Journal of the Korean
OR/MS Society
Vol. 16, No. 1, June., 1991

Karmarkar 기법의 최적기저 결정에 관한 연구

김병재* • 박순달**

Determining the Optimal Basis in Karmarkar's Algorithm

Byeong Jae Kim* • Soon Dal Park**

Abstract

When a feasible solution approaches to the optimal extreme point in Karmarkar's algorithm, components of the search direction vector for a solution converge at a certain value according to the corresponding columns of the optimal basis and the optimal nonbasis.

By using this convergence properties of Karmarkar's algorithm, we can identify columns of the optimal basis before the final stage of the algorithm. The complexity of Karmarkar's algorithm with newly proposed termination criterion does not increase.

A numerical experiments for the problems which were generated by random numbers are also illustrated. Experimental results show that the number of iterations required for determining columns of the optimal basis depends on problems. For all cases, however, columns of the optimal basis are exactly verified when this termination criterion is used.

* 명지대학교 산업공학과

** 서울대학교 산업공학과

Ⅰ. 서 론

선형계획법을 풀이하는 기법으로서 1984년에 발표된 Karmarkar 기법은 다항식의 계산 복잡도(polynomial-time complexity)를 갖는 새로운 기법이다[6]. Karmarkar기법에서는 매 계산단계(iteration)마다 구해지는 모든 가능해가 가능영역 내부에 존재하는 내부점 방식 기법에 해당되므로, 변수의 최적기저/비기저를 판단할 수 있는 방법의 필요성이 제기된다[3].

Karmarkar기법에서 최저기저/비기저에 관한 판정방법 연구는 Kojima, Ye 등이 있다[7][10]. 그리고, 해가 개선되는 방향의 벡터성분이 정점 부근에서 나타내는 수렴치에 관한 연구는 Asic이 있다[4].

본 연구에서는 해 탐색방향 성분의 일정한 수렴치를 이용하여 최적기저와 비기저의 구분으로써 최적해에 접근되는 판단에 이용할 수 있으며, 이를 계산단계의 종결에 효과적으로 활용할 수 있음을 제시하고자 한다[1].

다음에서는 Karmarkar 기법의 최적기저를 결정할 수 있는 판단기준에 관련되는 연구내용을 설명하고, 다수의 예제문제를 대상으로 이를 적용함으로써 최적해 접근여부의 판단 및 최적기저를 결정하는 실행적인 측면을 검토하기로 한다.

Ⅱ. 직교투영과 최소자승법 문제

Karmarkar기법은 다음과 같은 형태의 문제(KP1)를 풀이하는 기법이다[6].

(KP1) : Min. c^Tx

s.t. $Ax=0$

$e^Tx=1$

$x\geq 0$

단, $e=(1, \cdots, 1)^T \in R^n$.

$c, x \in R^n$,

A : mxn 행렬

Karmarkar기법은 초기해는 $x^0=(1/n), e, k=0$을 시작으로 해서 $c^Tx^k=0$이면 계산을 종료하며, $c^Tx^k\neq 0$이면 다음과 같은 계산단계를 수행한다.

계산단계 k번째에서 현재해 x^k이며, $D=\text{diag}(x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k)$는 대각행렬이다.

① $D=\text{diag}\{x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k\}$

$$B=\begin{bmatrix} AD \\ e^T \end{bmatrix}$$

② $\eta=[I-B^T(BB^T)^{-1}B]Dc$

③ $b'=(1/n)e-\alpha r \eta/\|\eta\|$

$\alpha\in(0, 1),\ r=\{1/(n(n-1))\}^{0.5}$

④ $k\rightarrow k+1$

$x^k=Db'/(e^TDb')$

①로 간다.

k번째 단계에서는 가능해 x^k를 사용하여 다음과 같은 변환을 적용한다.

$w=T(x)=D^{-1}x/(e^TD^{-1}x)$: 투영변환

이때 $T(x^k)=(1/n)e$이며 변환공간(simplex)의 중점에 위치한다.

이제 k번째 단계의 해 x^k로써 변환된 문제는 다음과 같다.

(KP2) : Min. c^TDw

s.t. $ADw=0$

$e^T w = 1$

$w \ge 0$

변환된 문제에서 목적함수의 개선방향을 η이라 하면 변환공간에서 방향 η를 이용하여 내접원 안에서 점$(1/n)e$으로부터 αr만큼 개선된 해 w^{k+1}는 다음과 같이 주어지며, 구하고자 하는 원공간의 개선된 해 x^{k+1}는 w^{k+1}를 역변환시킴으로써 구할 수 있다.

$$w^{k+1} = (1/n)e - \alpha r/\eta \, \| \eta \|$$

$$x = T^{-1}(w) = Dw/(e^T Dw)$$

: 역변환

$$x^{k+1} = T^{-1}(w^{k+1}) = Dw^{k+1}/(e^T Dw^{k+1})$$

: 개선된 해

이제 직교 투영의 개념을 도입하기로 하자. M의 영공간(null space)$\{d \in R^n : Md = 0\}$에 직교투영하는 행렬은 $P_M = I - M^T(MM^T)^{-1}M$이다[9].

$\tau(x^k)$와 $\eta(x^k)$를 다음과 같이 정의하자[8].

$\tau(x^k)$: 벡터 Dc를 행렬 AD의 영공간에 직교투영

$\eta(x^k)$: Dc를 행렬 $\begin{pmatrix} AD \\ e^T \end{pmatrix}$의 영공간에 직교투영

다음과 같은 문제를 고려한다.

$$\text{(KP3)} : \text{Min. } c^T Dw$$
$$\text{s.t.} \quad ADw = 0$$
$$w \ge 0$$

$M = AD$일때 투영행렬 $P_{AD} = I - DA^T(AD^2A^T)^{-1}AD$이며, $\tau(x^k) = P_{AD}\,Dc$ 및, $\eta(x^k) = P_e P_{AD}\,Dc$이므로

$$\tau(x^k) = Dc - DA^T(AD^2A^T)^{-1}AD^2c \qquad (1)$$

$$\eta(x^k) = Dc - DA^T(AD^2A^T)^{-1}AD^2c - (c^Tx^k/n)e \qquad (2)$$

$$= \tau(x^k) - (c^Tx^k/n)e \qquad (3)$$

와 같다[8].

$\tau(x^k)$에 관한 관계식을 구하기 위하여 다음과 같은 최소자승문제를 고려한다.

$$\text{(LP1)} : \underset{y}{\text{Min}} \| Dc - DA^Ty \|^2$$

문제(LP1)의 최적 최소자승해는 $y^* = (AD^2A^T)^{-1}AD^2c$이다[9]. 여기서 (1)식을 고려하면 다음과 같다.

$$\| Dc - DA^Ty^* \|^2 = \| Dc - DT^T(AD^2A^T)^{-1}AD^2c \|^2$$
$$= \| \tau(x^k) \|^2$$

$$\underset{y}{\text{Min}} \| Dc - DA^Ty \|^2 = \| \tau(x^k) \|^2 \qquad (4)$$

그런데 $\tau(x^k)$이 문제(KP3)의 해 개선방향임을 감안해서 (4)을 관찰하면, 문제(KP3)의 최적해를 구하는 것은 곧 $\| \tau(x^k) \|^2$의 값을 구하는 문제와 동일함을 알 수 있다[1].

이제 다음과 같은 최소자승문제를 고려하자.

$$\text{(LP2)} : \underset{y,\,v}{\text{Min}} \| Dc - DA^Ty - ev \|^2$$

문제(LP2)의 최적 최소자승해는 $y^* = (AD^2A^T)^{-1}AD^2c$, $v^* = c^Tx^k/n$이다[5]. 여기서 (1), (2) 및 (3)식을 고려하면 다음과 같다.

$$\| Dc - DA^Ty^* - ev^* \|^2 = \| Dc - DA^T(AD^2A^T)^{-1}AD^2c - (c^Tx^k/n)e \|^2$$
$$= \| \eta(x^k) \|^2$$

$$\underset{y,\,v}{\text{Min}} \| Dc - DA^Ty - ev \|^2 = \| \eta(x^k) \|^2 \qquad (5)$$

$\eta(x^k)$이 문제(KP2)의 해의 개선방향임을 고려하면, 문제(KP2)의 최적해를 구하는 것은 곧 $\| \eta(x^k) \|^2 = \| \tau(x^k) - (c^Tx^k/n)e \|^2$의 값을 구하는 문제와 동일함을 알 수 있다[1].

이러한 관계를 이용하여 다음에서는 $\| \tau(x^k) - (c^T x^k/n)e \|^2$에 대하여 연구하기로 한다. 문제 (KP1)가 유일 최적해를 갖는다고 가정하며, 다음과 같이 U와 L로 분할하기로 하자.

$$\left.\begin{array}{l} x = \begin{pmatrix} x_U \\ x_L \end{pmatrix} \\ x_U > 0,\ x_L \cong 0,\ x_U \in R^r,\ x_L \in R^{(n-r)} \\ e^T = (e_U{}^T,\ e_L{}^T) \\ U = \{1,\ 2,\ \cdots,\ r\} \\ L = \{r+1,\ \cdots,\ n\} \end{array}\right] \quad (6)$$

문제(KP1)에서 $\tau(x^k)$의 극한치는 U 및 L에 따라서 다음과 같다[6].

$$\{\tau(x^k)\}j \to 0 \qquad j \in U,\ k \to \infty$$
$$\{\tau(x^k)\}j \to c^T x^k/(n-r), \qquad j \in L,\ k \to \infty$$

그리고 문제(KP2)의 최적오차는 다음과 같은 극한치를 나타낸다[1].

$$\| \tau(x^k) - \{c^T x^k/n\}e \|^2 \to \| \tau_U(x^k) \|^2 + \| \tau_L(x^k) - \{c^T x^k/(n-r)\}e_L \|^2, \qquad k \to \infty$$

이 내용을 설명하면 다음과 같다[1]. 계산의 초기 단계에서는 최적오차가 $\| \tau(x^k) - \{c^T x^k/n\}e \|^2$으로 나타난다. $\| \tau(x^k) - \{c^T x^k/n\}e \|^2$을 살펴보면 $e^T \tau(x^k) = c^T x^k$이므로

$c^T x^k/n = \tau(x^k)$ 성분의 평균치

에 해당된다. 따라서

$\| \tau(x^k) - \{c^T x^k/n\}e \|^2$는 $\tau(x^k)$ 성분의 제곱합(또는 변동)

이다.

내부의 중점에서 시작하여 계산이 진행되면서 해가 정점 최적해에 접근되면 어느 단계에서 $\| \tau_U(x^k) \|^2 + \| \tau_L(x^k) - \{c^T x^k/(n-r)e_L\} \|^2$으로 전환된다. 이 식에서 $\| \tau_U(x^k) \|^2$은 n개의 $\{\tau(x^k)\}_j$값 가운데서 0으로 수렴되는 r개의 $\{\tau(x^k)\}_j$값의 제곱합이며, $\| \tau_L(x^k) - \{c^T x^k/(n-r)\}e_L \|^2$은 $c^T x^k/(n-r)$의 값을 평균치로 하는 n−r개의 $\{\tau(x^k)\}_j$값의 제곱합이다.

$\{\tau(x^k)\}_j$의 값이 0 또는 $c^T x^k/(n-r)$로 수렴하는 양상을 관찰함으로써 정점에 접근되는 성분에 대한 판단이 가능한 계산단계가 존재하며, 이 단계에서는 이렇게 구한 최적기저를 이용함으로써 정점 최적해를 결정할 수 있으며 이로써 계산단계를 종료할 수 있다.

이렇게 $\tau(x^k)$이 기저/비기저로 양분되는 현상을 이용함으로써 해 x^k가 최적해에 접근되는 시점에서 최적기저/비기저를 구분할 수 있으므로, $\tau(x^k)$의 수렴치에 의거하여 기저/비기저를 구분할 수 있는 기준설정에 관하여 연구하기로 한다.

Ⅲ. 기저/비기저 판정기준의 설정

다음과 같이 최적오차의 부등식이 만족되는 조건을 고려하자.

$$\| \tau(x^k) - (c^T x^k/n)e \|^2 \geq \| \tau_U(x^k) \|^2 + \| \tau_L(x^k) - \{c^T x^k/(n-r)\}e_L \|^2 \qquad (7)$$

부등식의 우변은 해가 최적정점에 접근됨에 따라서 최적오차가 U와 L 두 집단으로 구분되어 수렴되며, 이 수렴치는 각각 0과 $c^T x^k/(n-r)$으로 구분된다. 이 단계에서는 목적함수가 개선되면서 가능해가 정점방향으로 진행되므로 $\tau(x^k)$는 정점의 기저/비기저의 상태에 따라서 0 또는 $c^T x^k/(n-r)$으로 구분되어 수렴된다.

다음 정리에서는 (7)에 관련되는 조건을 결정하며, 이 결과를 이용함으로써 $\tau_U(x^k)$과 $\tau_L(x^k)$의 각 집단에 속하는 변수들이 두 집단으로 완전히 분할되는 단계, 즉 최적해에 접근된 단계를 확인하고자 한다. 이 단계에서 $r=m+1$이면 최적기저/비기저를 결정할 수 있으며, 이 최적기저를 적용함으로써 유일한 정점 최적해를 구할 수 있다.(한편 $r<m+1$이면 현재 확인되는 최적 기저의 열 번호를 이용하여 원 문제보다 더 축소된 문제로 변환시킬 수 있다[8].) 편의상 $\tau(x^k)$을 $c^Tx^k(>0)$으로 나눈 값으로써 $t(x^k)$을 사용하기로 한다.

$$t_j=\{t(x^k)\}_j=\{\tau(x^k)/c^Tx^k\}_j \qquad (8)$$

정리. 문제(PK2)에서

$$t_j\le 1/(2n) \qquad j=1,\ \cdots,\ r$$
$$t_j\ge(2n-r)/\{2(n-r)n\}, \qquad j=r+1,\ \cdots,\ n$$

이면

$$\|t-e/n\|^2$$
$$\ge\|t_U\|^2+\|t_L-\{1/(n-r)\}e_L\|^2 \qquad (9)$$

이 만족된다.

(증명)

(9)식의 좌변 및 우변은 다음과 같다.

$$\text{좌변}=\sum_{j=1}^{n}t_j^2-1/n$$

$$\text{우변}=\sum_{j=1}^{n}t_j^2-\{2/(n-r)\}\sum_{j=r+1}^{n}t_j+1/(n-r)$$

좌변과 우변을 고려하여 (9)식을 정리하면 다음과 같다.

$$\{2/(n-r)\}\sum_{j=r+1}^{n}t_j-(2n-r)/\{(n-r)n\}\ge 0$$

$$\sum_{j=r+1}^{n}t_j\ge(2n-r)/(2n) \qquad (10)$$

그런데,

$\sum_{j=1}^{r}t_j+\sum_{j=r+1}^{n}t_j=1$이므로

따라서 (10)식은 다음과 같이 주어진다.

$$\sum_{j=1}^{r}t_j\le r/(2n)$$

(i) $t_j\le 1/(2n)$, $j=1,\ \cdots,\ r$

이면 (9)식이 성립된다.

(ii) $t_j\ge(2n-r)/\{2n(n-r)\}$, $j=r+1,\ \cdots,\ n$

이면 (9)식이 성립된다.

이상에서 (i), (ii)를 종합함으로써 증명이 완료된다.

이 정리로부터 다음과 같은 기준을 얻는다. $\tau(x^k)/c^Tx^k$의 성분 가운데서 r개(U)가 $1/(2n)$ 이하의 수치를 나타내고, 나머지 $n-r$개(L)가 $(2n-r)/\{2(n-r)n\}$ 이상의 수치를 나타내면

U에 포함된 $\tau(x^k)/c^Tx^k$는 0에 수렴되며,

L에 포함된 $\tau(x^k)/c^Tx^x$는 $1/(n-r)$에 수렴된다.

이로써, $t_j=\tau(x^k)\}_j/(c^Tx^k)$의 값이 두 가지의 상/하 기준선에 의하여 기저/비기저 구분이 이루어지며 이 두가지 기준 사이에 존재하는 집합이 공집합으로 주어지면, 이 단계에서 정점 최적해에 충분히 접근되어 있어서 이를 확인 판단할 수 있다. 이를 다음과 같이 요약한다.

$$t_j=\{t(x^k)\}_j=\{\tau(x^k)\}_j/(c^Tx^k)$$
$$G_1=1/(2n)$$
$$G_2=(2n-m-1)/\{2(n-m-1)n\}$$
$$U=\{j: t_j\le G_1\}$$
$$L=\{j: t_j\ge G_2\}$$
$$I=\{j: G_1\le t_j\le G_2\}$$

이라 하자. 비퇴화 문제에서 U 및 L에 속하는 원소의 갯수가 각각

$|U| = m+1$

$|L| = n-m-1$

$|I| = 0$

일 때 계산을 종료할 수 있으며, 최적기저변수의 집합은 U이며 최적 비기저변수의 집합은 L이다.

Ⅳ. 실증적 실험

이 실험의 목적은 제안된 종결방법에 대한 검정을 실증적으로 확인하며 최적기저를 구할 때 허용오차의 크기를 구하고자 한다. 사용 컴퓨터로는 Micro-VAX-I(OS : VAX/VMS-2.1)이며, 사용 언어는 FORTRAN 77를 사용하였다.

먼저 예비실험 단계로써, 난수(random number)를 사용하여 다수의 LP문제를 작성한 다음에 일반한계법의 단체법으로 이들을 풀이함으로써 비퇴화인 유일 최적해를 갖는 문제를 70개 선정하였다.

본 실험단계에서는 선택된 문제를 대상으로 하여 본문에서 유도된 기법을 적용하여 최적기저를 판정하는 과정을 실행하여 통계량(계산횟수, 쌍대간격 등)을 구하였다. 이를 서술하면 다음과 같다.

(i) 선형계획법 문제는 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & C^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

(ii) 문제의 계수 c_j, a_{ij}는 Uniform distribution을 따르는 (0, 1) 구간의 난수를 사용하며, b_i는 행렬 A의 i번째 행의 norm 수치로써 다음과 같이 정한다.

$$b_i = \{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\}^{0.5}$$

(iii) 행렬 A의 크기는 15×15, 20×20, 20×40, 30×30, 30×60, 40×40, 40×80으로써, 각 10문제씩 총 70문제를 선정하였다.

(iv) 해의 개선 폭(step length) α의 값은 1국면일때 $\alpha=0.99$, 그리고 2국면일때 $\alpha=0.3$을 적용하며, 1국면의 허용오차는 10^{-30}으로 하며, 2국면의 허용오차는 10^{-3}과 10^{-5}인 두가지 경우를 설정하기로 한다. 그리고 선정된 문제들의 최적 목적함수값이 0인 보장이 없으므로 Todd-Burrell의 방법을 사용하는 Karmarkar기법을 적용하였다.

표에서 최적기저 판단법에 의한 종료시점이 허용오차 10^{-3}인 경우 보다 늦을 경우는 "*"으로 표시하여 놓았으며, c^Tx^*는 최적목적함수값을, $|c^Tx^k - v^k|$는 종료시점의 쌍대간격을 의미한다.

실험결과를 분석하면 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 최적기저 판단에 의한 계산을 종료시켰을 경우 모든 경우에서 정확하게 최저기저를 찾아내었다. 따라서 최저기저 결정 방법에 의한 종결방법이 이 실험의 모든 대상 문제에 있어서 잘 적용되고 있다고 판단할 수 있다.

둘째, 최저기저 결정법에 의해 최적해를 구하는 경우에 종료시점의 쌍대간격과 계산횟수를 검토해 보면, 모든 실험대상 문제에 대하여 허용오차를 10^{-5}으로 한 경우보다는 빨리 최적기저를 찾아내고 종료하였으나, 70문제 중 26문제(39%)가 허용오차를

10^{-3}으로 한 경우보다는 늦게 종료된 것으로 나타났다. 문제의 크기가 커질수록 허용오차 10^{-3}인 경우보다 늦어지는 경향을 나타냈으며, 그 이유는 실험대상 문제의 특성과 관련이 있다고 고찰된다. 그러나 문제의 특성에 따라(예를 들면 어느 기저 변수의 값이 매우 작을 경우) 허용오차가 10^{-3}인 시점에서 얻어진 해를 가지고 정확하게 최적기저를 판단할 수 없는 경우가 발생될 수 있다. 그러나 여기서 제시하는 최적기저 결정법에 의한 경우에는 이러한 어려움은 발생하지 않는다.

[표] 컴퓨터 실험결과의 통계자료(10개 자료의 평균치)

문제 크기	제 1국면 계산 횟수	제2국면 계산 횟수: $\mid c^Tx^k - v^k \mid < \varepsilon$일 때 k의 값		제2국면 계산 횟수: 최적기저 판단법 (제안된 방법)		참고 사항: 최적 목적함수	참고 사항
		$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	종료K값	$\mid c^Tx^k - v^k \mid$ 값	c^Tx^*값	σ값
15×15	18.4	77.1	118.9	68.5	0.00467	3.4893	16
20×20	18.8	91.2	138.9	88.8	0.00263	4.2168	19.5
20×40	20.9	118.3	175.2	107.5	0.00595	7.1636	25
30×30	18.7	117.2	164.6	112.4	0.00302	5.5381	23.5
30×60	22.6	145.6	214.1	140.4	0.00567	8.4470	33.5
40×40	20.2	130.5	201.2	137.6*	0.00130	6.0707	31
40×80	23.8	169.2	246.6	173.6*	0.00131	9.8458	39
				*표시 26회/70회			

V. 결 론

이 연구는 Karmarkar기법에 있어서 해가 정점 최적해에 접근할수록 해의 개선 방향 벡터의 성분들이 최적기저와 최적비기저로 구분되어 가면서 각각 일정한 값으로 수렴하는 특성을 이용하여 알고리즘의 종료 이전에 최적기저를 얻을 수 있는 종결조건을 제시하였다.

정점 최적해에 접근되는 단계 중에서 현재해 x^k, 목적함수 c^Tx^k, 변환 공간의 개선방향에 의하여 주어지는 조건이 만족될 때 최적기저를 결정할 수 있다. 이를 결정하기 위해서는 개선방향의 단순 비교작업만 필요하므로 제시된 최적기저 결정조건은 알고리즘의 복잡도(Complexity)를 증가시키지 않는다. 유일한 최적해를 포함하는 문제에 대해서는 기법의 계산 수행 중에 자체적으로 종결 여부를 판단할 수가 있으므로 계산 효율이 상대적으로 향상될 수 있다.

여기서의 연구결과와 관련하여 다음과 같은 추후 연구과제를 고려할 수 있다고 판단된다.

- 경로추적 기법(Path-following method)에 있어서 최적기저 판단방법의 연구
- Karmarkar기법에서 다수의 (비정점)최적해를 포함하는 문제의 경우에 대한 최적 기저(또는 최적 비기저)를 식별하는 연구

－參考文獻－

[1] 김 병재, "Karmarkar 기법에 있어서 최적기저 결정에 관한 연구", 박사학위논문, 서울대학교, 1990.

[2] 정성진, 이창훈, "수정된 Karmarkar 기법과 이의 효율성", 「대한산업공학회지」, 13권, 1호(1987), pp.53 ~60.

[3] Adler, I., Karmarkar, N., Resende, M.G.C., and Veiga, G., *An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming,* Report ORC86-8, Operations Research Center, University of California(Berkeley, CA), 1986.

[4] Asic, M.D., Kovacevic-vujcic, V.V. and Radosavljevic-Nikolic, M.D., "Asymptotic behaviour of Karmarkar's method for linear programming", *Mathematical Programming,* Vol.46(1990), pp.173 ~190.

[5] Gill, P.E., Murray, W., Saunders, M.A., Tomlin, J.A., and Wright, M.H., "On projected Newton barrier Methods for linear programming and an equivalence to Karmarkar's projective method", *Mathematical Programming,* Vol. 36(1986), pp.183~209.

[6] Karmakar, N., "A new polynomial time algorithm for linear programming", *Combinatorica,* Vol.4 (1984), pp.373~395.

[7] Kojima, M., "Determining basic variables of optimal solutions in Karmarkar's new LP algorithm", *Algorithmica,* Vol.1(1986), pp.499~515.

[8] Megiddo, N. and Shub, M., "Boundary behavior of interior point algorithms for linear programming", *Mathematics of Operations Research,* Vol.14(1989), pp.97~146.

[9] Todd and Burrell, B.P., "An extention of Karmarkar's algorithm for linear programming using dual variables", *Algorithmica,* Vol.1(1986), pp.409~424.

[10] Ye, Y., "A 'Build-down' Scheme for Linear Programming", *Mathematical Programming,* Vol.46 (1990), pp.61~72.