

F.A.M.을 이용한 空洞 내부의 유동해석

朴命圭* · 鄭正恒** · 金東津***

Analysis of Flow Field in Cavity Using Finite Analytic Method

M.K. Park, H.CH. Jeong, D.J. Kim

Abstract

In the present study, Navier-Stokes equation is numerically solved by use of a Finite analytic method to obtain the 2-dimensional flow field in the square cavity.

The basic idea of F.A.M. is the incorporation of local analytic solutions in the numerical solution of linear or non-linear partial differential equations. In the F.A.M., the total problem is subdivided into a number of small elements. The local analytic solution is obtained for the small element in which the governing equation, if non-linear, to be linearized.

The local analytic solutions are then expressed in algebraic form and are overlapped to cover the entire region of the problem.

The assembly of these local analytic solutions, which still preserve the overall nonlinearity of the governing equations, results in a system of linear algebraic equations. The system of algebraic equations is then solved to provide the numerical solutions of the total problem.

The computed flow field shows the same characteristics to physical concept of flow phenomena.

1. 서 론

많은 유체 유동현상중, 空洞을 지나는 흐름은 유체유동을 수치적으로 해석하고자 하는 연구자들의 관심의 대상으로, 이는 수치계산 기법의 적합성 여부 및 응용성을 검증하는 목적으로서 널리 이용되어 왔다. 이러한 空洞 공간상에서의 유동특성을 본 논문에서는 Finite Analytic Method를 이

용하여 2차원 사각형 공동을 지나는 laminar channel flow에 대해 계산하여 해석하였다.

Finite Analytic Method는 풀고자 하는 문제 영역의 전 영역을 많은 작은 격자요소로 나누고 이들 작은 격자요소에 대한 부분해석 해를 구한 다음 이 부분해를 활용하여 한 격자점과 그 격자점을 둘러싸고 있는 격자계에 관한 대수방정식을 만들고 이 대수방정식을 풀므로써 전 영역에서의 해를 구

* 정희원, 한국해양대학 선박공학과

** 부산대학교 조선공학과

*** 현대선박 해양연구소

해가는 수치계산 기법이다. 본 연구에서는 공동내부의 x, y방향의 유속을 Reynolds number 2×10^3 의 영역에 이르기까지 계산을 수행하였으며 또한, 전 구간에 걸친 압력분포 및 질량보존량을 구하였다. 계산과정에서 F.A.M.은 해의 수렴속도가 빠르면서도 안정성에서도 우수함이 증명되었다. 수치계산상, Reynolds number의 크기와 밀접한 관계가 있는 시간증분 τ 는 격자계수 300개 일때 Rn 가 400에서와 0.5로 하였으며, Reynolds number에 따른 유장변화는 층류 범위내에서는渦(와)의 중심이 Rn 가 증가함에 따라 점차 앞으로 이동함을 알 수 있었다.

2. Finite Analytic Method의 이론

Finite Analytic Method의 이론설명을 위하여 타원형의 2차원 편미분 방정식을 예로 들기로 하자. 편미방

$$L(\phi) = 0 \tag{1}$$

을 그림 1과 같은 영역 R에서 풀고자 한다. 여기서 L은 선형 혹은 비선형의 편미분 연산자이다. 그림 1의 영역 R은 많은 작은 격자요소들로 이루어져 있고 그림 2에서 보인 바와 같이 격자점 p(i, j)를 가지는 하나의 대표적 격자요소는 주의에 8개의 즉, NE(North east), NW, NC, SE, SC, SW, EC와 WC의 격자점들로 둘러싸여 있다.

격자요소들이 충분히 작다고 하면 Navier-Stokes equation에서의 대류항과 같은 편미분 방정식의 비선형 항은 격자요소내에서 부분적으로 선형화 될 수 있을 것이며 이 경우 대류속도는 격자요소의 평균속도로 할 수 있다.

한편, 계산과정상의 목적에서 요구되는 각 격자요소의 경계조건 f_N, f_S, f_E, f_W 등을 격자요소의 각 경계에 따른 격자 값의 종속변수의 향으로 개략적으로 나타낸다고 하면, 식 (1)의 해 ϕ 는 식 (1)을 부분적으로 선형화시킨 방정식을 지배방정식으로 하는 격자 요소들의 부분해식 해를 $\phi(x, y)$ 라 할 때

$$\phi(x, y) = f(f_N, f_S, f_E, f_W, x, y, h, k) \tag{2}$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 h와 k는 x, y방향의

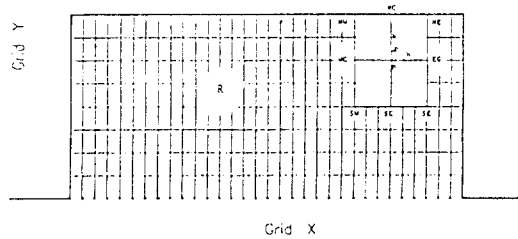


그림 1. Local element of uniform grid spacing

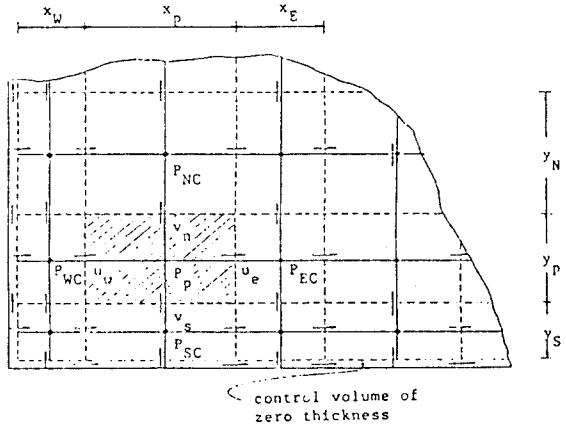


그림 2. Staggered grid coordinate system “.” pressure, “-” u, “|” v

격자의 크기이다.

식 (2)에 경계조건을 대입하고 내부점 p에 대한 식으로 전개하면 다음과 같은 Finite Analytic 9-point 공식을 얻게 된다.

$$\phi_p = C_{NE}\phi_{NE} + C_{EC}\phi_{EC} + C_{SE}\phi_{SE} + C_{SC}\phi_{SC} + C_{SW}\phi_{SW} + C_{WC}\phi_{WC} + C_{NW}\phi_{NW} + C_{NC}\phi_{NC} \tag{3}$$

여기서 $C_{NE}, C_{EC} \dots$ 등은 finite analytic 계수로 이 값들은 각 격자요소의 부분해로부터 구해진다.

3. 문제의 공식화

본 연구에서는 그림 1과 같은 사각공동(square cavity)을 지나는 2차원 흐름을 가지고 Finite Analytic Method의 가능성 및 타당성을 평가하고자 했다.

공동은 2차원으로 높이가 W이고 길이가 2W이다. 공동속의 유장은 정상흐름이고 층류로서 뉴턴

법칙을 따르는 비압축성 유체로 한다.

일반적으로 속도장에서 속도를 구해내는데 있어 가장 큰 어려움은 미지의 압력장을 구하는 일이다. 압력장은 운동량 방정식에서의 압력구배를 통해 속도장에 영향을 미치게 되나 아직 압력이 바로 구해지는 방정식이 없다. 속도성분 u 와 v 가 다음 두 운동량 방정식에 지배받는다라고 하면 압력장은 연속 방정식에 의해 간접적으로 정해진다.

$$u_t + uu_x + vv_y = -P_x + \frac{1}{Re}(u_{xx} + u_{yy}) \quad (4)$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -P_y + \frac{1}{Re}(v_{xx} + v_{yy}) \quad (5)$$

윗식 (4), (5)의 운동량 방정식에는 방정식 자체를 FA법으로 풀이하는데에는 큰 어려움이 따로 없으나 문제는 연속 방정식을 어떻게 압력을 구하는 연산으로 해석하느냐에 있다.

앞의 운동량 방정식에서 정확한 압력구배의 값이 사용되면 그 결과로 구해지는 속도는 자동적으로 연속 방정식을 만족시키게 되므로 정확한 압력을 구할 수 있는 방법이 강구되어야 한다. 여기에서는 압력을 도출해 내기 위한 방법으로 연속방정식을 이용한 방법을 쓰기로 한다. Navier-Stokes 방정식에 divergence를 취해 압력에 관한 Poisson방정식을 유도하면

$$P_{xx} + P_{yy} = 2(u_x v_y + u_x^2 v_y^2) + \frac{1}{Re}(D_{xx} + D_{yy}) - (uD_x + vD_y) \quad (6)$$

을 얻는다. 여기서 D 는

$$D = u_x + v_y \quad (7)$$

로 연속 방정식으로부터 $D=0$ 이어야 하므로 윗식 (6)은

$$P_{xx} + P_{yy} = 2(u_x v_y - v_x u_y) \quad (7 a)$$

로 되어 식 (4), (5)의 운동량 방정식을 식(7-a)의 Poisson방정식과 연립시켜 풀므로써 속도 u, v 와 압력 P 가 구해지게 된다.

4. Finite Analytic Solution

앞절에서 압력과 속도를 구하는 방법에 관계 기

술했으나 운동량 방정식 (4)와 (5)에서 구해진 속도가 반드시 연속 방정식을 만족시키지 않고 식 (6)에서 계산된 압력이 오차를 갖고 있으므로 이로 인해 압력 방정식과 운동량 방정식을 반복적으로 풀어야 할 경우 비선형성 불안정성이 문제된다.

압력과 속도의 연성문제(coupling problem)를 처리하기 위해 많은 방법이 제안되었으나 그 중 Chorin 등은 Helmholtz의 decomposition theorem에 기초한 iterative scheme을 제안하였으며 이 scheme에서는 압력을 연속방정식과 연계시켜 구하기 위해 속도 수정공식과 압력 수정공식을 사용하고 있다.

Chorin의 접근방법의 기본 idea는 먼저 속도수정을 불완전한 유장에서 압력수정을 사용하여 수행하고 수정된 속도장이 압력장을 수정하면서 연속 방정식을 만족하게끔 속도장과 압력장을 개선시켜 나가는 것이다. 여기에는 Patanker-Spalding의 pressure-update scheme의 P'equation을 사용하므로써 좋은 결과를 얻을 수 있다. pressure-update scheme에서는 압력수정 방정식에서 압력을 점차로 개선시켜 나가는 대신, Navier-Stokes equation에서 압력구배 항을 없앴으므로써 바로 유사속도장을 얻고 따라서 추정 속도장에서 개선된 압력장을 얻고 있다.

이러한 계산 과정에서 어떤 격자계를 택할 것인가 하는 것이 필수적인 고려사항으로 급변 계산에서는 이곳난 격자계(staggerd grid)를 사용하였다.

그러나 이곳난 격자계를 도입하면 운동량 방정식을 경계면에 인접한 속도제어체적에 관해서 풀 때 경계면에서의 압력이 소용되지 않는 결함이 생길 수 있고 유장의 경계조건으로 경계면에서의 압력이 주어지는 경우에는 운동량 방정식의 처리과정에 이 압력이 관련되어야 하므로 본 연구에서는 고정벽을 따라 두께가 영인제어체적을 부가시켜 전체영역에서의 격자크기가 불균일되게 하는 한편 격자계는 이곳난 격자계가 되도록 하였다. 이러한 격자계에서는 경계면과 인접하여 설정된 또 하나의 제어체적이 경계면과 사실상 동일한 압력 값을 갖게하여 경계면에서의 압력조건이 경계면에 인접

한 속도제어 체적에서 계산되는 운동량 방정식에 영향을 줄 수 있도록 하므로써 연속 방정식과 운동량 방정식에서 압력구배항을 유한차분표현 형태로 나타낼 때 일어날 수 있는 비현실적인 압력, 속도장이 계산 결과치로 나타나는 것을 피하도록 하였다. x-y평면 상의 u, v, P의 어긋난 격자계의 구성이 그림 2에 나타나 있다. 그림에서 점선은 control volume의 면을 나타내고 압력은 control volume의 중앙에서 계산된다. 이러한 격자계에서 비정상 2차원 운동량 방정식 식 (4)를 10-point FA 공식으로 나타내면

$$u_e = \frac{1}{G^u + \frac{Re}{\tau} b_e^u} \left[\sum_{n=1}^8 b_{nb}^u u_{nb} + \frac{Re}{\tau} b_e^u u_e^{n-1} - b_e^u (Re P_x + f_e^u) \right] \quad (8)$$

과 같이 된다. 여기서 압력구배 P_x 는

$$P_x = \frac{P_{EC} - P_p}{0.5(\Delta x_E + \Delta x_p)} \quad (8-a)$$

로 근사시킨다. 식(8)중의 f 는 고차수정항 (higher order correction term)으로

$$f_e^u = Re[(u' u)_x + (v' v)_y]_e \quad (9)$$

로 격자점 e에서 가지는 대표적인 상수값을 지닌다.

압력과 속도의 연성문제를 풀기 위하여 유사속도장을 도입한다. u_e 의 유사속도를 \hat{u}_e 라 하면

$$\hat{u}_e = \frac{1}{G^n + \frac{Re}{\tau} b_e^u} \left[\sum_{n=1}^8 b_{nb}^u u_{nb} + \frac{Re}{\tau} b_e^u \hat{u}_e^{n-1} - b_e^u f_e^u \right] \quad (10)$$

와 같이 된다. 위 식 (10)은 유사속도를 정의하고 압력항만 빼고는 본질적으로 식 (8)과 같다. 그러므로 이산화된 운동량 방정식 식 (8)은

$$u_e = \hat{u}_e - d_e(P_{EC} - P_p) \quad (10-a)$$

여기서

$$d_e = \frac{Re b_e^u}{0.5(\Delta x_E + \Delta x_p) (G^u + \frac{Re}{\tau} b_e^u)} \quad (10-b)$$

마찬가지로

$$v_n = \hat{v}_n - d_n(P_{NC} - P_p) \quad (10-c)$$

와 같이 나타낼 수 있으므로 압력장이 임의로 추정될 수만 있으면 속도 u, v는 운동량 방정식 식(10-a), (10-c)로 부터 구해지게 된다.

그러나 압력장이 크게 틀린 값이 대입되면 식 (10)의 속도장의 계산결과로서의 u_e, v_n 등이 연속 방정식을 만족시키지 못하게 된다.

추정된 압력장 p^* 에 근거한 불완전한 속도장을 u^*, v^* 라 하면

$$u_e^* = \hat{u}_e^* - d_e(P_{EC}^* - P_p^*) \quad (11-a)$$

$$v_n^* = \hat{v}_n^* - d_n(P_{NC}^* - P_p^*) \quad (11-b)$$

로 되고 이값들은 압력장의 보다 가까운 근사를 얻기 위해 운동량 방정식에 대입되어 반복적으로 계산해 나가는데 이용된다. 만일 반복계산시 해가 수렴해가면 속도장은 이러한 반복계산을 통해 최종적인 속도장에 접근하게 되고 최종적인 속도장은 연속 방정식을 만족하게 되는데 해의 수렴 여부를 알기 위해서는 속도성분이 압력장의 변화와 어떻게 응답하는가를 알아야 한다. 이를 식으로 풀어서 정리하면 다음과 같다.

구해진 속도장이 이상화된 다음의 연속방정식

$$D = u_x + v_y = 0 \quad (12-a)$$

혹은

$$D = \frac{u_e - u_w}{\Delta x_p} + \frac{v_n - v_s}{\Delta y_p} = 0 \quad (12-b)$$

을 만족시키는지의 여부를 알아보기 위해 식(10)과 (11)로 부터 속도수정치 $u_e - u_e^*$ 등에 관하여 압력수정치 $p' (= p - p^*)$ 를 향으로 가지는 다음과 같은 식을 유도한다.

$$u_e - u_e^* = (\hat{u}_e - \hat{u}_e^*) - d_e(p_{EC}' - P_p') \quad (13-a)$$

$$v_n - v_n^* = (\hat{v}_n - \hat{v}_n^*) - d_n(p_{NC}' - P_p') \quad (13-b)$$

그러나 위 식은 속도 수정치 $u - u^*, v - v^*$ 가 implicit한 성격을 가지고 있으면서 u^*, v^* 가 식 (11)의 함수로 되어 있으므로 해서 식(12)에 식 (13)를 대입하여 얻게되는 P' 에 대한 압력 방정식이 계산영역의 전 격자점에서 압력 수정치 P' 를

맞게 되고 따라서 그 처리가 불가하게 된다.

속도수정항 $u-u^*$, $v-v^*$ 이나 압력 수정항 $P-P^*$ 가 최종 수렴 과정에서는 정확히 영이 되므로 이 과정에서는 수정값을 구하는 공식이 무의미하게 된다. P' 를 구하는 압력 수정 방정식은 최종 해에는 아무런 영향을 주지 않고 정확한 압력장 P 를 구하는 중간 연산 과정으로만 취급되어야 하며 식(13)에서 속도수정에 관한 항을 생략하여 보다 간단하게 P' 를 구할 수 있는 압력 수정공식을 이용하도록 한다.

「SIMPLE」 혹은 「SIMPLER」 (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked equation, Revised)가 그것으로 식(13)에서 $u-u^*$, $v-v^*$ 항을 생략하므로써 속도수정을 P' 에 대해 explicit 하게 나타낼 수 있다. 즉,

$$u_e - u_e^* = d_e(P_p' - P_{EC}') \quad (14-a)$$

$$v_n - v_n^* = d_n(P_p' - P_{NC}') \quad (14-b)$$

윗 식(14)의 속도 수정 개략치가 식(12)의 이산화된 연속방정식을 만족시키는지의 여부는 다음과 같은 압력수정 P' 에 관한 Poisson 방정식을 유도하여 검증하므로써 알아볼 수 있다.

$$a_p P_p' = a_e P_{EC}' + a_w P_{WC}' + a_n P_{NC}' + a_s P_{SC}' - D^* \quad (15)$$

여기서

$$a_e = \frac{d_e}{\Delta x_p}, \quad a_w = \frac{d_w}{\Delta x_p}, \quad a_n = \frac{d_n}{\Delta y_p}, \quad a_s = \frac{d_s}{\Delta y_p} \quad (15-a)$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s \quad (15-b)$$

$$D^* = \frac{u_e - u_w}{\Delta x_p} + \frac{v_n - v_s}{\Delta y_p} \quad (15-c)$$

이때 P' 의 경계조건은 다음과 같이 줄 수 있다. 압력이 경계에서 주어지면 $P^* = P_{given}$ 이면 경계에서의 압력수정은 영이다.

반면, 경계에서 속도가 주어지면 즉, $u_e^* = u_e$ 이면 식(14)의 속도수정은 고려할 필요가 없게 된다. 위 식(15)에서 P' 를 구하면 이완계수(under-relaxation factor)를 이용하여 압력을 수정해 나간다.

$$P = P^* + \alpha P' \quad (16)$$

지금까지 전개된 내용을 정리하여 초기조건과 경계조건이 제대로 주어졌을 때 F.A.M.으로 최종 결과에 이르기까지의 해를 구해가는 과정을 요약하면 다음과 같이 컴퓨터프로그램을 구성하였다.

(1) 계산영역을 Reynolds number 크기에 비례하여 계산에 적합한 수의 작은 격자요소로 나눈다.

(2) 속도장에 관한 초기조건을 설정한다. 이때 정상적인 제어체적 크기보다 매우 작은 추가적인 제어체적을 압력조건이 존재하는 경계면에 인접하여 추가로 설정하여 이 추가적인 제어체적에 주어진 압력조건을 부과하고 압력조건이 존재하는 경계면의 속도를 추정한다.

(3) $(n-1)$ 차의 iteration step에서의 속도장은 n 차 iteration step에서의 초기 추정치가 된다.

(4) b_{nb}^u , b_{nb}^v 등의 FA계수와 압력 및 압력수정에 관한 FA 계수 a_e , a_w 등을 계산한다.

(5) 필요하면 고차수정항 f^u , f^v 등을 구한다.

(6) 식(10) 등에서 $(n-1)$ iteration step에서의 유사속도(pseudo velocity)를 결정한다.

(7) 식(7-a)에서 D 를 계산하고 식(6)의 방정식을 tridiagonal algorithm을 이용하여 압력장 P 를 계산한다.

이 때 압력 방정식의 계산영역에서 모든 경계면은 제외된다. 이 과정에서 주어진 압력경계조건은 추가적인 제어체적 설정의 도움에 의하여 압력 방정식의 경계조건으로 이용된다. 따라서 압력 방정식의 풀이 과정이 없는 SIMPLE algorithm보다 SIMPLER가 속도 경계조건이 주어지는 문제에 응용하기 유리할 것이다.

(8) 과정 (7)에서 구한 압력장 P 를 추정 압력장 P^* 로 하여 운동량 방정식 식(11)을 tridiagonal algorithm을 이용하여 풀어 추정 속도장 u^* , v^* 를 구한다.

(9) 식(15-c)에서 질량소스항 D^* 를 계산하고 압력수정 방정식 식(15)를 역시 tridiagonal algorithm을 써서 풀어 p' 를 구한다. 이때 압력수정 방정식을 풀이할 때 추가적인 제어체적내의 압력 수정치는 영이다.

(10) 속도수정 공식 식(14-a), (14-b)를 이용하여 속도장을 수정한다. 그러나 경계면의 속도항과 압력은 수정하지 않는다.

이렇게 얻어진 속도장 u, v 는 식(12)의 연속 방정식을 만족시킨다. 이때 추가로 설정된 제어체적 각각에서 연속성을 이용하여 압력조건이 존재하는 경계면에서 경계면과 수직된 속도성분을 수정하고 경계면에서 경계면과 평행한 속도성분이 보간법에 의하여 결정된다. 계산영역의 전체로서는 전체적인 연속성에 의하여 압력조건이 존재하는 경계면에서의 두 속도성분이 모두 또 다시 개선 수정된다.

(11) 속도해가 수렴되지 않을 경우 과정 (4)로

되돌아가서 과정 (10)까지를 주어진 수렴조건이 만족할 때까지 반복한다.

본 연구의 실제 내용에 있어서는 정상상태에 대해서만 해석이 수행되었고 전체영역은 33×9 개의 제어체적으로 분할하였으며 이는 그림 1에 나타나 있다. 그림 1에서 공동의 양 끝에 위치하는 추가적인 제어체적은 그 크기가 없으므로 나타나지 않았다. 본 연구에서는 이완계수는 별도로 사용되지 않았으며 수치해는 방정식을 이완시키지 않으면서 5회의 반복과정을 수행할 경우 압력값이 유효숫자 3자리 이내에서 일정할 때 수렴되었다고 간주하였다. 수치해의 수렴에는 약 50회 정도의 반복계산이 필요하였으며 1회 계산시간 SUN 380에서 126

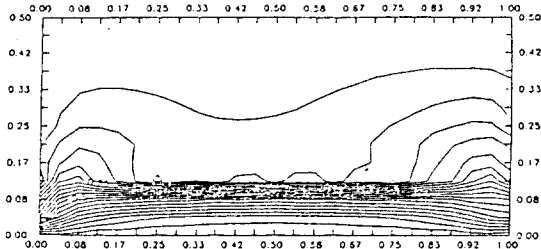


그림 3. Steady streamline contour for 2-D cavity flow of $Rn=400$, Time step=1

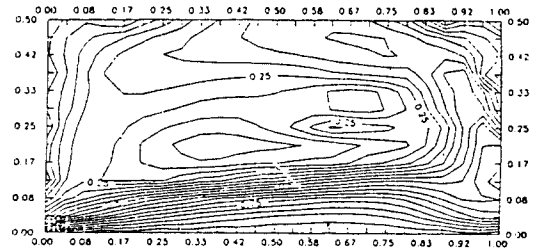


그림 6. Steady streamline contour for 2-D cavity flow of $Rn=400$, Time step=50

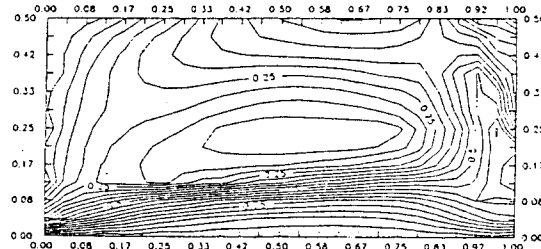


그림 4. Steady streamline contour for 2-D cavity flow of $Rn=400$, Time step=5

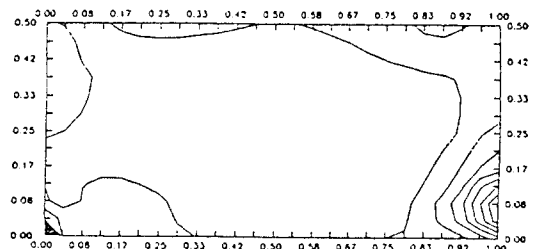


그림 7. Steady pressure contour for 2-D cavity flow of $Rn=400$, Time step=10

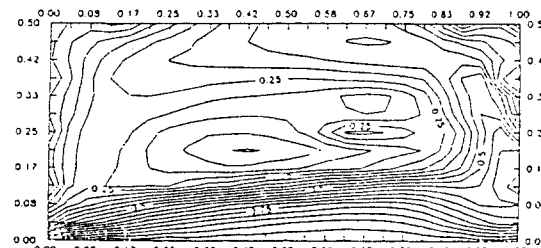


그림 5. Steady streamline contour for 2-D cavity flow of $Rn=400$, Time step=10

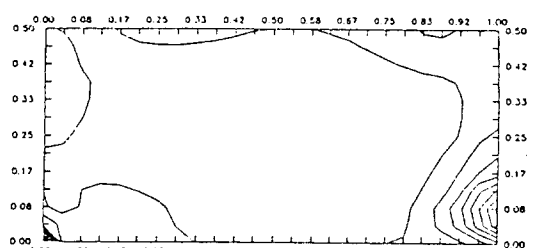


그림 8. Steady pressure contour for 2-D cavity flow of $Rn=400$, Time step=10

초이다. 이상의 결과는 $Rn=400$ 에 대하여 Time step 1에서 50결과와 합성속도를 그림 3~그림 6에 표시하고 또한 압력 contour는 그림 7, 그림 8과 같다. 또한 그림 9, 그림 10은 합성속도의 벡터 그림을 도시하고 있다.

이러한 반복계산을 수치해산 과정 (6), (7) 및 (8)과 같은 압력조건이 존재하는 경계면의 속도계선의 효율성 때문이다. 본 계산에서는 벽면에서부터 벽면을 따라 두께가 영인 staggered grid계를 사용함으로써 벽면에서의 no-slip condition이 제대로 만족되지 못하였으나 이는 앞으로 물리적 이치에 맞는 계산이 이루어 지도록 연구가 더 진행되어야 할 것이다.

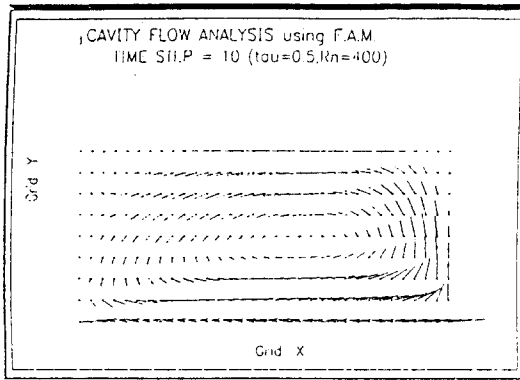


그림 9. Cavity flow analysis Using F.A.M Time Slip = 10 ($\tau=0.5, R_n=400$)

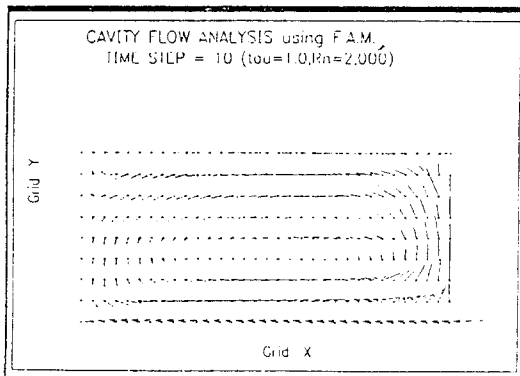


그림 10. Cavity flow analysis Using F.A.M Time Slip = 10 ($\tau=1.0, R_n=2,000$)

5. 결 론

속도경계조건을 우선적으로 추정할 수 없는 물리적 상황에서 주어진 압력경계조건을 이용하여 사각 공동내의 2차원 유동을 Navier-Stokes 방정식의 Finite Analytic Formulation 기법으로 해석하는 방법을 제안하고 이 방법의 응용으로서 사각 공동내에서의 유동 특성을 수치적으로 예측하여 아래와 같은 결론을 얻었다.

- (1) FA기법을 이용함으로써 문제의 영역을 많은 격자요소로 나누고 각 격자요소의 부분해를 주위의 격자점의 값들과 연결시켜 풀므로써 전영역의 속도 및 압력장을 구하였다.
- (2) Navier-Stokes 방정식과 연속 방정식만을 이용하여 유장을 해석하였다.
- (3) FA기법의 수치해석상의 해의 수렴성 및 안정성을 Reynolds number가 2×10^3 에 이르기까지 문제가 없음이 증명되었다.

후 기

본 논문은 1989~1991년 8월에 쇄빙선 설계시 쇄빙모형공학 및 쇄빙선의 역량과 예측에 관한 계산 도중 현대선박해양연구소와 한국해양대학에서 컴퓨터프로그램을 개발하여 선수모형을 개발한 내용의 일부입니다.

참고문헌

- 1) S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-hill, 1980.
- 2) Roache, P.J., "Computational Fluid Mechanics", Hermosa Publishers, 1972.
- 3) S.V. Patankar and D.B. Spalding, "Computer analysis of the three-dimensional flow and heat transfer in a stream generator", Forsch. Ing. Wes, Vol. 44, No. 2, pp. 47-52, 1978.
- 4) Chen, C. J. and Li, P., "The finite analytic method for steady and unsteady heat transfer problems", ASME Paper 80-HT-86, July 27-

- 30, 1980, SAME/AIChE National Heat Transfer Conference, Orlando, Florida.
- 5) Chen, C.J., Naseri-Neshat, H. and Ho, K.-S., "Finite analytic numerical solution of heat transfer in two-dimensional cavity flow", ASME Paper, HTD, Volume 13, ASME Winter Annual Meeting, November, 1980, Chicago. I 11., pp. 49-61. Published in the Journal of Numerical Heat Transfer, Volume, 4. 1981.
- 6) Ching-Jen chen, and Kemakoram Obashi, "The Finite Analytic Method", Vol. 2, June, 1981.
- 7) Pan, F. and Acrivos, A., "Steady flows in rectangular cavities", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 28, 1967, pp. 643-655.