Journal of the Korean
OR/MS Society
Vol. 16, No. 1, June., 1991

마코프 누적 프로세스에서의 확률적 콘벡스성과 그 응용*

윤복식**

(Stochastic convexity in Markov additive processes and its applications)

Abstract

Stochastic convexity(concavity) of a stochastic process is a very useful concept for various stochastic optimization problems. In this study we first establish stochastic convexity of a certain class of Markov additive processes through probabilistic construction based on the sample path approach. A Markov additive process is obtained by integrating a functional of the underlying Mardov process with respect to time, and its stochastic convexity can be utilized to provide efficient methods for optimal design or optimal operation schedule wide range of stochastic systems. We also clarify the conditions for stochatic monotonicity of the Markov process. From the result it is shown that stachastic convexity can be used for the analysis of probabilistic models based on birth and death processes, which have very wide application area. Finally we demonstrate the validity and usefulness of the theoretical results by developing efficient methods for the optimal replacement scheduling based on the stochastic convexity property.

*본 연구는 1990년도 한국과학재단 연구비 지원에 의한 결과임(과제 번호 : 903-0915-014-1)

**홍익대학교 기초과학과

1. 서론

대기시스팀(queueing system)과 같은 확률적 시스팀(stochastic system)에서 우리의 관심이 되는 확률량이 외부에서 조정할 수 있는 매개변수의 영향을 받게 될 경우가 많다. 예를 들어 대기 시스팀에서 서비스를 받기위해 기다리는 대기시간은 서비스율이나 도착률의 영향을 받게된다. 일반적으로 매개변수를 θ라 하면 관심 대상이 되는 확률변수를 $X(\theta)$로 표현할 수 있을 것이다. 정확히 말하면 실제로 θ는 $X(\theta)$의 확률분포함수 $F(x,\theta)$를 결정하는 매개변수가 되는데 이와같이 X를 θ의 함수로 표현하는 것이 분석에 편리할 때가 많다.

θ가 속한 적절한 매개변수의 공간을 $\Theta \subseteq R$(또는 $N^+=\{0,1,2,...\}$) 인 콘벡스 집합(즉 단일범위)이라 하자. 일반적으로 매개변수 $\theta \in \Theta$를 갖는 확률적 시스팀에서 우리의 관심이 어떠한 확률량 $\{X(\theta), \theta \in \Theta\}$에 있다고 할때, $X(\theta)$가 θ에 따라 변해가는 양태를 분석하면 설정한 목표에 가장 적당한 θ의 값을 정할 수가 있게 될 것이다. 좀더 구체적으로 $\{X(\theta)\}$의 상태 공간 $S \subseteq R$(또는 N^+)에서 정의된 비용함수 $f: S \rightarrow R$ 가 주어졌을때 $Ef(X(\theta))$를 θ에 대해 최적화하는 문제를 고려해 보자. 이때 f의 단조증가나 감소와 같은 1차적 성질과 콘벡스나 콘케이브 성질과 같은 2차적 성질이 목적함수 $Ef(X(\theta))$의 성질로 유지될 수 있다면 최적화 문제에 큰 도움을 줄 수 있을 것이다. 이 생각을 구체화 하기 위해 다음과 같은 개념을 정의해 보자.

(정의 1.1) 모든 증가함수 f에 대해 $Ef(X(\theta))$가 θ의 증가함수이면 $\{X(\theta), \theta \in \Theta\}$는 SI(stochastically increasing)이다.

(정의 1.2) 모든 증가 콘벡스(콘케이브) 함수 f에 대해 $Ef(X(\theta))$가 θ의 증가 콘벡스(콘케이브) 함수이면 $\{X(\theta), \theta \in \Theta\}$는 SICX(stochastically increasing convex)(SICV : stochastically increasing concave)이다.

확률변수들간의 크기 비교하는 stochastic ordering을 확장한 개념인 SI와 같은 확률적인 단조성은 이미 대기이론이나 신뢰성이론에서 시스팀의 디자인이나 콘트롤에 많이 응용되어 왔다 (Ross(1983) 8장과 Stoyan(1983) 참조). 이에 덧붙여 확률적인 모형에서 최적화를 손쉽게 수행하기 위해서는 2차적인 충분조건인 콘벡스성의 확립이 자연적으로 필요하게 되는 데(정의 1.2)는 실용적 필요에 의한 자연스러운 개념이나 이에 입각하여 콘벡스성을 확립하기는 쉽지 않다. 2차적 성질을 특정 시스팀 별로 규명해 보려는 시도가 근래에 많이 진행되었으나 전통적인 대수적, 해석적인 접근 방법으로는, 비교적 간단한 시스팀에서(정의 1.2)의 특수한 경우인 $EX(\theta)$ 혹은 $EX^2(\theta)$의 콘벡스성을 확립하기에도 매우 번거로운 계산 및 유도과정이 동원되어야 하므로 큰 진전은 없었다. 예를들어 (정의 1.2)의 특수한 경우인 M/M/c 대기 시스팀의 평균고객의 수 $EN(\rho)$의 부하율(load factor) ρ에 대한 콘벡스성을 보이기 위해 Grassman(1983), Lee와 Cohen(1983)은 매우 번거로운 과정을 수행하였다.

(정의 1.2)의 개념의 적용에 있어서 또 하나의 난점은 확률적인 연산(convolution, mixture, composition 등)에 대해 닫혀있는 지도 규명하기가 어렵다는 것을 들 수 있다. Shaked와 Shanthikumar(1988a)는 이러한 난점을 극복하고 다양한 확률적인 단조성과 콘벡스성을 비교적 간단하게 도출해낼 수있는 샘플경로 콘벡스성을 제안하고 샘플경로접근법(sample path approach)에 의한 구축적인 증명방법(constructive proof)을 소개하였다.

또한 Shaked와 Shanthikumar(1988b)에서는 매개변수가 시간인 경우의 스토캐스틱 프로세스에서의 확률적인 콘벡스성에 대해 연구하고 다양한 응용가능성을 예시하였다. 또한 Shaked와 Shanthikumar(1988c,1990)에서는 여러가지 이론적 측면에서의 연구가 수행되었고 Shanthikumar와 Yao(1989)에서 대기시스팀에서의 확률적 콘벡스성의 실용적 측면이 광범위하게 언급되었다. 확률적인 단조성이 확률적 시스팀의 근사해법과 범위한정 기법에 매우 유용했던 것처럼 (Stoyan, 1983) 확률적 콘벡스성도 스토캐스틱 프로세스에서의 계산적 접근 방법이나, 근사적 접근방법, 범위한정 기법 등에 효과적으로 사용될 수 있다. 본 연구에서는 샘플경로 접근법에 근거한 이들 연구를 기초로하여 성능 평가(performance evaluation)나 보수(maintenance), 기타 스케쥴링 문제에 응용가능성이 많은 마코프 누적 프로세스(Markov additive process)에서의 확률적 콘벡스성에 관한 새로운 사실들을 이론적으로 정립하고, 구체적인 응용방법을 예시하고자 한다. 마코프 누적 프로세스의 콘벡스성을 확립하기 위한 토대로써 마코프 프로세스의 단조성이 먼저 확립되어야 하는데 이것에 관한 연구도 병행된다.

무작위적 특성을 가지고 시간에 따라 동적으로 변해가는 어떤 시스팀의 상태를 나타내는 스토캐스틱 프로세스 $\{X(t),t\geq 0\}$를 고려해보자. 시간 t에서 시스템의 상태가 x일 때 f(x)의 비용이 소용된다면 $[0,t]$ 사이에 소요되는 총비용은

$$Y(t)=\int_0^t f(X(u))\,du \tag{1}$$

과 같이 표현될 것이다. 만약 $\{X(t),t\geq 0\}$가 마코프 프로세스라면 $\{Y(t),t\geq 0\}$은 $\{X(t),t\geq 0\}$에서 유도된 마코프 누적 프로세스가 된다(Cinlar(1972a,b)). Y(t)가 의미하는 것은 시간 t까지의 누적된 비용이므로 그 비용을 최소화하는 형태의 스케쥴링 문제에 응용될 수 있어 $\{Y(t),t\geq 0\}$의 확률적 콘벡스성을 파악하면 최적 스케쥴링의 문제를 훨씬 쉽게 해결할 수 있을 것이다. 실제로 마코프 누적 프로세스는 마코프 프로세스로 모형화 할 수있는 광범위한 확률적 시스팀에서의 성능에 관련된 측도로 사용될수 있기 때문에 본 연구의 실용적 가치는 매우 높다고 생각된다. 예를들면 fault-tolerant 콤퓨터 시스팀에서의 성능측도(Sumita et al.,1987), software reliability 분야에서의 실험 중단 시점(Ross,1987, Sumita와 Shanthikumar,1986), Maintenace 이론에서의 최적 교체 주기(Barlow와 Proschan,1975) 등의 문제에 직접적으로 적용될 수 있다. 결론적으로 본 연구는 확률적 콘벡스성에 관한 이론적인 기여는 물론 성능 평가나 최적 스케쥴링 문제에 매우 유용한 방법론을 제시할 수 있을 것이다.

이를 위해 우선 2.1절에서는 이론적 배경으로서 확률적 단조성, 확률적 콘벡스성의 개념과 이를 확립하기레 유용한 증명기법이 소개되고 2.2절에는 마코프 프로세스에서의 확률적 단조성이 연구된다. 3장에서는 마코프 누적 프로세스에서의 확률적 콘벡

스성의 조건이 논하여지고 4장에서는 3장의 조건에 맞는 마코프 누적프로세스로 표현될 수 있는 2가지 형태의 스케쥴링 문제들이 정형화되고 이들의 최적해를 구하는 알고리듬이 제시된다. 또한 신뢰도 이론에서의 최적 대체 주기를 결정하는 문제가 예로서 주어지며, 마지막에 5장에서는 결론으로서 향후 연구 방향과 기타 여러 분야에서의 적용 가능성에 대해 언급된다.

본 논문에서 벡터는 진한 소문자로 나타내되 열벡터를 의미하며 행벡터의 경우에는 전치로써 표현한다. 기타 특수한 부호는 처음 나타날 때 설명이 될 것이다.

2. 확률적 단조성과 콘벡스성

2.1. 확률적 단조성(stochastic montonocity), 확률적 콘벡스성의 이론적 배경－샘플 경로 접근법(sample path approach)

우선 SI에 대해서는 다음과 같은 샘플경로에 연관된 사실이 알려져 있다.

(정리 2.1) 만약 $\{X(\theta),\theta\in\Theta\}$가 SI이면, 모든 $\theta\in\Theta$에 대해

(i) $Z(\theta)\sim x(\theta)$이고

(ii) 만약 $\theta_1\le\theta_2$이면, $Z(\theta_1)\le Z(\theta_2)$ a.s.

를 만족하는 공통의 확률공간(common probability space)에서 정의된 확률 변수들 $\{Z(\theta),\theta\in\Theta\}$가 존재한다. (이때 ~ : stochastically equivalent, 즉 "같은 분포를 갖는", a.s. : almost surely)

(증명) $P\{X(\theta)>X\}=F^c(x,\theta)$이고, U는 uniform(0,1)의 확률변수라 하자. $(F^c)^{-1}(u,\theta)\equiv\inf\{x : F^c(x,\theta)\le u\}$라고 정의 하면 확률변수

$$Z(\theta)=(F^c)^{-1}(U,\theta),\ \theta\in\Theta \tag{1}$$

이 정리를 만족함을 알 수 있다. (cf.Kamae et.al. (1977)), Th1 참조.)

이와 유사하게 샘플경로에서의 확률적인 증가 콘벡스성, 콘케이브성을 각각 SICX(sp)(stochastically increasing and convex in sample path sense)와 SICV(sp)(stochastically increasing and concave in sample path sense)로 표현하면, 이들을 다음과 같이 정의할 수 있다.

(정의 2.1) $\theta_1\le\theta_2\le\theta_3\le\theta_4$이고 $\theta_2-\theta_1=\theta_4-\theta_3$를 만족하는 모든 $\theta i\in\Theta$,i=1,2,3,4에 대해 아래의 조건 (i), (ii),(iii)를 만족하는 4개의 확률변수 Zi, i=1,2,3,4,가 동일한 확률공간에서 정의될 수 있으면 $\{X(\theta),\theta\in\Theta\}$를 SICX(sp)라고 말하고, (i),(iv),(v)를 만족하는 4개의 확률변수 Zi,i=1,2,3,4,가 동일한 확률공간에서 정의될 수 있으면 $\{X(\theta),\theta\in\Theta\}$를 SICV(sp)라고 말한다.

(i) $Z_i\sim X(\theta_i)$, i=1,2,3,4,

(ii) $Z_2-Z_1\le Z_4-Z_3$ a.s.

(iii) $\max(Z_1,Z_2,Z_3)\le Z_4$ a.s

(iv) $Z_2-Z_1\ge Z_4-Z_3$ a.s.

(v) $Z_1\le\min(Z_2,Z_3,Z_4)$ a.s.

(참고) 위의 정의는 실수 콘벡스(콘케이브) 증가

함수의 증가율이 점점 커지는(작아지는) 성질 이용한 정의임을 알 수 있다. 즉 조건 (ii),(iv)는 각각 콘벡스성과 콘케이브성을 보장해주고 있다. (iii), (v)는 증가성을 부여해 준다.

SICX(sp)는 SICX보다 강한 확률적 성질이기 때문에 $\{X(\theta),\theta\in\Theta\}$가 SICX(sp)의 성질을 가지면 자동적으로 SICX의 성질을 갖게 된다. (Shaked & Shanthikumar(1988a),Th3.6) 따라서 $\{X(\theta),\theta\in\Theta\}$가 SICX 임을 보이기위해 SICX(sp)임을 보이면 충분한데, 이는 (정의 2.1)의 조건을 만족시키는 확률변수들을 만들어 내는 구축적인 방법에 의해 비교적 간단하게 행해질 수 있다. 더우기 SICX(sp)는 SICX가 갖지못하는 매우 유용한 보존적 특성(예를 들면 convolution이나 mixture에 닫혀있는 것, Shaked & Shanthikumar (1988a)참조.) 들을 가지고 있기 때문에 많은 경우에 보다 편리하게 사용될 수 있는 개념이다.

2.2 마코프 프로세스에서의 확률적 단조성

본 절에서는 θ가 시간일 때에 한정하여 매우 광범위하게 적용되고 있는 마코프 프로세스의 시간에 따른 단조성이나 콘벡스성에 대해 알아 보자. 우리가 고려할 마코프 프로세스는 상태공간(stste space) S가 최소의 원소를 0으로 갖고 부분 순서화된(partially ordered) 공간일 경우인데, $S\in N^+=\{0,1,2,\ldots\}$인 경우나 양의 실수($R^+$)인 경우를 포함하므로 거의 모든 실제적인 문제에 적용될 것이다. 시간은 연속시간 혹은 이산시간인 경우에 모두 고려되는데 이산시간의 마코프 프로세스를 마코프 체인이라고 부르기로 한다. 마코프 체인에 대해서는 다음과 같은 단조성의 충분 조건을 발견할 수 있다.

(정리 2.2) 마코프 체인 $\{X_n,n\in N^+\}$에서 $X_o=0$ a.s 이고, 모든 $x\in S$ 에 대해 $P\{X_n>x \mid X_{n-1}=i\}$가 i의 증가함수이면 $\{X_n,n\in N^+\}$는 (n에 대해) SI 에다.

(증명) Stoyan,1983 p64 (Th 4.2.4a) 참조

연속시간의 마코프 프로세스의 경우에도 이와 유사하게 다음과 같은 단조성의 충분 조건을 확립할 수 있다.

(정리 2.3) 마코프 프로세스 $\{X(t),t\geq 0\}$에서 모든 $x\in S$ 에 대해 $P\{X(t)>x \mid X(o)=i\}$가 i의 증가함수이면, $X(o)=o$ a.s. 일때 $\{X(t),t\geq 0\}$는 (t에 대해) SI이다.

(증명) $s<t$ 에 대해

$$
\begin{aligned}
&P\{X(t)>x \mid X(0)=0\}\\
&=\sum_i P\{X(t)>0x \mid X(t-s)=i\}\\
&\quad P\{X(t-s)=i \mid X(0)=0\}\\
&\geq \sum_i P\{X(t)>x \mid X(t-s)=0\}\\
&\quad P\{X(t-s)=i \mid X(0)=0\}\\
&=P\{X(t)>x \mid X(t-s)=0\}\\
&\quad \sum_i P\{X(t-s)=i \mid X(0)=0\}
\end{aligned}
$$

$$=P\{X(s)>x \mid X(0)=0\}$$

(**정리 2.3**)의 조건을 만족하는 마코프 프로세스 중에서 대표적인 것으로 대기이론등에 매우 광범위하게 응용되는 birth-death process를 들수 있다.

(**따름정리 2.4**) $X(0)=0$ a.s일 때 birth-death process $\{X(t),t\geq 0\}$는 (t에 대해) SI이다.

(**증명**) Ross(1983), p257 proposition 8.2.3에 의해 모든 $x\in S$ 에 대해 $P\{X(t)>x \mid X(o)=i\}$가 i의 증가함수 임을 알 수 있다.

마코프 체인 단조성은 마코프 누적 프로세스의 확률적 콘벡스성을 확립하는 기초가 된다.

3. 마코프 누적 프로세스에서의 확률적 콘벡스성

앞에서 언급한 바와 같이 시스팀의 성능에 관련된 척도로서 마코프누적 프로세스는 매우 유용한데 실제 모형화에 있어서 계산상의 난점때문에 이용에 어려움이 많다. 시작 시점부터 t까지의 마코프 프로세스의 과거 역사가 모두 고려되어야 하므로 이에 포함된 계산량이 매우 많게 되는 데 최적화 시점의 추적에 상당히 효율적인 방법을 찾아내는 이론적인 근거로서 확률적 콘벡스성은 특히 중요하다.

콘벡스 함수의 특성은 변화율이 점점 증가한다는 것이므로 (정리 2.1)을 이용하여 다음과 같은 유용한 결과를 얻을 수 있다.

(**정리 3.1**) 만약$\{X(t),t\geq 0\}$이 SI 이면 마코프 누적프로세스 (1.1)은 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

(a) 만약 f가 증가함수이면, $\{Y(t),t\geq 0\}$은 SICX(sp) 이다.

(b) 만약 f가 감소함수이면, $\{Y(t),t\geq 0\}$은 SICV(sp) 이다.

(**증명**) 우선(a)의 경우에 $0\leq t_1\leq t_2\leq t_3\leq t_4$이고 $t_3-t_1=t_4-t_2$ 를 만족하는 t_i, $i=1, 2, 3, 4$를 선택하자. $\{X(t),t\geq 0\}$이 SI이므로 (정리 2.1)에 따라,

(i) 모든 $t\geq 0$ 에 대해 $Z(t)\sim X(t)$이고

(ii) $0\leq u\leq t_2-t_1$인 모든 u에 대해 $Z(t_1+u)=Z(t_3+u)$ a.s.

를 만족하는 마코프 체인 $\{Z(t),t\geq 0\}$이 존재한다. 이제

$$\underline{Y}(t)=\int_0^t f(Z(u))\,du \qquad (1)$$

로 놓으면

$$\underline{Y}(t_i)\sim Y(t_i),\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4, \qquad (1)$$

$$\underline{Y}(t_1)+\underline{Y}(t_4)\geq \underline{Y}(t_2)+\underline{Y}(t_3)\ \text{a.s.} \qquad (3)$$

$$\max\{\underline{Y}(t_i),\ i=1,\ 2,\ 3)\leq \underline{Y}(t_4) \qquad (4)$$

이 됨을 알 수 있으므로 (정의 2.2)에 의해 (a)가 성립함을 알 수 있다. (b)의 경우도 이와 유사하게 증명할 수 있다.

이 정리는 2.2절에서 언급한 마코프 프로세스의 단조성의 충분 조건과 결합하여 매우 광범위하게 응용될 수 있다. 그중에서 최적 대체 주기 결정에 관한 문제에 적용하여 구체적인 최적화 방법을 다음장에서 찾아 본다.

4. 최적 스케쥴링 문제에의 적용

4.1 최적 대체 주기 결정의 문제

어떤 기계의 작동 상태에 따라 가동비용(수리, 유지 비용 포함)과 생산율이 다른 경우를 고려해보자. 이때 작동 상태의 변화는 gracefully degrading system과 같은 fault-tolerant design에 의해 일부 부품의 고장에 따른 기계의 생산 능력의 변동에서 기인할 수도 있고(Sumita, 1987) 여러번의 수리에 의한 기계 성능의 하락에 의한 것일 수도 있다 (Stadje, 1990).

$X(t)\in\{0, 1, 2, \cdots, M\}$를 시스템의 시간 t에서의 작동 상태라고 하고 $X(t)$의 값이 클수록 시스템의 작동 조건이 악화되는 것을 의미한다고 하자.

예를 들면 시스템이 M개의 동일한 부품을 사용한 병렬구조일때 고장이 난 부품의 갯수를 시스템의 상태로 표현할 수 있을 것이다. 시스템이 완전히 대체되는 시점 T까지는 부분품의 고장이나 수리를 통해 시스템의 상태가 birth-death 프로세스형태로 변한다고 하자. 그때의 가동 비용과 생산 수입을 각각 $c(X(t))$, $r(X(t))$라고 하고 시스템대체 비용을 D라고 할때, 최초대체 시점 T까지의 이익은

$$R(T)=\int_0^T r(X(u)\, du-\int_0^T c(X(u))\, du-D \quad (1)$$

으로 표현되고 $c(\cdot)$, $r(\cdot)$이 적분가능한 0보다 크거나 같은 함수라고 할때 기대 이익 $E[R(T)]$가 존재하고

$$E[R(T)]=\int_0^T E[r(X(u)]\, du-\int_0^T E[c(X(u)\, du]-D \quad (2)$$

과 같이 표현될 수 있다.

위의 병렬 시스템의 예에서와 같이 한 부품이 고장이 났을 경우 나머지 부품들은 작동을 계속한다면 고장난 부품의 갯수가 적을수록 생산량은 많아질 것이고, 수리 비용은 적어질 것이다. 즉 비용은 증가함수, 수입은 감소함수로 가정한다면 현실적인 고려에서 타당할 것이다. 이를 가정할 때 2장 및 3장의 결과를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

(**정리 4.1**) $X(0)=0$ a.s.이고, c를 증가 함수, r을 감소 함수라고 할 때 $E[R(T)]$는 T의 콘케이브 함수이다.

(증명) 우선 $\{X(t),t\geq 0\}$는 birth-death process이므로 $X(0)=0$ a.s. 일때 SI이다. 주어진 조건을 가지고 (정리 3.1)을 적용하면

$$\{A(T)=\int_0^T r(X(u))\, du,\ T\geq 0\}\text{은 SICV(sp)}$$

이고,

$$\{B(T)=\int_0^T r(X(u))\, du,\ T\geq 0\}\text{은 SICX((sp)}$$

임을 알 수 있다.

따라서 $E[A(T)]$는 증가 콘케이브 함수이고, $E[B(T)]$는 증가 콘벡스 함수이며 따라서 전체 $E[R(T)]$는 콘케이브 함수이다.

최적 대체 시점을 설정하는 기준으로 두 가지를 생각해 볼 수 있다. 즉 대체 시점 T까지의 평균 이익 $E[R(T)]$를 최대화 시키는 관점과, 시스템의 장기적인 평균 수익률 $E[R(T)]/T$를 최대화 시키는 관점이 있을 수 있다. 전자는 대체된응 시스템이 동

일하지 않을 때(예를 들면 1화 사용후에 보다 진보된 다른 시스팀으로 대체될 때) 특히 유효한 기준이며, 후자는 동일한 시스팀으로 계속 대체되어 T를 주기로하는 재생과정(renewal process)을 적용할 수 있을 때 적용할 수 있는 기준이다. 우선 보다 효율적인 최적화 방법을 찾아 낼 수 있는 첫번째 기준을 적용해 보고 다음에 두번째 기준에 최적화 방법을 발견한다.

4.2 E[R(T)]의 최대화

E[R(T)]를 최대화하는 문제는 콘벡스함수 E[R(T)]의 최대점을 추적함으로써 비교적 간단히 구할 수 있다. $d(x)=r(x)-c(x),\ x\in S$ 로 놓고 식(2)를 다르게 쓰면

$$\begin{aligned} E[R(T)]+D &= E\int_0^T d(X(u))du \\ &= \int_0^T E[d(X(u))]du \\ &= \int_0^T \sum_X d(x)P\{X(u)=x\}du \end{aligned}$$

따라서 $h(T)=E[R(T)]+D$, $\mathbf{p}$를 마코프체인의 초기 분포(즉 $p(x)=P\{X(0)=X\}$), $P(t)$를 시간 t에서의 전이함수행렬(즉 $P(t)_{ij}=P\{X(t)=j \mid X(0)=i\}$)라 하면, 벡터 표기법을 사용하여

$$h(T)=\int_0^T p^T P(u)\, d\, du \tag{3}$$

을 얻고 이를 미분하여

$$h'(T)=\mathbf{p}^T P(T)\, d \tag{4}$$

실제로 (4)의 P(T)를 계산하는 것이 힘이 들므로 YOON & Shanthikumar(1989)의 결과를 이용하여

$$h'(T)\cong v(T)\equiv \mathbf{p}^T \underline{P}^k d, \qquad k=[\lambda T] \tag{5}$$

와 같이 근사 계산을 할 수 있다(이때 [x]는 x에 가장 가까운 정수). 여기서 $\underline{P}$는 Yoon & Shanthikumar(1989)에 제시된 방법에 따라 적절히 취하면 되는 데 여기서는 주어진 마코프 체인 유한한 상태 공간을 가져 당연히 단일화가 가능하게 되므로 계산상 가장 효율적인 내부 단일화(internal uniformization)기법을 사용하여

$$\underline{P}=I+(1/\lambda)R \tag{6}$$

로 취한다. 이때 I는 단위행렬, R은 마코프체인의 generator이고 $\lambda\ge \sup_i\{-R_{ii}\}$ 를 만족하여야 한다.

이제 (5)를 이용하여 v=0에 되는 점을 추적하면 (정리 4.1)에 의해 최대점이 근사적으로 구해 진다. 이 근사점은 k를 충분히 크게 하면 매우 실제 최대점에 근접하게 되는 데, 효과적인 계산을 위해 k를 2의 멱수로 잡아야 하고 k가 2^{10} 이상이면 실용적으로 충분하다 (Yoon & Shanthikumar(1989) 참조). 이때 h'의 단조성에 근거하여 sequential search를 하되 건너 뛰는 시간 단위를 2단계로 조정하여 계산상의 효율성을 높일 수 있는 데 이를 구체적으로 나타내면 아래의 알고리듬과 같다.

〈Algorithm Search1〉

· 0.λ를 2의 멱수로 충분히 크게 잡는다(2^{10} 이상). 대체시간의 최대 한계(=U)를 설정하여 MAX=$[\log_2(\lambda U)]$로 놓는다.

1. i=0,1,2,...,MAX로 증가시키면서 $t=2^i/\lambda$ 에 대해 (4)를 이용한여 h'(t)를 계산하고 h'(t)가 최초로 0보다 작거나 같게되는 i를 구하여 UB 라고 놓는다.

2. 만약 UB=0 이면 최적시점 $t^*=2^{UB}/\lambda$를 내주

고 멈춘다. 그렇지 않으면 3으로 간다.

3. $i=2^{UB-1}$, $2^{UB-1}+1,\ldots, 2^{UB}$로 증가시키면서 $t=2^i/\lambda$에 대해 (4)를 이용하여 $h'(t)$를 계산하고 $h'(t)$가 최초로 0보다 작거나 같게된는 i를 구하여 i^*라고 놓는다. 최적시점 $t^*=i^*/\lambda$를 내주고 멈춘다.

이 방법을 사용하여 최적점을 구하는 예를 보기로 하자.

(예)

$\{X(t),t\geq 0\}$를 상태공간 $S=\{1,2,3,4,5\}$를 갖고, generator

$$R=\begin{matrix} -5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{matrix}$$

인 birth−death 과정이라고 하자. 초기 분포를 $P^T=(10000)$, $r(x)=e^{-x}$, $c(x)=\log(x)$라고 할 때 (D는 임의의 값) :

$k=2^{10}$일때 최소점 $t=94/2^{10}=0.091796875$

$k=2^{12}$일때 최소점 $t=376/2^{12}=0.091796875$

$k=2^{15}$일때 최소점 $t=3007/2^{15}=0.091766357$

여기서 k가 증가함에 따라 정확성이 증가하는 것을 관찰할 수 있다.

아래 (그림 4.1)은 일때 t에 관한 $k=2^{10}$ 로 놓고 $v(t)$로 근사화한 $h'(t)$의 변화를 보여 주는 데 h'의 단조 감소성을 확인할 수 있다.

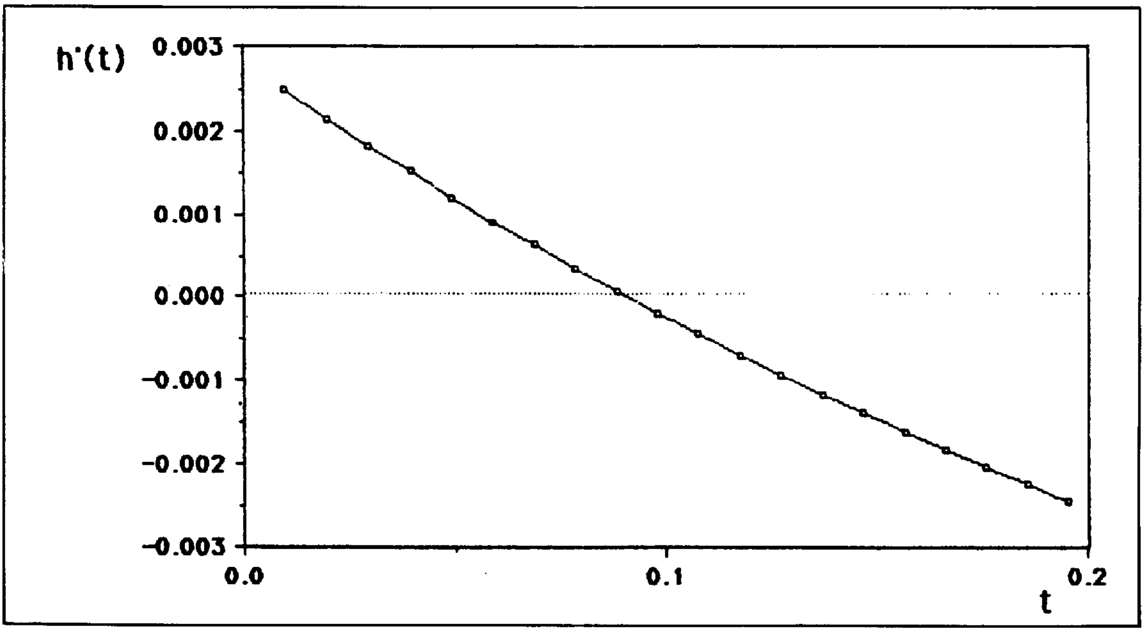

그림 4.1. h′(t)의 변화

4.3 E[R(T)]/T의 최대화

이를 위해서 우선 다음과 같은 사실을 확립하자.

(**정리 4.2**) $t>0$에서 $f(t)$가 모든 구간에서 미분가능하고 연속인 도함수를 갖는 콘벡스(콘케이브) 함수일때 $f(t)/t$ 는 단조함수이거나, $f(t)/t=f'(t)$인 점에서 최소값(최대값)을 갖는다.

(증명)

$g(t)=f(t)/t$라고 할 때, $g'(t)=(f'(t)t-f(t))/t^2$이므로 분자만을 고려하여 아래(렘마4.1)를 적용하면, g'는(i) 항상 음이거나, (ii) 항상 양이거나, (iii) 음(또는 0)에서 시작하여 t가 증가함에 따라 양(또는 0)으로 변해갈 것이다. (i), (ii)의 경우는 g가 단조함수임을 의미하고 (iii)의 경우는 g'의 연속성에 따라 $g'(t)=0$이 되는 점, 즉 $f(t)/t=f'(t)$을 만족하는 점이 적어도 하나 존재하고 그점이 바로 최소점임을 의미 한다.

(**렘마 4.1**) f가 (정리 4.2)에서 주어진 조건을 만족할 때 만약 t_1에서

$$f'(t_1)>f(t_1)/t_1 \tag{7}$$

이라면, 모든 $t\geq t_1$에서 $f'(t)>f(t)/t$이다. 마찬가지로 만약 한점 to에서

$$f'(to)<f(to)/to \tag{8}$$

이라면, 모든 $0<t\leq to$에서 $f'(t)<f(t)/t$ 이다.

(증명)

우선 f가 전 구간에서 미분가능하다고 가정하고 $t_2>t_1$라 하자.

$$f(t_2)=f(t_1)+\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

로 표현하면, f의 콘벡스성에 의해 f'는 증가함수이므로

$$f'(t_1)+f'(t_1)(t_2-t_1) \leq f(t_2)\leq f(t_1)+f'(t_2)(t_2-t_1)$$

이를 정리하면

$$f'(t_1)\leq (f(t_2)-f(t_1))/(t_2-t_1)\leq f'(t_2). \tag{9}$$

이제

$$f(t_2)=f(t_1)t_1/t_1+(f(t_2)-f(t_1))(t_2-t_1)/(t_2-t_1) \tag{10}$$

이므로 주어진 조건 (7)과와 결과식 (9)의 첫번째 부등식에 의해

$$f(t_2)/t_1<f',(t_1)\leq (f(t_2)-f(t_1))/(t_2-t_1). \tag{11}$$

(11)을 (10)에 대입하고 (9)의 두번째 부등식 적용하여 첫번째 결론

$$f(t_2)<f'(t_2)\,t_2$$

를 얻는다. 두번째 결론은 조건 (7) 대신 (8)을 사용하여 똑같은 과정으로 증명된다.

(보충설명)

(i) f가 미분이 불가능한 점들이 있을 때에도 구간별로 분리하여 처리하면 (렘마 4.1)의 결과는 성립한다. 이 경우에 만약 미분 불가능점 to를 중심으로 하여 g'가 음에서 양으로 바뀌었으면 to가 최소점이 된다.

(ii) $g'=0$ 이 되는 점이 콘벡스 구간으로 나타날 경우가 있다. 예를 들면 $f(t)=at$와 같은 경우에 $g(t)=a$가 되므로 구간내 어느점을 취하든 최소점이 된다.

이제 (정리 4.2)를 이용하여 E[R(T)]/T 의 최대점을 구하는 방법을 생각해보자. f(T)=E[R(T)]라고 하면 f(T)=h(T)−D 로 쓸 수 있으므로 f(T)와 f'(T)는 각각 (3)과 (4)에서 구할 수 있다. 이때 (5)를 사용하여 근사화를 하면

$$f'(T) \cong v(T), \qquad (12)$$

$$f'(T) \cong (1/\lambda) \sum_{n-1}^{k} P^{T} \underline{P}^{n} r - D, \qquad k=\lceil \lambda t \rceil \quad (13)$$

(13)식에서 합을 얻기 위해 $\underline{P}^n$, n=1,...,k를 모두 계산할 필요가 있으므로 순차적인 행렬의 곱의 계산이 요구되어 4.2절에서와 같은 효률적인 추적방법을 사용할 수 없고 단순한 순차적 추적에 의해 f'(t)가 f(t)/t보다 작거나 같게 되는 최초의 시점을 찾음으로써 최대점이 찾아 진다. 이를 구체적으로 나타내면

〈Algorithm Search2〉

0.λ를 2의 멱수로 충분히 크게 잡는다(2^{10} 정도). 대체시간의 최대 한계(=U)를 설정하여 MAX=λU 로 놓는다.

1. i=1, 2, …, MAX로 증가시키면서 t=i/λ 에 대해 (12),(13)을 이용하여 f'(t), f(t)를 계산하고 f'(t)−f(t)/t가 최초로 음이되는 i를 구하여 UB라고 놓는다.

2. 최적 t*=UB/λ 를 내주고 멈춘다.

(예)

(4.2)의 예에서 D=0.001로 고정시켰을 때 E[R(T)]/T를 최소화하는 시점을 위의 알고리듬을 사용하여 구하여 보면

k=2^{10} 일때 최소점 t=326 / 2^{10}=0.3184

k=2^{12} 일때 최소점 t=1302 / 2^{12}=0.3179

k=2^{12}일때 (12), (13)을 사용하여 f'(t)와 f(t)/t를 구하여 그래프로 나타내면 (그림 4.2)와 같다. 이 그림에서 f(t)/t의 최대점을 f'(t)가 관통하는 것과 (렘마 4.1)의 사실을 확인할 수 있다.

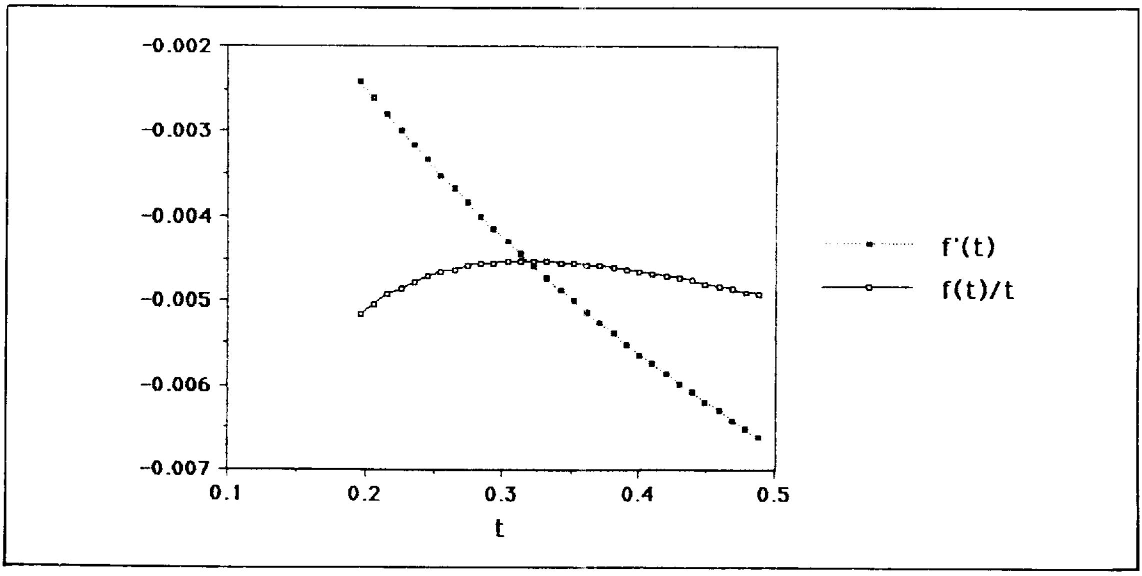

그림 4.2. f'(t)와 f(t)/t의 변화

5. 결론

본 연구에서는 마코프 프로세스의 단조성을 이용하여 마코프 누적 프로세스에서의 확률적 콘벡스성을 확립하였다. 이것은 표본경로 접근법에 근거한 확률적이고 구축적인 방법에 의해 간단히 확립될 수 있음을 알 수 있는 데 이를 통해 이 방법의 유용성을 확인할 수 있다. 또한 확률적 단조성을 갖는 마코프 프로세스의 조건을 구체적으로 명시하여 광범위하게 응용되고 있는 birth−death 프로세스를 기본으로 하는 확률적 모형의 분석에 이 콘벡스성이 적용될 수 있음을 보였다. E[R(t)]의 실제적인 계산에 있어서는 Yoon & Shanthikumar(1980)를 이용하여 매우 효과적이고 정확한 알고리듬을 찾아낼 수 있음이 또한 예시되었다.

본 연구의 결과를 특정한 문제에 적용하는 것은 큰 어려움없이 행해질 수 있는 데, 예를들면 fault−tolerant 콤퓨터 시스템에서의 성능측도, software reliability 분야에서의 실험 중단 시점등의 문제에 직접적으로 적용될 수 있다. 그러나 4장에서의 최소점의 성질과유사한 결과를 얻어지는 연구가 필요할 것이다. Maintenace 이론에서의 최적 교체 주기 결정의 문제도 보다 일반적인 관점에서 모형화를 할 수 있을 것이다. 예를 들면 하나의 재생 사이클(4장에에서의 대체시점)이 확률적으로 결정되는 보다 현실적인 모형에서의 수익률을 최대화하는 문제와 같은 경우에 (정리 4.2)와 같은 결과를 얻어 내는 연구가 요구될 것이다. 그러나 이러한 연구를 위해서는 우선 본연구에서 제시된 이론적인 사실들을 적절히 종합하여 하나의 자동적인 모형화 과정으로 확립하고 소프트웨어화 할 필요가 있을 것이다.

−參考文獻−

[1] Barlow, R.E. and F.Proschan, *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Wiston, N.Y., 1975.

[2] Cinlar, E.,"Markov Additive Processes : I and II", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, v24, 85−121, 1972.

[3] Grassman,W.,"The Convexity of the Mean Queue Size of the M/M/c Queue with respect to the Traffic Intensity," *J.Appl. Prob.*, v20, 916−919, 1983.

[4] Kamae,T.,U.Krengel and G.L.O'Brien, "Stochastic Inequalities on Partially Ordered Spaces," *Ann. Prob.* v5, 899−912, 1977.

[5] Lee,H.L. and M.A.Cohen, "A Note on the Performance Measures of M/M/c Queueing Systems," *J. Appl. Prob.*, v20, 920−923, 1983.

[6] Ross.S.M., "Software Reliability : The Stopping Rule Problem," Tech. Rep., Dept. of IE&OR, University of California, Berkeley, 1987.

[7] Shaked M. and J.G.Shanthikumar, "Stochastic Convexity and Its Application," *Adv. Appl.*, v20, 427−446, 1988a.

[8] __________, "Temporal Stochastic Comvexity and Concavity," *Stoch. Process. Appli.*, v27, 1−20, 1988b.

[9] __________, "Parametric Stochastic Convexity and Concavity of Stochastic Processes," Tech. Rep., School of Business Administratiom, University of California, Berkeley, 1988c.

[10] __________, "Convexity of a Set of Stochastically Orderd Random Variables," *Adv. Appli. Prob.*, v22, 160−177,1990.

[11] Shanthikumar J.G. and Yao, "Second−order Stochastic Properties in Queueing Systems," Proceeding of IEEE, v77, 162−170, 1989.

[12] Stoyan, S., *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, Wiley, New York, 1983.

[13] Sumita, Uand J.G.Shanthikumar, "A Software Reliability Model with Multiple−Error Introduction and Removal, *IEEE Trans. Reliab.*, v.R35, 459−462, 1986.

[14] Sumita,U., J.G.Shanthikumar and Y.Masuda, "Analysis of Fault Tolerant Computer Systems," *Microelectron. Reliab.*, v27, 65−78, 1987.

[15] Yoon,B.S., *Approximations for the Transient Behavior of Stochastic Processes : Discretization and Uniformization*, Ph.D. Dissertation, University of California, Berkeley, 1988.

[16] Yoon,B.S. and J.G.Shanthikumar, "Bounds and Approximations for the Trnasient Behavior of Continuous−time Markov Chains," *Probability in thd Engineering and Informational Sciences*, v3, 175−198, 1989.