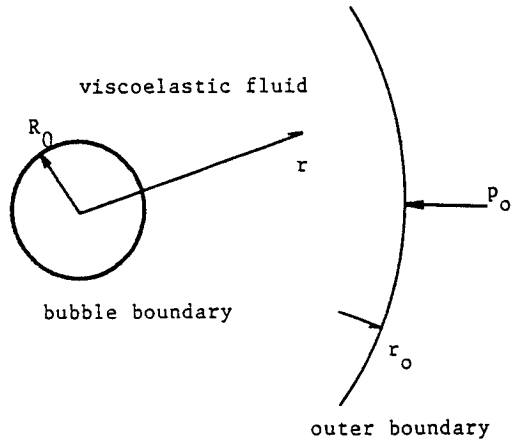


Fig. 1. The physical process. A cavity collapses in a viscoelastic fluid under a pressure difference. The outer boundary is chosen so that the motion outside boundary is neglected and only the pressure exerts a inward radial force.

없다.

2) 계면의 불안정 등에 의한 3차원 운동은 없으며 순수한 반경 방향의 운동만 있다.

3) 열 및 물질전달의 저항이 없는 등온, 등농도 계이다.

4) 유체는 기포 표면과 기포로부터 충분히 떨어진 가상의 반경 r_0 을 가진 공간내에 국한되어 있다. 이때 반경 r_0 의 면에는 압력만이 작용한다.

이와 같은 가정들에 의한 문제는 기본적으로 유체의 constitutive식을 제외하고는 Rayleigh의 완전유체(perfect fluid)내에서의 기포의 수축문제와 동일하다[7].

구대칭이 유지되는 변형에 대하여는 응력 텐서, 변형그레디언트 및 속도기울기가 대각 텐서로 주어지며,

$$\text{trace } \tau = \tau_{rr} + \tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi} = 0 \quad (13)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\phi\phi} \quad (14)$$

인 점을 이용하면 다음과 같은 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[3 \frac{\tau_{rr}}{r} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \right] \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial r'}\right)\left(\frac{r}{r'}\right)^2=1 \quad (16)$$

$$\tau_r + \lambda\left(\frac{d\tau_r}{dt} - 2\tau_r \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 2\eta \frac{\partial u}{\partial r} \quad (17)$$

이 방정식들을 Kim[12]에서와 같이 길이에 대하여는 초기반경 R_0 , 시간에 대하여는 Rayleigh 시간 스케일 $(\rho/p_0)^{1/2}R_0$, 응력에 대하여는 p_0 로서 기준 스케일을 사용하면 무차원 변수로 표시된 지배방정식은

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[3\frac{\tau}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial r}\right] \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial r'}\right)\left(\frac{r}{r'}\right)^2=1 \quad (19)$$

$$\tau + De\left(\frac{d\tau}{dt} - 2\tau \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 2\eta \frac{2}{Re} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (20)$$

이 되는데, 여기서 Re 와 De 는 각각 Reynolds 수 및 Deborah 수를 나타낸다. 한편 무차원 변수로 나타낸 기포면에서의 힘의 평형은

$$f = -p + \tau - We \frac{1}{r} \quad (21)$$

로서 We 는 Weber 수를 나타낸다. 또한 기포 중심에서 충분히 먼 곳의 압력은

$$p=1 \quad (22)$$

으로서 일정하며, 기포가 수축하기 시작할 때의 초기조건은

$$\text{at } t=0 : R_0=1 \quad (23)$$

$$u=0 \quad (24)$$

$$\tau=0 \quad (25)$$

로 쓸 수 있는데, 식 (24), (25)는 $t=0$ 까지는 유체가 정지되어 있음을 나타낸다.

식 (18)을 보면 관성의 항이 포함된 material 미분이 질점의 속도에 대한 단순한 시간에 미분으로 간략해졌음을 볼 수 있다. 여기서 r 에 대한 미분이 계산과정에서 결정되어야 할 질점에 대한 미분으로

변형된 것이 문제될 것으로 생각할 수 있으나, 기포 표면을 추적하여야 하는 본 연구의 경우에는 질점의 결정 자체가 해를 구하는 과정의 한 단계이므로 별도의 노력없이 기포면을 추적할 수 있음을 알 수 있다. 특히 다음에 기술된 Galerkin법을 사용하면 문제 전체를 반복에 의하지 않는 완전한 직접수치 해법으로 풀 수 있는 매우 유용한 방법임이 밝혀졌다.

4. Galerkin법의 적용

식 (18)-(20)을 유한요소법을 이용하여 풀기 위하여 보간함수로서 Coleman[14]이 사용하였고 Kim[12]의 적분형모델의 해에서 유용한 것으로 확인된 대로 속도 및 응력에 대하여는 선형보간함수를, 압력에 대하여는 0차, 즉 요소압력(element pressure)으로 정하는 방법을 사용하되, 여기서는 Lagrangian 좌표가 더 관계되므로 r 에 대하여는 u 와 같이 선형보간함수를 사용하였다. 즉

$$u = \sum_i u_i \phi_i(\xi) \quad (26)$$

$$r = \sum_i r_i \phi_i(\xi) \quad (27)$$

$$\tau = \sum_i \tau_i \phi_i(\xi) \quad (28)$$

$$p = \sum_j p_j \psi_j(\xi) \quad (29)$$

로 쓰고 Galerkin법을 식 (18)에 적용하고, Green의 공식을 이용하여 다시 정리하면

$$\begin{aligned} \int_V \phi_k \frac{du}{dt} dV &= \int_V \phi_k \left[-\frac{\partial p}{\partial r} + \left(3\frac{\tau}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial r} \right) \right] dV \\ &= \int_S (-p + \tau) \phi_k dS + \int_V (p - \tau) \left(\frac{2\phi_k}{r} + \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \right) dV \\ &\quad + \int_V 3\frac{\tau}{r} \phi_k dV \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &= \int_S \left(f + \frac{1}{r} We \right) \phi_k dS + \int_V p \left(\frac{2\phi_k}{r} + \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \right) dV \\ &\quad + \int_V \left(\frac{\tau}{r} \phi_k - \tau \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \right) dV \end{aligned}$$

가 된다. Constitutive식에 대하여도 같은 방법을 적용하면

$$\int_V \frac{\partial \tau}{\partial t} \phi_k dV = \int_V 2\tau \frac{\partial u}{\partial r} \phi_k dV + \frac{1}{De} \int_V \left(\frac{2}{Re} \frac{\partial u}{\partial r} - \tau \right) \phi_k dV \quad (31)$$

를 얻는다. 연속방정식에 대하여는 압력에 대한 보간함수를 곱하여 적분하면

$$\int_V \psi_i \left(\frac{\partial r}{\partial r'} \right) \left(\frac{r}{r'} \right)^2 dV = \int_V \psi_i dV \quad (32)$$

가 된다.

식 (30)-(32)에 각각 τ , r , u 및 p 를 보간함수를 이용하여 표현한 식 (26)-(29)를 대입하고, 필요한 경우에는 연속방정식의 변형인

$$\left(\frac{r'}{r} \right)^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial r'} \right)^2 \quad (33)$$

혹은

$$\left(\frac{\partial r'}{\partial r} \right) = \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \quad (34)$$

을 이용하면

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} \int_V \phi_i \phi_k dV &= \left[f + We \frac{1}{r_0} \right] 4\pi r_0^2 \delta_{k1} - [f] 4\pi r_N^2 \delta_{kN} \\ &+ p_j r_i r_m (\omega_{kimj} + 2\omega_{imkj}) \\ &+ \tau_i r_i r_m \int_V \frac{\phi_i \phi_m}{r'^2} (a_i \phi_k - a_k \phi_i) dV, \\ \omega_{ijk} &= \int_{V_i} a_i \phi_j \phi_k dV \quad (35) \\ \frac{d\tau_i}{dt} \int_V \phi_i \phi_k dV &= 2\tau_n u_i r_i r_m \int_V \frac{\phi_k \phi_i \phi_m \phi_n a_i}{r'^2} dV \\ &+ \frac{1}{DeRe} u_i r_i r_m \int_V \frac{\phi_k \phi_i \phi_m a_i}{r'^2} dV \\ &- \frac{1}{De} \tau_i \int_V \phi_i \phi_k dV \quad (36) \end{aligned}$$

$$\omega_{ijk} r_i r_j r_k - \frac{V_i}{4\pi} = 0 \quad (37)$$

가 된다. 이 식들에 초기의 마디점위치(nodal position), 초기의 마디점의 속도(nodal velocity) 및 초기의 마디점응력(nodal stress)을 주면 Kim[12]의 대수방정식과 연속방정식의 해법을 이용하여 시간에 대하여 적분할 수 있다.

5. 결과 및 검토

5.1. 뉴턴성 유체내 기포의 수축

문제구성의 타당성과 수치해의 정확도 등을 검토하기 위하여 먼저 정확한 해를 알고 있는 뉴턴성 유체를 대상으로 검증을 수행하였다. 뉴턴성 유체의 경우는 점성응력이 다음과 같이 표현된다.

$$\tau = -\frac{4}{Re} \frac{u}{r} \quad (38)$$

따라서 식 (30)의 운동방정식에서 점성응력항은 다음과 같다.

$$-\frac{4}{Re} u_i r_i \int_V \phi_i \frac{(a_i \phi_k - a_k \phi_i)}{r'^2} dV \quad (39)$$

이러한 식을 이용하여 유한요소법 프로그램을 작성한 후 여러 메시(mesh)계에서 해를 구하고 계산의 정확도를 검토하였다. 이때 기포수축 속도가 메시분할방법에 따라 다르게 나타나는 현상이 관찰되었는데, 이러한 현상은 Lagrangian 좌표계의 유한요소법의 공통적인 현상으로서 Kim[12]의 방법으로서 적정분할법을 구하여 해결하였다. 그림 2에는 표 1에 보인 메시로 구한 서로 다른 Reynolds 수에서의 해와 엄밀해(exact solution)를 동시에 나타내었다. 그림 2에 보인 결과는 엄밀해와 그림의 선의 분해능(resolution)으로서는 완전히 일치함을 알 수 있었으며, 이로부터 Lagrangian 좌표계에서 미분형의 유체에 대한 문제구성법의 타당성 및 메시계의 적합함을 1차적으로 확인하였다.

5.2. Maxwell 유체내 기포의 수축

Maxwell 유체의 경우에는 기포의 변형에 Reynolds 수, Deborah 수 및 Weber 수의 3가지 무차원군이 존재한다. 그러나 본 연구에서는 점탄성이 기포수축에 미치는 영향을 검토하고, 특히 Kim[12]의 적분형 유체모델의 해와 비교하기 위하여 표면장력,

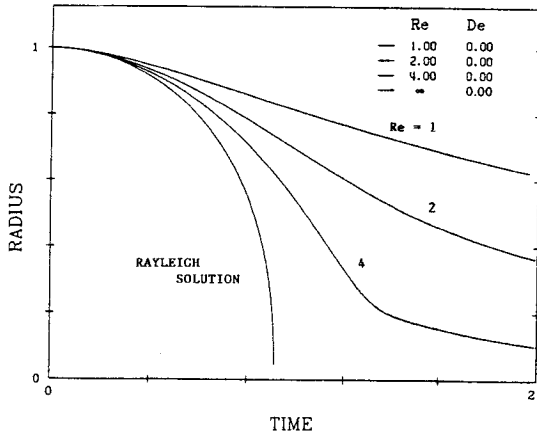


Fig. 2. Bubble collapse in a Newtonian fluid. Each line represents both the exact and FEM solution. This result is used for checking the formulation of the problem and numerical algorithm.

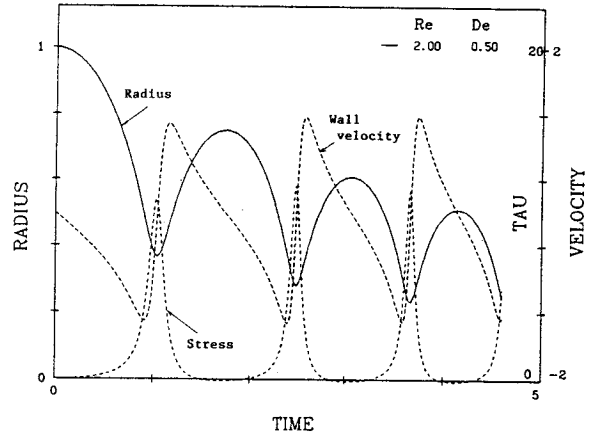


Fig. 3. A typical bubble collapse curve ($Re=2$ and $De=0.5$) The Rayleigh solution is also shown for comparison. Solid line: radius. Dashed line: velocity.

Table 1. Initial nodal positions used in FEM

Node Number	Nodal Position
1	1.000
2	1.001
3	1.004
4	1.008
5	1.015
6	1.025
7	1.04
8	1.1
9	1.15
10	1.2
11	1.3
12	1.5
13	1.75
14	2.0
15	2.5
16	3.2
17	4.7
18	6.5
19	10.0
20	15.0

즉 We 의 역할은 검토하지 않았다. 그림 3에는 Maxwell 유체내 기포 수축과정의 전형적인 예를 도시하였다. $Re=2.0$, $De=0.5$, $We=0.0$ 인 경우 기포는 수축-성장을 반복하는 것을 볼 수 있으며, 특히 초

기단계에 있어서는 뉴턴성 유체내 기포의 수축에 비하여 수축이 가속화하는 것을 볼 수 있는데 이는 Kim[12]의 적분형의 Maxwell 유체의 경우에도 확인한 사실이다.

이와 같이 액체의 탄성은 기포수축을 초기에는 가속화하지만 탄성에너지는 결국 기포를 다시 성장하게 하여 이후 수축-성장이 반복되다가 결국은 소멸하게 되며, 이때 반동(rebound)의 진폭과 주기는 거의 비례하는 것으로 관찰된다. 또한 기포면에서 점탄성응력을 검토하여 보면 반동시에만 큰 값을 갖는 것을 볼 수 있다. 반면 그림 4와 같이 De 가 비교적 작은 경우에는 점탄성응력이 최대치에 비하여 상대적으로 큰 값을 유지함을 볼 수 있다. 즉 유체의 점탄성이 클수록 수축 초기단계에서부터 충분히 큰 값을 가지지 못하기 때문에 초기에는 결국 관성의 역할이 중대됨으로서 기포수축이 가속화되고, 점탄성의 역할은 변형률이 큰 반동부근에서만 집중적으로 관찰된다. 이러한 점을 좀더 확실히 검토하기 위하여 그림 5에는 De 의 변화에 따른 점탄성응력의 변화과정을 도시하였다. 그림에서 De 가 클수록 초기단계에는 점탄성응력이 절대적으로 작은 값을 가지며, 이러한 작은 값으로 인하여 수축이 가속화된 분명하다. 따라서 유체의 점탄성은 실제로는 수축을 지연시키지만, 물질의 시간상수(material time constant)가 클수록 즉 점탄성이 클수록

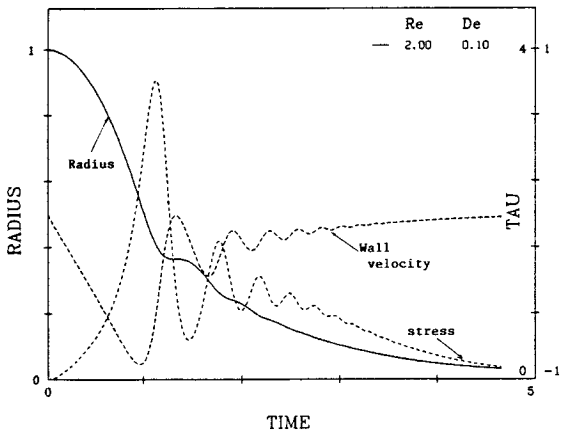


Fig. 4. Bubble collapse curve when the Deborah number is small.

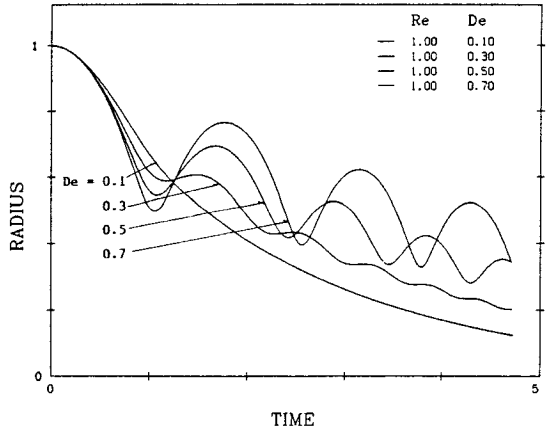


Fig. 6. The effect of Deborah number on the bubble collapse when $Re=1.0$.

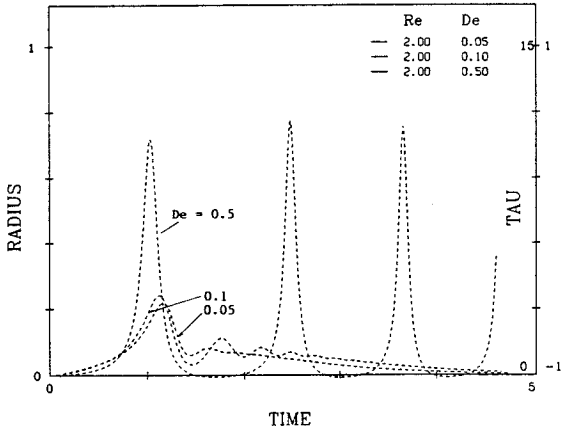


Fig. 5. The effect of De on the stress growth during the collapse ($Re=2$).

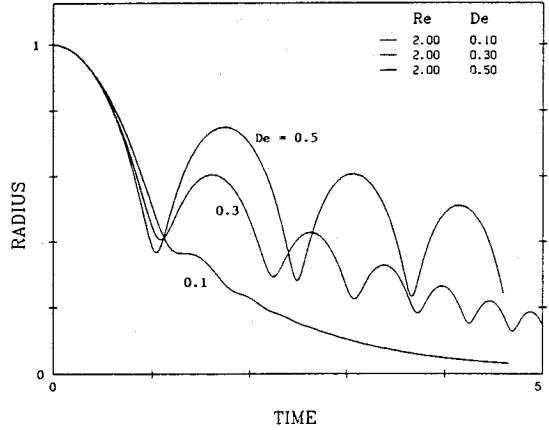


Fig. 7. The effect of Deborah number on the bubble collapse when $Re=2.0$.

형성속도가 늦어 외견상으로는 초기에 수축이 가속화되는 것을 알 수 있으며, 이러한 점은 Kim[12]의 적분형 유체의 해석시에 지적된 바 있다.

이러한 현상들은 Lee 등[15]이 두 원판 사이에서 Maxwell 유체의 압착유동(squeezing flow)을 해석한 결과와도 매우 유사함을 주의할 수 있다. 즉 압착유동의 경우에도 초기에는 관성이 지배적이며, 진동이 생기고 이러한 진동이 감쇄될 때 진폭과 주기가 비례하는 것을 수치해와 실험으로서 증명하였다. 한편 본 연구의 수치해에서는 Fogler와 Goddard[7], Ting[8], Papanastasiou 등[9]의 수치해에서 발견된 부진동이나 불안정성 등은 전혀 나타

나지 않았으며, 이러한 현상들이 적분형 유체에서도 발견되지 않았음을 고려할 때, 부진동은 물리적인 현상이 아니라 그들의 수치해의 문제인 것으로 판단된다.

그림 6, 7에는 De 의 변화에 따른 기포의 수축과정의 변화를 도시하였다. Kim[12]의 적분형의 Maxwell 유체내의 기포수축과정과 비교하면 수축속도가 미분형유체에서 더 빠른 것을 볼 수 있는데 이러한 결과는 미분형유체의 경우 정지이력에 전혀 무관하지만 적분형유체의 경우 정지이력이 유체의 변형을 억제하기 때문인 것으로 판단된다. 또한 본 연구의 대상이된 공동화 기포의 수축속도는 유체의

탄성이 클수록 초기에는 뉴턴성 유체에 비하여 큰 값을 갖지만, 파국적인 수축으로 인하여 공동화에 의한 손상이 생길 수 있는 후기에는 반동의 유무에 관계없이 오히려 급히 감소되는 현상을 볼 수 있는데 이러한 후기지연은 공동화에 의한 손상의 감소와 연관될 수 있음을 유추할 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서 수행한 구형기포의 수축에 관한 이론적인 연구는 크게 지배방정식의 유도 및 이의 수치해법 부분과 수축과 물리적인 해석부분으로 나눌 수 있고, 그 결과를 각각 종합하면 다음과 같다.

(i) 변분법이 알려져 있지 않은 미분형의 upper convected Maxwell 유체를 대상으로 Lagrangian 좌표계에서 미분형의 지배방정식을 유도하고, 이에 Galerkin법을 적용하여 반복에 의하지 않는 직접 수치해법을 개발하였다.

(ii) Maxwell 유체내의 탄성은 기포의 수축을 초기에 가속화시키고, 후기에는 지연시키는 것을 확인하였으며 이는 물질시간 상수가 크면 초기단계에 점탄성 응력의 성장이 충분하지 못한 것에 기인하는 것으로 밝혀졌다. 또한 탄성은 기포수축시 반동현상을 야기시키며, 이 반동은 점점 감쇄되는데, 이때 진폭은 주기와 비례하면서 감소됨을 관찰하였다.

(iii) 미분형 Maxwell 유체내에서는 적분형 유체에서보다 빠른 속도로 변형됨이 관찰되었는데, 이는 유체의 정지이력이 미분형 유체의 경우 유체운동에 영향을 미치지 않기 때문인 것으로 판단되었다.

감 사

본 연구는 한국과학재단 지원에 의하여 수행되었으며 이에 감사드립니다(관리번호: 891-1001-014-2).

기 호

D	: rate of deformation tensor
De	: Deborah number
E	: deformation gradient
p	: pressure

r, θ, ϕ	: spherical coordinate
Re	: Reynolds number
t	: time
u	: Lagrangian velocity
v	: velocity
V	: volume
We	: weber number
x	: coordinate
η	: viscosity
λ	: material time constant
ϕ	: 1-st order interpolation function
ψ	: zeroth order interpolation function
τ	: stress
ω	: defined in equation (35)

하첨자

i	: inside of the bubble
o	: outside of the bubble
0	: reference time or $t=0$

상첨자

0	: reference time
'	: old time

참고문헌

1. A.T. Ellis, J.G. Waugh and R.Y. Ting, *Trans. ASME. J. Basic Eng.*, **92**, 459 (1970).
2. R.Y. Ting and A.T. Ellis, *Phys. Fluids*, **17**, 1461 (1974).
3. J.W. Hoyt, *Trans. ASME. J. Fluids Eng.*, **98**, 106 (1976).
4. R.Y. Ting, *Phys. Fluids*, **21**, 898 (1978).
5. G.L. Chahine and D.H. Fruman, *Phys. Fluids*, **22**, 1406 (1979).
6. A. Shima and Y. Tomita, *Phys. Fluids*, **27**, 539 (1984).
7. H.S. Foggler and J.D. Goddard, *Phys. Fluids*, **13**, 1135 (1970).
8. R.Y. Ting, *AIChE J.*, **21**, 810 (1975).
9. A.C. Papanastasiou, L.E. Scriven and C.W. Macosko, *J. non-Newton. Fluid Mech.*, **16**, 53 (1984).

10. G. Pearson and S. Middleman, *AIChE J.*, **23**, 714 (1977).
11. E.D. Johnson and S. Middleman, *Polym. Eng. Sci.*, **18**, 963 (1978).
12. C. Kim, *Hwahak Konghak (J. KICChE)*, **28**, 85 (1990).
13. O. Hassager, *J. non-Newt. Fluid Mech.*, **9**, 321 (1981).
14. C.J. Coleman, *J. non-Newt Fluid Mech.*, **8**, 261 (1981).
15. S.J. Lee, M.M. Denn, M.J. Crochet, A.B. Metzner and G.J. Riggins, *J. non-Newt. Fluid Mech.*, **14**, 301 (1984).