

〈論 文〉

감조하천의 조석전파 특성에 관한
해석적 연구(금강을 중심으로)

Analytical study on the tide propagation characteristics
in tidal rivers

이 재 형* 김 경 수**

Lee, Jae Hyung Kim, Gyung Soo

Abstract

For investigation of the interaction of tide and river flow, the derived equations are solved analytically using the approximation method of perturbation. The convective inertia and nonlinear bottom friction terms are included in the derivations. The harmonic analysis is applied to decompose the complicated interaction of the freshwater discharge with various constituents of tide into its individual interaction with each constituent. In this study, four main constituents(M₂, S₂, K₁, O₁) are included. The relations of dimensionless parameters of the tide, especially the dimensionless damping modulus, are then determined for each solution. The results show that analytical solution of dimensionless damping modulus underestimates the measured value obtained from harmonic analysis. Results of water level obtained by applying the analytical model to a tidal reach of the Keum River in the years 1981 and 1982 show very good agreement with those obtained from the harmonic analysis.

요지

본 연구는 조석과 하천류의 상호작용을 살펴보기 위해 지배방정식을 섭동근사법을 이용하여 해석해를 구하였다. 또한 여기에 이류항과 비선형 마찰항을 포함 하였다. 하천류와 조석분조들과의 복잡한 상호작용을 각각의 분조와의 상호작용으로 단순화 시키기 위해 조화분석을 실시하였다. 조석의 무차원 매개변수, 특히 감쇄율을 각각의 해에 대하여 구하였다. 평가결과 해석해로부터 구한 감쇄율은 조화분석으로부터 구한 측정치보다 낮게 평가되어 그들의 상관관계를 설정하여 보정 하였다. 해석해를 금강의 감조구간에 적용하여 관측치와 비교한 결과 잘 일치하였다.

* 정희원 전북대학교 공과대학 토목공학과 부교수

** 정희원 전북대학교 대학원 토목공학과 박사과정

1. 서론

조석의 대부분은 지구와 달 및 태양의 상호운동으로 인한 천문력(Astronomical force)에 의해 발생되며, 하구에 진입한 조석파는 천해효과(Shallow water effects) 및 하천류의 영향때문에 변형된다. 하구에서의 조석은 외양에 있어서는 외해의 조석과 같이 대칭형을 이루고 있으나 상류로 올라감에 따라 비대칭형으로 나타나게 된다. 이는 하상에 의한 마찰력과 하천의 담수 유출과 연관되어 있다. 수위 관측치로부터 담수유출이 증가하면 하천에서 조석이 감소된다는 것을 알수 있지만, 아직도 이러한 두 매개변수를 상호연관시키는 뚜렷한 해석적인 고려는 없었으며 이는 조석파가 하천의 상류로 전파해 갈때 조석류와 하천류의 혼합된 효과때문에 생기는 매우 복잡한 흐름체제 때문이다. 즉 조석이 상류로 전파해 감에 따라 저조(Low tide)로부터 수면은 갑자기 고조(High tide)가되고 고조로부터 수면은 완만하게 저조로 된다. 고조시의 담수는 저조시에 비해 빠르게 배수될 수 없기 때문이다. 만일 대유량이 고조기간에 유출된다면 상류의 홍수위험이 증가된다. 그러므로 현상을 명확히 이해하고, 조석류와 하천류의 상호작용의 해를 구하는 적절한 모형을 구성하기 위해서는, 이 상호작용을 정량적으로 조사하고 평가함이 중요하다.

감조 하천에서 조석을 계산하는 수치적 해법은 그동안 많은 연구가 수행되어 왔다^{1,2,5}. 그러나, 수치해법들은 정성적인 관점(Qualitative Aspect)으로 이해하는데는 거의 도움이 되지않았다. 이를위해 여러 단순 모형들을 이용하여 조석으로 인한 뚜렷한 왜곡의 근원을 밝히는데 초점을 모아왔다. Einstein and Fuchs(1955)는 조석예보 계산 방법을 조사하면서 이들 방법을 운하와 하구에서 조위와 유량의 예측에 사용하였다. 이 방법은 과거방법의 기술과 토론에 한정되어 연구되어졌다. 그는 대부분의 해를 매우 단순한 가정에 의해 구하였으므로 특정한 경우

에만 적용할 수 있었다. Perroud(1959)는 하상의 마찰저항 효과를 고려한 천수수렴수로(Shallow Converging Channel)에서의 미소진폭의 전파를 표시하는 모형을 개발하였다. 그는 지배방정식에서 이류항(Convective Term)을 무시하고 마찰항을 선형마찰로 가정하여 선형화하였다. 그러나, 마찰계수는 수심 및 수로의 길이에따라 변하기 때문에 일정하게 취급하는것은 부적절하다. Ippen(1966)은 조석이 구형단면의 하구로 전파되는것을 고려하였다. 그는 우선 에너지 수로에서 에너지 소멸이 없을때의 조석현상을 유도하여 이 모형에 마찰효과를 포함하여 연구하였다. 그는 기본 파동방정식으로부터 마찰효과를 선형화하고 파의 진폭이 매우 작다고 가정하여 해를 간단한 수학적 형태로 구하였다. LeBlond(1978)는 축척변수(Scaling variable)를 도입한 동수역학 지배방정식 으로부터 조석이 얇은 하천으로 전파하는 흐름을 연구하였다.그결과 마찰력이 대부분의 조석 주기에서 가속도항보다 크다는 것을 발견하였다. 따라서 천수에서의 조석전파는 전파 현상이라기 보다는 확산현상으로 기술함이 적절하다. 즉, 저수위에서는 장시간 지체현상을 단순파동전파 모형으로는 기술하기 어려우므로 확산 모형을 이용하여 기술하는 것이 보다 용이하다. Godin(1985)은 조석이 수로로 전파하는데 그의 진폭과 전파 시각에 대한 유량의 영향을 연구하였다. 특히 마찰은 흐름이 있을 때에만 발생하기 때문에 마찰과 담수유출은 본질적으로 연결되어있으며 이로부터 조석과 담수유량은 서로 증속되어 있다고 하였다. Phuc(1985)는 조석파가 하천으로 전파되는 하구의 흐름에 있어서 조석류와 하천류의 상호작용에 대해 연구하면서 각 분조와 담수유량과의 상호작용을 Chao Phraya 강의 하류 구간에 대해 조사하였다. 그는 조화 분석법을 이용하여 주요 분조를 결정한 다음 이들 분조들이 흐름에 의해 변형됨을 고찰하였다. 이 결과를 Brevik와 Aas(1980)에 의해 제시된 파와 흐름과의 상호작

용에 대한 해석해와 비교하였으며,

Vongvisessomjai, S. & S.Rojanakamthorn(1989)는 Chao Phraya 강의 상류구간 까지 확장하여 갈수기 및 홍수기의 각 분조와 담수 유량과의 상호작용을 분석 하였다.

본 연구는 조석류와 하천류의 상호작용을 살펴 보기 위하여 기본 동수역학 방정식으로부터 이류항과 하천의 마찰을 선형과 비선형으로 고려한 해석해를 구하였으며, 1981년과 1982년의 금강감구조간의 수위 자료와 비교 분석하였다. 또한 하천류와 여러 조석분조의 복잡한 상호 작용을 각각의 분조와의 상호작용으로 단순화시키기 위해 조화 분석을 실시하였다.

2. 이론적 고찰

2.1 지배방정식

그림 2.1과 같은 x좌표를 평균수면(MWL)상 흐름 방향으로 하며 이에대한 수직 좌표를 y축으로 하여 구간 dx에서 유출입량을 고려하면 연속방정식과 운동량 방정식은 다음과 같이 쓸수있다. 여기서, 측면 유입량은 무시한다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u S_0 + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + (h+\eta) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$O(\epsilon^0) : \frac{\partial \eta_0}{\partial t} + u_0 S_0 + u_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial x} + (h+\eta_0) \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + g \frac{\partial \eta_0}{\partial x} + g S_1 = 0 \quad (2.6)$$

$$O(\epsilon^1) : \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + u_1 S_0 + u_1 \frac{\partial \eta_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + (h+\eta_0) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + g \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + g S_1 = 0 \quad (2.8)$$

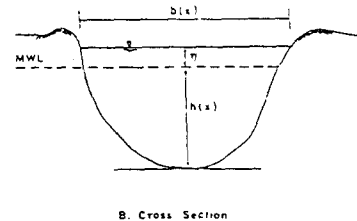
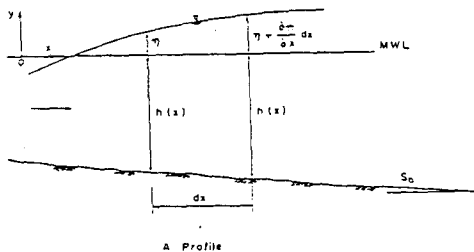


Fig 2.1 Definition Sketch of an Element of River

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + g S_1 = 0 \quad (2.2)$$

여기에서, h는 시간평균수심, η는 평균수면상 수위변동, S₀는 하상경사이며, S₁는 마찰경사, u는 순간 단면평균 유속이다.

2.1.1 섭동법(Perturbation Method)

지배방정식은 비선형이며 Hyperbolic 및 편미분 방정식이다. 이와 같은 방정식에 대한 일반적인 해석해를 구하기는 매우 어려운 일이다. 따라서 본 연구에서는 비선형 문제에 대한 근사해를 구하는 기법인 섭동법(또는 미소 매개변수법)을 이용하여 해를 구한다.

매개변수 ε에 의존하는 방정식과 경계조건을 가정하면, 섭동법은 선형해 즉, ε=0(표준시스템) 일때는 해에대한 미소값 ε에서의 해를 구하는 것이다. 동수역학 지배방정식 (2.1)과 (2.2)로부터, 해 η와 u는 다음과 같이 미소매개변수ε의 역급수 항으로 쓸수있다.

$$\eta = \eta_0 + \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 \quad (2.3)$$

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 \quad (2.4)$$

식(2.3)과식(2.4)를 지배방정식에 대입하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

0차 방정식은 기본 또는 비섭동 시스템을 나타내며, 이들의 해는 기본적인 선형기법(Linear Method)으로 구할수 있다. ϵ 이 1보다 매우 작을 경우에 1차보정만을 고려하면,

$$\eta = (\eta_0) + \epsilon \eta_1 \quad (2.9)$$

$$U = U_0 + \epsilon U_1 \quad (2.10)$$

으로 주어진다.

2.2 마찰-저항항

2.2.1 선형마찰저항

운동량 방정식에서 유체의 단위질량당 수로의 윤변에 균등하게 작용하는 마찰력은 gS_r 로 표현할 수 있다. C 를 Chezy상수, R 을 수로의 동수반경 이라고 할때 $S_r = u|u|/(C^2R)$ 이다. 부정류에서와 마찬가지로 실제 수로에서 발생하는 난류에

$$\int_0^{T/4} \frac{\tau}{\gamma h} u dt = \int_0^{T/4} \frac{u^2}{C^2 h} u dt = \int_0^{T/4} (Mu) u dt \quad (2.12)$$

따라서,

$$M = \frac{1}{C^2 h} \left[\frac{\frac{1}{2} \pi u_0^3 + 3u_0^2 u_{1max} + \frac{3}{4} \pi u_0 u_{1max}^2 + \frac{2}{3} u_{1max}^3}{\frac{1}{2} \pi u_0^2 + 2u_0 u_{1max} + \frac{1}{4} \pi u_{1max}^2} \right] \quad (2.13)$$

여기서 $u_1 = u_{1max}(x) \cos(\sigma t)$ 이며 함수의 유출이 없는 경우에는 즉, $u_0 = 0$ 이면 M 값은 Ippen(1966)이 유도한 값과 근사하게 된다.

$$M = \frac{8}{3\pi} \frac{u_{1max}(x)}{C^2 h} \quad (2.14)$$

2.2.2 비선형 마찰저항

비선형인 경우에 마찰력은 정상류 또는 비정상류에 대한것으로 다음과 같다.

$$S_r = \frac{u|u|}{C^2 R} = \frac{n^2 u|u|}{R^{4/3}} \quad (2.15)$$

여기에서, n 은 Manning 조도계수, u 는 평균수평 입자속도이다.

3. 수학적 방정식 유도

3.1 무마찰과 수평하상

의한 마찰력은 2승형태가 오히려 잘 맞지만 이를 지배방정식에 포함 하는데는 문제가있다.

Ippen(1966)은 선형마찰에 의한 마찰력을 다음 식과 같이 가정 하였다.

$$S_r = \frac{u|u|}{C^2 R} = Mu \quad (2.11)$$

여기에서, M 은 선형마찰계수이다.

선형마찰계수 M 의 산정은 조석주기에 걸쳐 마찰에 의해 행해진 일이 2승형의 저항법칙에 의하거나 선형근사를 대입하여도 같아야 한다는 것을 전제로 식(2.2)에서 마찰항의 선형화에 의해 이루어 진다. 1/4 조석주기동안 유체의 단위 질량당 행해진 일은 다음과 같이 적분함으로써 얻어진다.

수위변동 η_0 의 0차 해는 정상상태를 고려함으로써 각 차수의 결과식으로 부터 알 수 있으며 이때 수로의 하상경사는 0이다. ϵ 의 차수에 다른 결과식은 다음과 같다.

1) 0차해 $0(\epsilon^0)$

$$\eta_0 = \text{Constant} \quad (3.1)$$

2) 1차해 $0(\epsilon^1)$

$$\eta_1 = a_0 \sin\{kx - (u_0/c_0 + 1)\sigma t\} \quad (3.2)$$

$$u_1 = \frac{a_0}{h_0} c_0 \sin\{kx - (u_0/c_0 + 1)\sigma t\} \quad (3.3)$$

여기서, a_0 는 하구에서 조석의 진폭, k 는 파수, σ 는 각 주파수이며 c_0 는 파속이다. 그러므로, 식(2.3)으로부터 η 와 식(2.4)로부터 u 는 다음과 같다.

$$\eta = \eta_0 + a_0 \sin\{kx - (u_0/c_0+1)\sigma t\} \quad (3.4)$$

$$u = u_0 + \frac{a_0}{h_0} c_0 \sin\{kx - (u_0/c_0+1)\sigma t\} \quad (3.5)$$

윗 식에서 담수유출속도의 효과인 u_0 는 MWL을 증가시키고 조석주기의 변화를 초래한다.

3.2 선형마찰

3.2.1 직접해

직접적인 수학적 방법으로부터 얻어진 일반해는 다음과 같이 Bessel함수 형태로 표현될 수 있다¹⁹.

1) 0차해 $O(\epsilon^0)$

$$\eta_0 = -S_0 x + \text{constant} \quad (3.6)$$

2) 1차해 $O(\epsilon^1)$

$$\eta_1 = a_0 \exp\left(-\frac{1}{2} gMt\right) J_0(Z) \quad (3.7)$$

여기에서, $J_0(Z)$ = 0차 제1종 Bessel함수

$$Z = \frac{Mc_0}{2h_0} \left[\{x - (u_0 - c_0)t\} \sqrt{x - (u_0 + c_0)t} \right]^{1/2}$$

그러므로, 식(2.9)로부터 수위변위 η 는 다음과 같이된다.

$$\eta = -S_0 x + a_0 \exp\left(-\frac{1}{2} gMt\right) J_0(Z) + \text{constant} \quad (3.8)$$

윗식은 조석의 진폭이 지수항에따라 시간이 흐를수록 매우 빨리 감쇄함을 알 수 있다. 더우기 해들은 각 조석분조의 구분이 명확하지 않다.

담수유출이 없을때 즉, $u_0=0$ 일때의 비슷한 경우에 대해 지배방정식이 유도되었다. 이 지배방정식이 Ippen(1966) 이 유도한것과 같게 되는데 그는 하구에서 조석 각분조의 초기 및 최대 진폭인 a_0 가 조석이 상류로 전파해 감에따라 마찰에 의해 지수적으로 감쇄한다고 가정 하였기 때문이다.

$$\eta = a_0 \exp(-\mu x) \cos(\sigma t - kx) \quad (3.9)$$

여기에서 μ 는 감쇄계수이다.

3.2.2 가정해

Ippen(1966)이 유도한 근사해와 가정해를 살펴 보면 해들이 지수형태로 표현됨을 알 수 있다. 따라서, 본 연구에서 유도된 지배방정식의 해가 이들 형태를 따르는지 조사할 필요가 있으며 또한 담수유출속도의 효과인 u_0 가 해에 포함되도록 해야 한다. 이를 위해 1차해 η_1 이 3.2.1절의 해와 일관되도록 가정되며 담수유출속도 u_0 의 효과는 $(u_0 \pm c_0)t$ 항에 포함된다.

지배방정식의 경계조건을 가정해에 대입한 후, 이들 결과식을 4개의 무차원 매개변수 k/k_0 , μ/k_0 , u_0/c_0 , gM/σ 로 나타낸다. 여기에서, $k_0=2\pi/L_0$ 이다.

1) 0차 해 $O(\epsilon^0)$

$$\eta_0 = -S_0 x + \text{constant} \quad (3.10)$$

2) 1차해 $O(\epsilon^1)$

다음의 가정해와 함께

$$i) \eta_1 = a_0 \exp[-u(x-(u_0-c_0)t)] \cos\{(u_0/c_0+1)\sigma t - kx\} \quad (3.11)$$

$$u_1 = \frac{a_0}{h_0} c_0 \frac{\exp[-u(x-(u_0-c_0)t)]}{\mu^2 + k^2} \{ (kk_0 - \mu^2) \cos\{(u_0/c_0+1)\sigma t - kx\} - (\mu k + \mu k_0) \sin\{(u_0/c_0+1)\sigma t - kx\} \} \quad (3.12)$$

$$\frac{k}{k_0} = \frac{\sqrt{1 + \frac{u_0^2}{c_0^2} + \frac{2u_0}{c_0} + \frac{gM}{\sigma} \frac{\mu}{k_0} \left(1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}\right) - \frac{u_0}{c_0} - \frac{u_0^2}{c_0^2}}{1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}} \quad (3.13)$$

$$\frac{gM}{\sigma} = \frac{2 \frac{\mu}{k_0} \left[1 + \frac{u_0}{c_0} + \frac{k}{k_0} - \frac{k}{k_0} \frac{u_0}{c_0} \right]}{\left[1 + \frac{u_0}{c_0} - \frac{k}{k_0} \frac{u_0}{c_0} \right]} \quad (3.14)$$

$$\text{ii) } \eta_1 = a_0 \exp[-\mu(x-u_0t)] \cos\{(u_0/c_0+1)\sigma t-kx\} \quad (3.15)$$

$$u_1 = \frac{a_0}{h_0} (k_0 u_0 + k_0 c_0 - k u_0) \frac{\exp\{-\mu(x-u_0t)\}}{\mu^2 + k^2} \{k \cos\{(u_0/c_0+1)\sigma t-kx\} - \mu \sin\{(u_0/c_0+1)\sigma t-kx\}\} \quad (3.16)$$

$$\frac{k}{k_0} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k_0^2} + \frac{u_0^2}{c_0^2} + \frac{2u_0}{c_0} - \frac{\mu^2 u_0^2}{k_0^2 c_0^2} - \frac{u_0}{c_0} - \frac{u_0^2}{c_0^2}}}{1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}} \quad (3.17)$$

$$\frac{gM}{\sigma} = \frac{2 \frac{\mu}{k_0} \frac{k}{k_0}}{\left[1 + \frac{u_0}{c_0} - \frac{k}{k_0} \frac{u_0}{c_0} \right]} \quad (3.18)$$

$$\text{iii) } \eta_1 = a_0 \exp(-\mu x) \cos\{(u_0/c_0+1)\sigma t-kx\} \quad (3.19)$$

$$u_1 = \frac{a_0}{h_0} \frac{\exp(-\mu x)}{\mu^2 + k^2} \{ (kk_0 u_0 + k\sigma - k^2 u_0 - \mu^2 u_0) \cos\{(u_0/c_0+1)\sigma t-kx\} - \mu(k_0 u_0 + \sigma) \sin\{(u_0/c_0+1)\sigma t-kx\} \} \quad (3.20)$$

$$\frac{k}{k_0} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k_0^2} + \frac{u_0^2}{c_0^2} + \frac{2u_0}{c_0} - \frac{2\mu^2 u_0^2}{k_0^2 c_0^2} + \frac{\mu^2 u_0^4}{k_0^2 c_0^4} + \frac{gM}{\sigma} \frac{\mu}{k_0} \frac{u_0}{c_0} \left(1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}\right) - \frac{u_0}{c_0} - \frac{u_0^2}{c_0^2}}}{1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}} \quad (3.21)$$

$$\frac{gM}{\sigma} = \frac{2 \frac{\mu}{k_0} \left[\frac{u_0}{c_0} + \frac{u_0^2}{c_0^2} + \frac{k}{k_0} - \frac{k}{k_0} \frac{u_0^2}{c_0^2} \right]}{\left[1 + \frac{u_0}{c_0} - \frac{k}{k_0} \frac{u_0}{c_0} \right]} \quad (3.22)$$

$$\text{iv) } \eta_1 = a_0 \exp(-\mu x) \cos(\sigma t-kx) \quad (3.23)$$

$$u_1 = \frac{a_0}{h_0} \frac{\exp(-\mu x)}{\mu^2 + k^2} \{ (\sigma k - k^2 u_0 - \mu^2 u_0) \cos(\sigma t-kx) + \mu \sigma \sin(\sigma t-kx) \} \quad (3.24)$$

$$\frac{k}{k_0} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k_0^2} - 2 \frac{\mu^2 u_0^2}{k_0^2 c_0^2} + \frac{\mu^2 u_0^4}{k_0^2 c_0^4} + \frac{gM}{\sigma} \frac{\mu}{k_0} \frac{u_0}{c_0} \left(1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}\right) - \frac{u_0}{c_0}}}{1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}} \quad (3.25)$$

$$\frac{gM}{\sigma} = \frac{2 \frac{\mu}{k_0} \left[\frac{u_0}{c_0} + \frac{k}{k_0} - \frac{k}{k_0} \frac{u_0^2}{c_0^2} \right]}{\left[1 - \frac{k}{k_0} \frac{u_0}{c_0} \right]} \quad (3.26)$$

조석의 각주파수 또는 주기는 위의 4경우에 대해 담수 유출속도 u_0 의 효과, 즉, $(u_0+c_0)\sigma/c_0$ 에 의해 변화된다. 하구에서의 조석의 진폭 a_0 은 i)의 경우에서 3.2.1절과 비슷하게 시간에 따라 매우 큰 지수적으로 감소한다. 반면에 ii)의 경우는 담수 유출속도 u_0 의 크기가 작기때문에 다소 늦게 시간에 따라 감소한다. 마지막 두 경우에서 조석의 진폭은 시간에 독립적이다. iv)의 경우에는 조석주기의 변동은 고려하지 않았다.

지배방정식 으로부터 얻어지는 일반해는 다음과 같이 표현할수있다.

1) 0차해 $O(\epsilon^0)$

$$\eta_0 = -S_0 x + \text{constant} \quad (3.27)$$

여기에서, $S_0 = -u_0^2/(C^2 h_0)$ 이며 이것은 선형 마찰인 경우와 같다.

2) 1차해 $O(\epsilon^1)$

선형마찰에서와 같이 1차해인 η_1 을 가정 하여 경계조건을 대입한다.

다음의 η_1 의 가정해는 시간에따라 조석진폭의 지수적인 감쇄를 나타내지 않으며 이것은 실제 현상과는 무관하다.

3.3 비선형 마찰

3.3.1 가정해

i) $\eta_1 = a_0 \exp(-\mu x) \cos\{(u_0 / c_0 + 1)\sigma t - kx\}$ (3.28)

$$u_1 = \frac{a_0}{h_0} \frac{\exp(-\mu x)}{\mu^2 + k^2} \left[(kk_0 u_0 + k\sigma - k^2 u_0 - \mu^2 u_0) \cos\{(u_0/c_0+1)\sigma t - kx\} - \mu(k_0 u_0 + \sigma) \sin\{(u_0 / c_0 + 1)\sigma t - kx\} \right] \quad (3.29)$$

$$\frac{k}{k_0} = \frac{1 + \frac{\mu^2}{k_0^2} + \frac{u_0^2}{c_0^2} + \frac{2u_0}{c_0} - 2\frac{\mu^2}{k_0^2} \frac{u_0^2}{c_0^2} + \frac{\mu^2}{k_0^2} \frac{u_0^4}{c_0^4} - \frac{3g}{C^2 h_0 k_0} \frac{\mu}{k_0} \frac{u_0^2}{c_0^2} \left(1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}\right) - \frac{u_0}{c_0} - \frac{u_0^2}{c_0^2}}{1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}} \quad (3.30)$$

$$\frac{g}{C^2 h_0 k_0} = \frac{2 \frac{\mu}{k_0} \left[\frac{u_0}{c_0} + \frac{u_0^2}{c_0^2} + \frac{k}{k_0} - \frac{k}{k_0} \frac{u_0^2}{c_0^2} \right]}{\left[2 \frac{u_0}{c_0} \left(\frac{u_0}{c_0} - 1 \right) + \frac{k}{k_0} \frac{u_0}{c_0} \left(\frac{u_0}{c_0} + 2 \frac{u_0}{c_0} \right) \right]} \quad (3.31)$$

ii) $\eta_1 = a_0 \exp(-\mu x) \cos(\sigma t - kx)$ (3.32)

$$u_1 = \frac{c_0}{h_0} \frac{\exp(-\mu x)}{\mu^2 + k^2} \left[-\mu \sigma \sin(\sigma t - kx) + (\sigma k - k^2 u_0 - \mu^2 u_0) \cos(\sigma t - kx) \right] \quad (3.33)$$

$$\frac{k}{k_0} = \frac{1 + \frac{\mu^2}{k_0^2} - 2\frac{\mu^2}{k_0^2} \frac{u_0^2}{c_0^2} + \frac{\mu^2}{k_0^2} \frac{u_0^4}{c_0^4} - \frac{3g}{c^2 h_0 k_0} \frac{\mu}{k_0} \frac{u_0^2}{c_0^2} \left(1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}\right) - \frac{u_0}{c_0}}{1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}} \quad (3.34)$$

$$\frac{g}{c^2 h_0 k_0} = \frac{2\frac{\mu}{k_0} \left[\frac{u_0}{c_0} - \frac{k}{k_0} \frac{u_0^2}{c_0^2} + \frac{k}{k_0} \right]}{\left[\left(-\frac{u_0}{c_0} - \frac{u_0}{c_0}\right) + \frac{k}{k_0} \frac{u_0}{c_0} \left(-\frac{u_0}{c_0} + 2\frac{u_0}{c_0}\right) \right]} \quad (3.35)$$

4. 적용 및 고찰

3장으로부터 얻어진 지배방정식의 해를 검증하기 위하여 금강의 강경에서 부터 하구까지 약 41Km 감조구간의 수위자료(금강 홍수통계소)를 이용하였다(표 4.1참조). 본 자료의 이용 기간은 인공 구조물의 영향이 없다고 여겨지는 1981-1982년을 대상으로 하였다. 이들 자료는 조화분석을 이용하여 분석하였으며 시간 간격을 1개월로 하여 하구와 규암에서의 관측 수위로 부터 담수 유출 속도를 산정 하였다. 본 연구에서 조화분석은 4대 분조만을 해석 하였다.

Table 4.1 Four tidal stations of the Keum River

Station	Distance from River Mouth(Km)	Average depth(m)
Outer Harbor	0.0	8.3
Inner Harbor	8.2	7.6
lbpo	27.3	5.1
Ganggyeung	40.4	3.6

4.1 조화분석

a) 첫째 가정해

3.3절에 따라, i)의 경우에 1차 가정해는 다음과 같다.

$$\eta_1 = a_0 \exp(-\mu x) \cos\left\{ \left(\frac{u_0}{c_0} + 1 \right) \sigma t - kx \right\} \quad (4.1)$$

조석의 주기는 담수유출속도의 영향으로 변화된다. 따라서 조화 분석식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\eta_i = a_n + \sum_{j=1}^N a_j \sin\left\{ \left(\frac{u_0}{c_0} + 1 \right) \frac{2\pi t}{T_j} + \delta_j \right\} \quad (4.2)$$

여기에서, η_i 은 한 특정지점에서의 합성 조석 변위이며 N개의 분조들로 구성된다. a_n 은 기준면으로부터 평균하면 까지의 변위이다. 본 연구에서는 월조위 자료를 이용하므로 상대적으로 짧은 주기의 분조들 즉, 반일주조와 전일주조에 대한 계산을 하는데 사용된다.

$$a_n = \frac{1}{\Delta t} \sum_{t=1}^{\Delta t} \eta_i \quad (4.3)$$

$$a_j = 2 \left[\left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{t=1}^{\Delta t} \eta_i \sin\left\{ \left(\frac{u_0}{c_0} + 1 \right) \frac{2\pi t}{T_j} \right\} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{t=1}^{\Delta t} \eta_i \cos\left\{ \left(\frac{u_0}{c_0} + 1 \right) \frac{2\pi t}{T_j} \right\} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.4)$$

$$\delta_j = \tan^{-1} \left[\frac{\sum_{t=1}^{\Delta t} \eta_i \cos\left\{ \left(\frac{u_0}{c_0} + 1 \right) \frac{2\pi t}{T_j} \right\}}{\sum_{t=1}^{\Delta t} \eta_i \sin\left\{ \left(\frac{u_0}{c_0} + 1 \right) \frac{2\pi t}{T_j} \right\}} \right] \quad (4.5)$$

여기에서, Δt =조석자료의 관측기간이다.

b) 둘째 가정해

이는 조석주기의 변동을 고려하지 않는 경우이다. ii)의 경우 1차 가정해는 다음과 같으며,

$$\eta_1 = a_0 \exp(-\mu x) \cos(\sigma t - kx) \quad (4.6)$$

조화분석식은 다음과 같다.

$$\eta_1 = a_0 + \sum_{j=1}^N a_j \sin\left(\frac{2\pi t}{T_j} + \delta_j\right) \quad (4.7)$$

위의 두개의 가정해를 9월의 관측자료에 적용한 결과를 그림 4.1에 도시하였다. 그림에 나타난 바와 같이 $(u_0 + c_0)\sigma/c_0$ 을 포함하는 각 조석분조는 담수유출속도 영향때문에 일어나는 조석주기의 변동에 덜 지배적임을 보여준다. 즉, 식 (4.2)로부터 계산한 조위는 보다 큰 오차를 가지며 반면에 식(4.7)은 보다 정확하게 변위를 예보한

다.

4.2 진폭의 변화

조위변동을 살펴보기 위해 1981년 5,6,7,8,9월의 각 조석 관측소별 조석분조의 최대 진폭을 반대수지에 분석하여 본 결과 진폭은 반대수지 선상에서 거리에따라 선형적으로 감소하였으며 이는 다음과 같은 지수 형태로 나타낼 수 있다.

$$a(x) = a_0 \exp(-\mu x) \quad (4.8)$$

여기에서, $a(x)$ 는 하구로부터 거리 x (Km)인 곳의 조석진폭이고 a_0 는 하구에서의 조석 최대 진폭이며 그리고 μ 는 감쇄율(Km^{-1})이다.

계산된 감쇄율 값을 표 4.2에 수록하였다. 표에 나타난 바와 같이 같은 유량일때 반일 주조의 감쇄율이 전일 주조의 값보다 크게 나타난다.

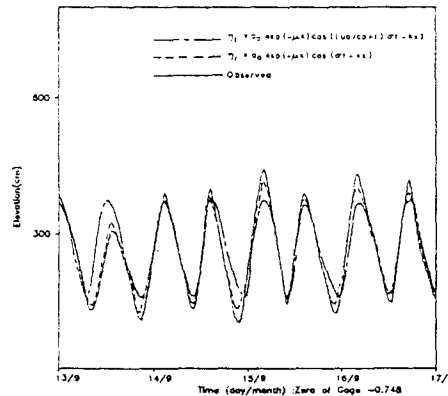
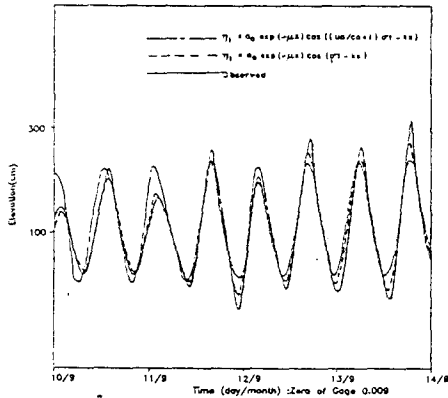


Fig 4.1a Comparison of Water Level from Harmonic Analysis of Two Assumed Solution, Station Ib Po(1981-1982)

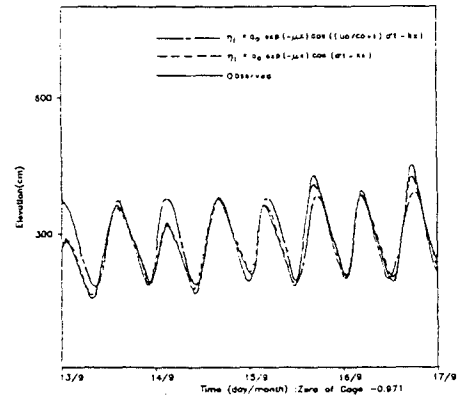
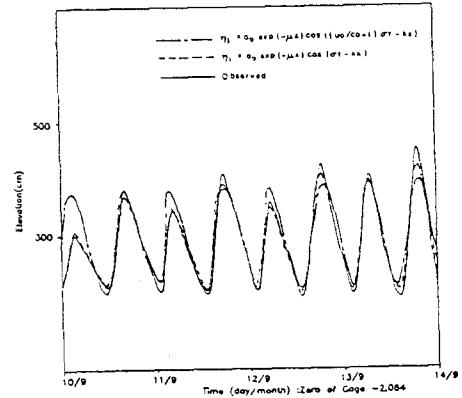


Fig 4.1b (Continued) Station Ganggyeung(1981-1982)

Table 4.2 Damping Modulus of Four Main Constituents

Tide	Period Month/yr	u ₀ (m/sec)	u ₀ /c ₀	μ (Km ⁻¹)	μ/k ₀	μ/k ₀ *	μ/k ₀
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
M2	5/1981	.288	.037	.0114	.6296	0.6347	0.7338
M2	6/1981	.453	.058	.0161	0.8891	0.8772	0.8721
M2	7/1981	.937	.121	.0439	2.4243	2.2216	2.2713
M2	8/1981	.815	.105	.0341	1.8831	1.7832	1.6623
M2	9/1981	.887	.114	.0395	2.1813	2.0729	2.0431
M2	5/1982	.525	.068	.0187	1.0327	0.9877	0.9435
M2	6/1982	.391	.050	.0142	0.7842	0.7712	0.8087
M2	7/1982	.379	.049	.0138	0.7621	0.7322	0.7865
M2	8/1982	.656	.084	.0245	1.3530	1.2561	1.1422
M2	9/1982	.515	.066	.0183	1.0106	1.0012	0.9526
S2	5/1981	.288	.037	.0119	0.6349	0.6411	0.7372
S2	6/1981	.453	.058	.0167	0.8910	0.8663	0.8654
S2	7/1981	.937	.121	.0452	2.4116	2.2776	2.3637
S2	8/1981	.815	.105	.0352	1.8781	1.7662	1.6423
S2	9/1981	.887	.114	.0408	2.1768	2.0534	2.0150
S2	5/1982	.525	.068	.0194	1.0351	1.0265	1.9767
S2	6/1982	.391	.050	.0147	0.7843	0.7532	0.7994
S2	7/1982	.379	.049	.0144	0.7683	0.7436	0.7930
S2	8/1982	.656	.084	.0254	1.3552	1.2867	1.1673
S2	9/1982	.515	.066	.0190	1.0137	0.9816	0.9394
K1	5/1981	.288	.037	.0082	0.8726	0.8324	1.0445
K1	6/1981	.453	.058	.0121	1.2876	1.2461	1.2708
K1	7/1981	.937	.121	.0373	3.9694	3.7891	4.2421
K1	8/1981	.815	.105	.0281	2.9903	2.7566	2.6004
K1	9/1981	.887	.114	.0332	3.5330	3.4220	3.5646
K1	5/1982	.525	.068	.0143	1.5218	1.4877	1.4250
K1	6/1982	.391	.050	.0104	1.1067	0.9981	1.1299
K1	7/1982	.379	.049	.0102	1.0855	1.0655	1.1666
K1	8/1982	.656	.084	.0194	2.0645	2.0422	1.8534
K1	9/1982	.515	.066	.0139	1.4792	1.3889	1.3598
O1	5/1981	.288	.037	.0080	0.9184	0.9084	1.0829
O1	6/1981	.453	.058	.0118	1.3546	1.3246	1.3190
O1	7/1981	.937	.121	.0376	4.3164	4.1159	4.9528
O1	8/1981	.815	.105	.0281	3.2258	3.1157	3.0829
O1	9/1981	.887	.114	.0333	3.8227	3.6898	4.0471
O1	5/1982	.525	.068	.0140	1.6072	1.5093	1.4397
O1	6/1982	.391	.050	.0102	1.1709	1.1503	1.2144
O1	7/1982	.379	.049	.0099	1.1365	1.1168	1.1953
O1	8/1982	.656	.084	.0192	2.2041	2.1891	1.9871
O1	9/1982	.515	.066	.0137	1.5727	1.4893	1.4261

(6) From Observed Tides

(7) From Analytical Solutions, the Nonlinear Friction (Eq. 3.33)

(8) From Exponential Regression Fitting

4.3 해석해

4.3.1 선형마찰

4.1절에서 나타난 바와 같이 금강에서는 담수 유출속도 효과에 의한 조석주기의 변동은 미약하므로 본절에서 채택한 가정해는 3.2.2절의 첫 번째 3가지 경우는 배제할 수 있다. 따라서, η의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$\eta_1 = -S_0 x + a_0 \exp(-\mu x) \cos(\sigma t - kx) + \text{constant} \quad (4.12)$$

여기에서, S₀=Mu₀이다.

μ와 k의 값은 식(3.26)과 (3.27)로부터, u₀/c₀

와 gM/σ으로 계산할 수 있다.

여기서의 문제는 선형 마찰계수 M의 결정이다. 이는 선형마찰 지배방정식의 유도에서 M값은 일정하다고 고려되어야 하며 그렇지 않으면 방정식을 해석적으로 풀수 없기 때문이다. 실제 M은 식(2.13)에 따라 u_{1...x}에서 x의 함수로 변화한다. 그러므로, u_{1...x}의 대표값을 이용하여 전 구간 에 대해 M을 일정하게 하도록 할 수 있다. 본 연구에서 수행되어진 해중의 하나가 하구에서 u_{1...x}을 고려함으로써 M의 크기를 결정한 것이다.

이들을 표 4.3에 수록하였다. 또한 마찰계수를 Ippen(1966)의 식(3.26)으로부터 선형회귀분석한결과 관측치와 비교한 결과는 다음과 같다.

a) 반일주조(M₂와 S₂)

$$M_{observed} = 6.016(M_{analytical} + 0.7)^{-0.821} \quad (4.13)$$

상관계수 = 0.90

b) 전일주조(K₁과 O₁)

$$M_{observed} = 1.431(M_{analytical} + 0.7)^{-1.242} \quad (4.14)$$

상관계수 = 0.94

4.3.2 비선형 마찰

비선형 마찰로부터 해석하는 다음과 같다.

$$\eta = -S_0x + a_0 \exp(-\mu x) \cos(\sigma t - kx) + \text{constant} \quad (4.15)$$

여기에서, $S_0 = -u_0^2 / (C^2 h_0)$

이 해는 식(4.12)와 같은 형태이며 여기에서 0차해는 상류로부터 답수유출, 1차해는 하구로부터 조석의 기여를 나타낸다. 본 연구에서 사용된 Manning의 조도계수의 평균값은 0.028이며 동구간에서의 평균수심은 $h_0 = 6.15\text{m}$ 이다. 그러므

Table 4.3 Linear Frictional Coefficient

Tide (1)	Period Month/yr (2)	a ₀ (m) (3)	u ₀ (m/sec) (4)	u _{1,max} (m/sec) (5)	M* x 10 ⁻⁵ (6)	M* x 10 ⁻⁵ (7)	M* x 10 ⁻⁵ (8)
M2	5/1981	2.073	.288	2.616	1.376	1.678	3.3027
M2	6/1981	2.105	.453	2.656	1.298	3.155	3.4082
M2	7/1981	2.153	.937	2.717	.980	4.577	3.9294
M2	8/1981	2.190	.815	2.763	1.113	2.007	3.6912
M2	9/1981	2.181	.887	2.752	1.048	4.346	3.8035
M2	5/1982	2.126	.525	2.683	1.269	4.313	3.4493
M2	6/1982	2.115	.391	2.669	1.345	3.449	3.3437
M2	7/1982	2.164	.379	2.731	1.389	2.562	3.2858
M2	8/1982	2.181	.656	2.752	1.223	3.754	3.5169
M2	9/1982	2.161	.515	2.727	1.302	4.886	3.4026
S2	5/1981	0.75	.288	.946	.374	3.562	5.6735
S2	6/1981	0.768	.453	.969	.210	7.788	6.5003
S2	7/1981	0.776	.937	.979	-.478	22.746	20.6991
S2	8/1981	0.816	.815	1.030	-.375	19.360	15.1374
S2	9/1981	0.80	.887	.009	-.613	25.371	44.6645
S2	5/1982	0.749	.525	.945	.059	12.615	7.5445
S2	6/1982	0.742	.391	.936	.266	6.827	6.1893
S2	7/1982	0.773	.379	.955	.294	5.194	6.0458
S2	8/1982	0.826	.656	1.042	-.096	15.131	9.1007
S2	9/1982	0.786	.515	.992	.130	8.450	7.0104
K1	5/1981	0.310	.288	.391	-.114	1.839	2.7791
K1	6/1981	0.325	.453	.410	-.227	3.525	3.6263
K1	7/1981	0.327	.937	.413	-.503	10.893	10.7625
K1	8/1981	0.351	.815	.443	-.419	8.488	6.9238
K1	9/1981	0.334	.887	.421	-.469	9.191	8.8315
K1	5/1982	0.315	.525	.397	-.260	4.382	3.9671
K1	6/1982	0.296	.391	.373	-.198	2.893	3.3679
K1	7/1982	0.324	.379	.409	-.193	2.865	3.3267
K1	8/1982	0.339	.656	.428	-.328	5.083	4.8868
K1	9/1982	0.326	.515	.411	-.255	4.381	3.9118
O1	5/1981	0.223	.288	.281	-.146	4.552	2.9799
O1	6/1981	0.273	.453	.344	-.224	3.519	3.5979
O1	7/1981	0.242	.937	.305	-.534	12.690	13.3127
O1	8/1981	0.254	.815	.320	-.448	7.586	7.9268
O1	9/1981	0.252	.887	.318	-.496	8.207	10.3057
O1	5/1982	0.229	.525	.289	-.269	4.931	4.0702
O1	6/1982	0.296	.391	.373	-.198	3.056	3.3679
O1	7/1982	0.251	.379	.317	-.188	2.932	3.2864
O1	8/1982	0.242	.656	.305	-.348	5.586	5.2340
O1	9/1982	0.257	.515	.324	-.259	4.414	3.9559

Note: (5) at river mouth x=0, (6) from analytical solution, (7) observed according to Ippen(1966), (8) from geometric regression fitting

로, 각 조석분조에 관련된 무차원매개변수 $g/(C^2 h_0 k_0)$ 의 값은 M_2, S_2, O_1, K_1 에 대해 각각 38, 36, 73, 78이다.

u_0/c_0 와 $g/(C^2 h_0 k_0)$ 의 기지값으로부터 비선형 마찰해들의 μ 와 k 의 값은 식(3.35)과 (3.36)을 이용하여 시산법에 의해 구할 수 있다. 해석해

$$S_r = \frac{u_1 u_1}{C^2(h+7)} = \left(-\frac{u_0^2}{C^2(h+7_0)} \right) + \epsilon \left(-\frac{2u_0 u_1}{C(h+7_0)} + \frac{\gamma_1 u_0}{C(h+7_0)^2} \right) + \epsilon^2 \{ \dots \} + \dots \quad (4.16)$$

담수유출이 없을때 즉, $u_0=0$ 일때에는 마찰이 없게된다. 조석이 상류로 진폭의 감쇄 없이 전파해 감을 의미하는데 이는 실제 현상과는 다른 것이다. 이는 하상의 조도 영향에 의한 에너지 소멸 과정이며 조석의 진폭은 주로 하상조도와 담수유출 때문에 감쇄된다. 담수유출은 조석의 진폭감쇄를 증가시킨다. 그러므로, 구해진 해석

들로부터 무차원 감쇄율 값들을 표 4.2에 수록하였다. 대부분의 무차원 감쇄율 값들은 큰 담수유출에 대해 실측치보다 낮게 평가되었다. 지배방정식의 비선형 마찰경사는 섭동매개변수의 먹급수로 확장하면 다음과 같다.

해에 하상조도에 기인하는 마찰을 다른 매개변수가 보정하도록 해야 한다. 하나의 방법은 실제 관측된 무차원 감쇄율 매개변수와 해석해로부터의 값과의 상관관계를 구하는 것이다. 본 연구에서 이들의 관계를 지수함수 회귀분석한 결과 다음과 같이 표시할 수 있다.

a) 반일 주조(M_2 와 S_2)

$$\left(\frac{\mu}{k_0} \right)_{\text{observed}} = 0.374 \exp \left\{ 1.069 \left(\frac{\mu}{k_0} \right)_{\text{analytical}} \right\} \quad (4.17)$$

상관계수 = 0.93.

b) 전일주조(K_1 과 O_1)

$$\left(\frac{\mu}{k_0} \right)_{\text{observed}} = 0.431 \exp \left\{ 0.804 \left(\frac{\mu}{k_0} \right)_{\text{analytical}} \right\} \quad (4.18)$$

상관계수 = 0.97

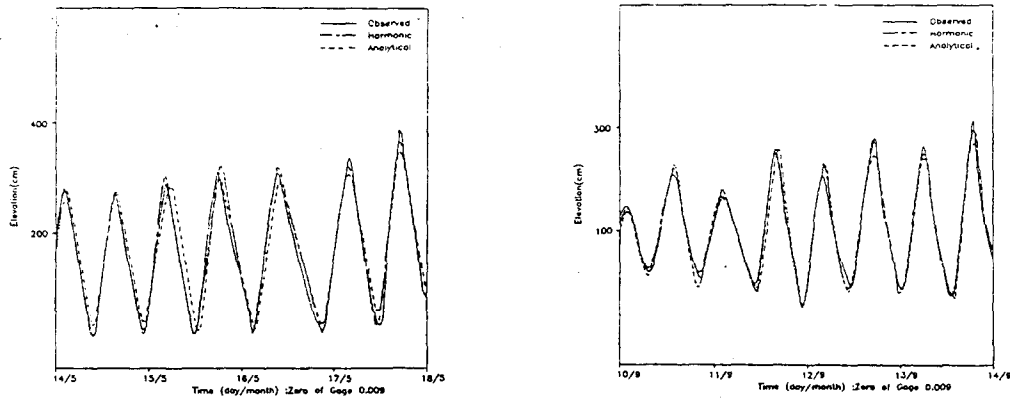


Fig 4.2a Comparison of Observed Tides and Harmonic Analysis Results with Analytical Results in 1981, Station Ib Po

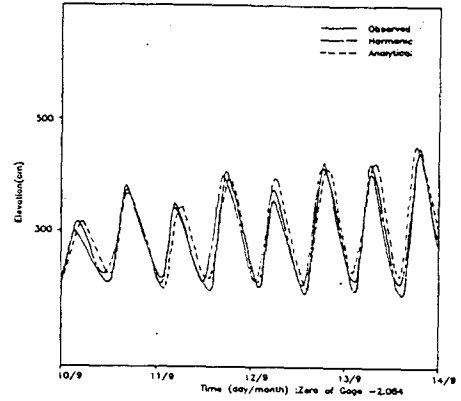
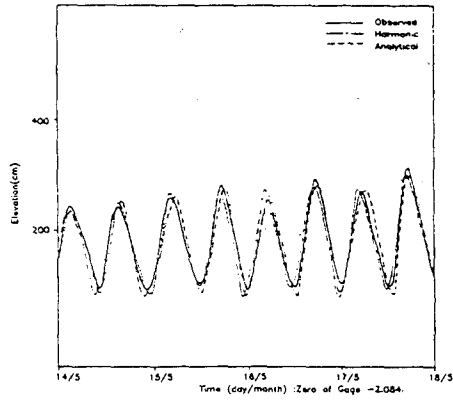


Fig 4.2b (Continued), Station Ganggyeung

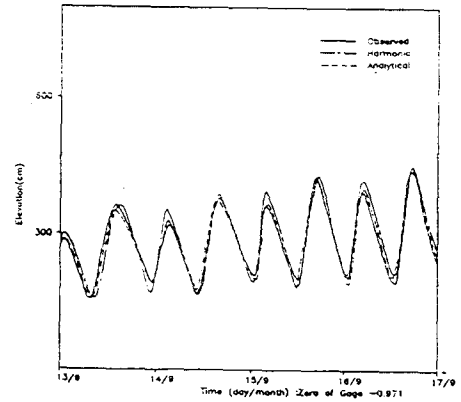
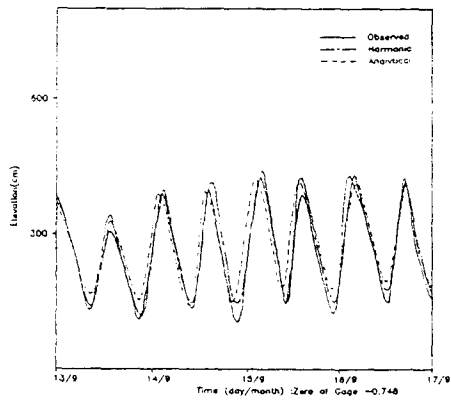
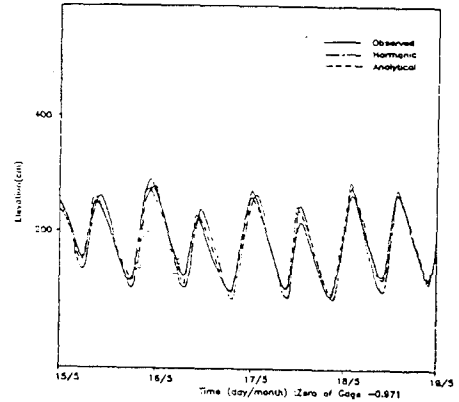
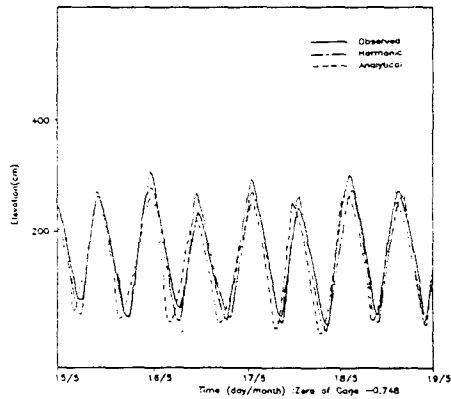


Fig 4.3a Comparison of Observed Tides and Harmonic Analysis Results with Analytical Results in 1981. Station Ib Po

Fig 4.3b (Continued), Station Ganggyeung

하구의 경제조건을 사용한 일차해와 0차 해에서 4대분조의 해석으로부터 각각 조석관측소별 수위 계산 결과를 요약해서 조석관측치와 조화 분석결과와 비교하여 그림 4.2, 그림 4.3에 도시하였다. 9월의 조석관측치와 계산결과 사이에 오차는 다른것 보다 크게 나타나고 있으며 이는 담수 유출의 변동에 기인한다. 월 평균 수위는 관측 자료를 평균하여 얻어지지만 홍수기 동안 유출의 증가는 본질적으로 평균수위의 증가를 야기한다. 그러므로, 보다 짧은 기간을 분석하여 이들의 영향을 살펴볼 필요가 있다.

4.4 부정류 하천 유출의 효과

전절에서 제시된 담수 유출의 변동에 의한 특히 홍수기 동안의 예측 편차를 살펴보기 위해 유출량의 변동이 심한 9월의 자료를 이용하여 7.5일의 4주기와 15일의 3주기에 대해 분석 하였다. 이들 자료를 4.1절의 둘째 가정해에 따라 4대분조의 조화 상수를 결정하여 분석한 결과, 최대 진폭 및 감쇄율은 담수유출 뿐만 아니라 연구의 각 시간 주기에서 하구의 조석들의 조건에 의해 지배됨을 알 수 있다. 그러나 조화 분석시는 보다 장주기의 자료를 사용해야만 예측 오차를 줄일수 있다.

5. 결 론

본 연구는 파 동수역학 방정식으로부터 섭동 근사해법에 의하여 3가지 경우 즉, 마찰이 없는 수평하상, 선형마찰, 비선형 마찰에 대해서 각각 해석해를 구하였다. 조석이 하천으로 전파되는 것을 기술한 조석수학 모형에 담수유출에 의한 상호작용 효과를 고려하였다. 본연구에서 얻어진 결과는 다음과 같다.

1. 각 경우의 해의 유도에 있어 첫째 경우는 2차까지 고려할때 해가 발산한다. 선형 마찰의 경우는 해가 Bessel 함수형태로 표현되며 하구의 초기 조석진폭이 시간에따라 크게 감소하고 해가 담수 유출과 각 조석분조의 각기 상호작용을

명확히 보여주지 못하고있다.

2. 담수유출속도 효과를 포함한 가정해를 조석의 무차원 매개변수들과 연관시켜 분석하였다. 이들로부터, 조석의 전파와 감쇄는 담수유출에 의해 영향을 받으며 조석들의 진폭은 담수유출의 증가에따라 감소한다.

3. 4대분조인 M_2 , S_2 , K_1 , O_1 의 조화상수들을 금강에서 가정해에 따라 구한 결과, 담수 유출속도의 효과로 인한 조석 주기의 변동은 지배적이지 못하며 더우기 감쇄율은 실제 관측치보다 낮게 평가되었다.

4. 홍수시의 짧은 시간동안의 분석결과는 조석의 감쇄율은 거의 크기가 같은 차수이나 조석 예측은 보다 정확함을 보여준다.

參 考 文 獻

- 1) 최병호, 안원식, "금강 감조구간의 조석전파", 대한토목학회지, 제 18권 1호, 1985.
- 2) 최병호, 이정렬, 오윤근, "하천유량의 증가에 따른 금강 조석의 변화", 대한 토목학회 논문집, 제 7권 제3호, 1987. 9.
- 3) Ames, W.F.(1965), Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering Mathematics in Science and Engineering, Vol.18, Academic Press, Inc., New York, 1965.
- 4) Brevik, I. and Aas, B.(1980), Flume Experiment on Waves and Current, I. Rippled Bed, Coastal Engineering, Vol. 3, 1980.
- 5) Dronkers, J.J.(1969), Tidal Computations for Rivers, Coastal Areas and Seas, Journal of the Hydraulic Division, Proceeding of ASCE, 1969.
- 6) Einstein, H.A., and Fuchs, R.A.(1955), Computation of Tides and Tidal Currents - United States Practice, Proceeding of ASCE, Vol.81, Seperate No.715, June 1955
- 7) Friedrichs, K.O.(1948), On the Derivation of the Shallow Water Theory, Appendix to the Formation of Breakers and Bores by J.J. Stoker,

- Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol.1, 1948, pp.81-87.
- 8) Godin, G.(1985), Modification of River Tides by the Discharge, Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE, Vol.111, No.2, 1985, pp.257-274.
- 9) Ippen, A.T.(1966), Estuary and Coastline Hydrodynamics, McGraw Hill Book Company, Inc, Chapter 4 pp. 197-230, Chapter 10 pp.493-545, 1966.
- 10) LeBlond, P.H.(1978), On Tidal Propagation in Shallow Rivers, Journal of Geophysical Research, Vol.83, 1978, pp.4717-4721.
- 11) Miller, K.S(1963), Partial Differential Equations in Engineering Problems, Prentice Hall Book Company, Inc., New York, pp.234-247.
- 12) Mahmood, K. and Yevjevich, V.(1975), Unsteady Flow in Open Channels, Vol .1, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado 80522, USA, 1975.
- 13) Nayfeh A.H.(1972), Perturbation Methods, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1972.
- 14) Perroud, P.(1959), The Propagation of Tidal Waves into Channels of Gradually Varying Cross section, Technical Memorandum No.112, Beach Erosion Board, Washington, D.C., 1959.
- 15) Phuc, T.V.(1985) Interaction of Tide and River Flow, Thesis No.WA-85-54, Asian Institute of Technology, Bangkok Thailand 1985.
- 16) Pritulo, M.F.(1962), On the Determination of Uniformly Accurate Solutions of Differential Equations by the Method of Perturbation of Coordinate, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 26, No.3, 1962.
- 17) Sneddon, I.N.(1957), Elements of Partial Differential Equations, McGraw Hill Book Company, Inc., 1957, pp.88-136.
- 18) Shuto, N.(1974), Nonlinear Long Waves in a Channel of Variable Section, Coastal Engineering in Japan, Vol.17, 1974, pp.1-12.
- 19) Vongvisessomjai,S. and S. Rojanakamthorn, (1989), Interaction of Tide and River Flow, Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng. Vol.115, No. 1, Jan. 1989, pp.86-104