

판매기회가 유실되는 생산/재고 시스템에서의 (s, S)재고정책

이효성**

The (s, S) Policy for Production/Inventory Systems with Lost Sales

Abstract

A production/inventory system is considered in which a production facility produces one type of product. The demand for the product is given by a compound Poisson process and is supplied directly from inventory when inventory is available and is lost when inventory is out of stock. The processing time to produce one item is assumed to follow a general distribution. An (s, S) policy is considered in which production stops at the instant the stock on hand reaches S and the setup of the production facility begins at an inspection point when the stock on hand drops to or below s for the first time. The time interval between two successive inspection points during a non-production period is a random variable which follows a general distribution

*경희대학교 산업공학과

*본 논문은 1990년도 한국과학재단 기초연구비에 의해 연구되었음

and the setup time is also a random variable which follows a general distribution. The objective is to find the optimal control values s and S which minimize the expected cost per unit time in the long run under a linear cost structure. A special subcase is considered in which some useful properties of cost functions are exploited to find the optimal control values. The queueing control problem associated with the above production/inventory system is also discussed.

1. 서 론

본 연구에서는 한 대의 생산설비에 의해 단일종류의 제품이 생산되어지는 생산/재고 시스템의 제어정책을 분석하고자 한다. 제품에 대한 수요는 compound Poisson 과정에 따라 발생하며 단위기간당 수요의 도착률은 λ 이고 1회 수요량은 임의의 이산확률분포를 갖는 확률변수 X 로 표시된다. 수요가 발생했을 때 재고가 충분히 존재하면 수요는 즉시 재고로부터 충당되나 재고가 존재하지 않을 때 발생하는 수요는 판매기회가 상실(lost sales)된다. 만일 수요가 발생했을 때 재고는 존재하나 보유 재고량이 수요를 충당할 수 있을 만큼 충분치 못하면 보유재고량을 초과하는 수요는 판매기회가 상실되는 것으로 가정한다. 재고보충은 생산에 의해 한개씩 이루어지며 제품이 한개 생산되어지는데 소요되는 가공시간(processing time)은 임의의 분포를 따르는 확률변수 U 로 표시된다. 따라서 본 연구에서 다루어지는 생산/재고 시스템의 특색은 일반 주문판매의 경우와 달리 필요한 만큼의 재고보충이 일시에 이루어지지 않고 생산이 끝날 때마다 한개씩 점진적으로 이루어진다는 데 있다.

이러한 생산/재고 시스템에서 가장 유효하게 사용

되어질 수 있는 정책은 (s, S) 정책으로 재고보충이 일시에 이루어지는 재고시스템의 경우에는 사용 가능한 모든 정책중 (s, S) 정책이 최적임이 이미 증명된 바 있다[14]. 따라서 본 연구에서도 생산/재고 시스템의 경제적 운용을 위해 (s, S) 정책을 사용하며 본 연구에서 사용되는 (s, S) 정책의 운용특성은 다음과 같다.

재고수준이 미리 설정된 값 S 에 도달하게 되면 즉시 생산설비는 가동이 중단되고 비생산기간이 시작된다. 비생산기간 중의 재고수준은 특정한 검사시점에서만 파악 가능하며 한 검사시점과 다음 검사시점 간의 간격(검사간격)은 임의의 분포를 따르는 확률변수 V 로 표시된다. 만일 어떤 검사시점에서 관측된 재고수준이 미리 설정된 값 S 를 초과하면 비생산기간은 최소한 다음 검사 시점까지 연장되나 관측된 재고수준이 s 혹은 그 미만으로 떨어지면 비생산기간은 끝나고 즉시 생산준비가 시작된다. 생산준비기간(setup time)은 확률변수 W 로 표시되며 W 역시 임의의 일반분포를 따른다고 가정한다. 생산준비기간이 끝나면 생산이 시작되고 생산기간 중에는 재고보충이 한개씩 점진적으로 이루어지며 생산기간은 재고수준이 S 에 도달할 때까지 계속된다.

본 모형에서는 Poisson 도착의 기억부재성질

(memoryless property)에 의하여 비생산기간이 시작되는 시점(생산기간이 끝나는 시점)은 매번 확률적으로 동일한 조건을 갖는 재생점(regeneration point)이 된다. 따라서 재생사이클(regenerative cycle)은 비생산기간의 시작점으로 부터 다음 비생산기간의 시작점이 되며 그림 1에서 보듯이 한 사이클은 비생산기간, 생산준비기간, 생산기간으로 구성된다. 본 연구에서는 재고부족시 판매기회가 상실되는 경우를 취급하므로 s 는 음의 값을 가질 수 없다. 또한 생산기간 중에도 수요가 계속 발생하므로 재고수준이 감소할 수 있고 경우에 따라서는 재고부족으로 판매기회가 상실될 수도 있다. 만일 재고가 부족한 경우 수요가 유실되지 않고 추후납품(backorder)이 가능하다면 시스템이 안정상태(steady state)에 도달하기 위하여 $e = \lambda E(X)E(U) < 1$ 의 조건이 필요하다. 그러나, 본 연구에서는 수요가 유실되므로 S 의 값이 유한하기만 하면 위의 조건을 충족하지 못하여도 시스템은 안정상태에 도달한다.

본 연구에서는 시스템운용과 관련되어 다음과 같은 비용이 발생한다고 가정한다.

- i) 재고수준에 비례하여 발생하는 재고유지비용: $C_h / \text{단위제품/단위시간}$
- ii) 재고부족으로 판매기회가 유실되는 수요에 대한 벌과 비용: $C_p / \text{단위유실수요}$
- iii) 설비가동을 시작할때 드는 준비비용(turn-on cost): K_1
- iv) 설비가동을 중단시킬때 드는 비용(turn-off cost): $K_2 (K = K_1 + K_2)$
- v) 생산기간과 생산준비기간 중의 단위기간당 운용비용: C_1
- vi) 비생산기간중의 단위기간당 운용비용: $C_2 (C_2 < C_1)$

본 연구의 목적은 위와 같은 비용구조하에서 특정한 (s, S) 정책을 운용할 경우 안정상태 하에서 단위기간당 발생하는 기대비용을 구하는 식을 유도한 후, 이를 이용하여 최적 (s, S) 정책을 발견하고자 함이다. (s, S) 재고정책에 대해서는 그동안 많은 연구

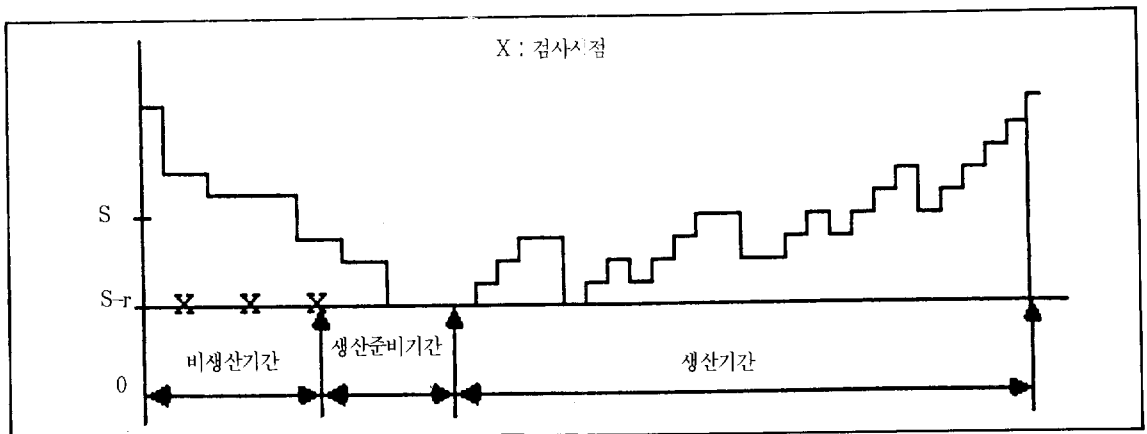


그림 1. 생산/재고시스템에서의 (s, S)정책

가 행하여 졌다. 그러나 대부분의 연구는 재고보충이 일시에 이루어지는 상황을 다루고 있으며[2,15 등], 본 연구에서와 같이 재고보충이 생산에 의해 한개씩 이루어지는 경우의 연구는 아래와 같이 제한되어 있다. Tijms[13]는 수요가 Poisson과정을 따르고 제품 한개를 생산하는데 소요되는 가공시간이 일반분포를 따를 경우의 문제를 Markov의사결정모형을 통하여 해결하였다. Gavish와 Graves는 Tijms와 같은 문제를 가공시간이 결정적[4] 혹은 임의의[5] 분포를 따를 경우에 대해 연구하였으며 비용함수의 특성을 이용하여 최적해를 구할 수 있는 발견적 기법(heuristic algorithm)을 제시하였다. Altiok[1]은 수요가 compound Poisson과정을 따르고 가공시간은 phase-type분포를 따를 경우의 분석을 행하였으나 비용함수의 특성은 규명하지 못하였고 따라서 최적해도 일반적인 탐사기법을 이용하여 구하였다. Srinivasan과 Lee[10]는 이들 연구를 일반화하여 수요가 compound Poisson과정을 따르고 가공시간이 임의의 분포를 따르며 비생산기간 동안의 재고수준은 특정한 검사시점에서만 감시 가능한 경우를 연구하였다. 이들은 이러한 일반적인 경우에 대해 최적해를 구하는 효율적인 발견적 기법을 개발하였다. 그외에 본 연구와 관련된 연구로는 Sung과 Oh[11]가 생산기간 동안의 생산량이 매 주기 일정한 값을 갖는 (r, Q) 정책을 연구하였으며, De Kok 등[3]은 생산량을 연속변수로 보고 생산율을 조절하는 발견적 기법을 개발하였다. 위에 열거된 모든 연구는 Altiok의 연구를 제외하고는 재고부족시 수요의 후후납품이 허용된다는 가정하에서 이루어졌다. 본 연구를 Srinivasan과 Lee의 연구와 비교해 보면

본 연구에서는 생산준비기간(setup time)이 존재하고 재고부족시 수요가 유실되며 비용구조가 보다 일반화되었다는 점을 제외하고는 모든 가정이 그들의 가정과 동일하다. 이러한 측면에서 본 연구는 Srinivasan과 Lee의 연구의 보완 혹은 확장이라고 볼 수 있다.

2. 문제의 모형화 및 최적해 탐색

2.1. 기호 정의

분석의 편의를 위하여 앞으로는 $r=S-s$ 로 놓고 주어진 정책을 (s, S) 대신 (r, S) 로 표시하도록 한다. 예를 들면 $s=3, S=10$ 인 정책은 앞으로 $(3,10)$ 이 아닌 $(7, 10)$ 으로 표시된다. 또한 기호의 편의상 임의의 이산확률분포변수 D 에 대하여 $d_i=P\{D=i\}$ 를 나타내며, 임의의 연속확률변수 C 에 대하여 $C\{\}$ 은 확률변수 C 의 누적분포함수(c.d.f)를 나타내도록 정의한다. 기타 본 논문에서 사용되는 기호는 다음과 같다.

$X=1$ 회 수요의 크기(batch size of a demand), r ,

v ,

V =비생산기간 중의 검사간격, $r.v.$,

$A=V$ 동안 발생하는 수요의 도착회수, $r.v.$,

$B=V$ 동안 발생하는 도착회수, $r.v.$,

W =생산준비기간의 길이, $r.v.$,

$C=W$ 동안 발생하는 수요의 도착회수, $r.v.$,

$D=W$ 동안 발생하는 총수요, $r.v.$,

U =제품 1개를 생산하는 데 소요되는 가공시간,

$r.v.$,

$G=U$ 동안 발생하는 수요의 도착회수, r.v.,

$H=U$ 동안 발생하는 총수요, r.v.,

$\pi_j = P_r\{X_1+X_2+\dots+X_i=j\}$,

$C(r, S)$ =제어변수의 값으로 r 과 S 가 사용될 경우 한 사이클동안 발생하는 기대재고유지비용과 판매유실로 인한 기대벌과비용의 합.

$L(r, S)$ =제어변수의 값으로 r 과 S 가 사용될 경우 한 사이클의 기대길이.

$T(r, S)$ =제어변수의 값으로 r 과 S 가 사용될 경우 단위기간당 발생하는 기대비용.

2.2. 접근방식

본 논문의 목적은 단위기간당 기대비용 $TC(r, S)$ 를 최소화하는 r 과 S 의 값을 구하는 것이다. 그러기 위해서는 우선 제어변수의 값 r 과 S 가 주어졌을때 단위기간당 발생하는 기대비용 $TC(r, S)$ 를 구하는 식이 유도되어야만 한다. 이를 위하여 본 연구에서는 생산준비기간이 존재하지 않고, 재고부족시 추후 납품이 허용되는 경우의 (s, S)정책을 다룬 Srinivasan과 Lee[10]의 접근방식을 따르고자 한다. 제어변수의 값으로 r 과 S 가 사용될 경우의 비생산기간의 기대길이를 $L_N(r, S)$ 라 정의하면, 재생보상 정리(renewal reward theorem)로 부터 r 과 S 가 주어졌을때 단위기간당 발생하는 기대비용은 다음과 같이 주어진다.

$$TC(r, S) = \frac{K+C(r, S)-(C_1-C_2)L_N(r, S)}{L(r, S)} + C_1, \tag{2.1}$$

여기서 $K=K_1+K_2$

따라서, $TC(r, S)$ 를 구하기 위해서는 $C(r, S)$, $L_N(r, S)$, $L(r, S)$ 의 값을 각각 구할 수 있어야만 하며, 이들 값을 구하기 위해 기본적으로 필요한 값인 $a_i, b_i, c_i, d_i, g_i, h_i$ 의 값은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} a_i &= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} dV(t), & c_i &= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} dW(t), \\ g_i &= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} dU(t), & & (2.2) \\ b_j &= \sum_{i=0}^j a_i \pi_{ji}, & d_i &= \sum_{i=0}^j c_i \pi_{ji}, & h_j &= \sum_{i=0}^j g_i \pi_{ji}, & j \geq 0. & (2.3) \end{aligned}$$

여기서 π_j 의 값은 다음의 순환식을 이용하여 계산할 수 있다.

$$\pi_{ji} = \sum_{k=1}^{j-i+1} x_k \pi_{i-k, i-1}. \tag{2.4}$$

검사간격 V 동안 수요가 발생했다는 조건하에서 V 동안 발생한 총수요를 확률변수 \tilde{B} 라고 가정하면 \tilde{B} 가 j 가 될 확률 \tilde{b}_j 는 다음과 같이 표시된다.

$$\tilde{b}_j = \frac{b_j}{1-b_0} \text{ for } j \geq 1. \tag{2.5}$$

이제 위에서 구한 값들을 기초로 $C(r, S)$ 와 $L(r, S)$ 등을 구할 수 있으며 이들을 구하는 과정이 다음에 설명된다.

2.3. $C(r, S)$ 의 계산

이 절에서는 r 과 S 가 제어변수의 값으로 주어졌을 경우 한 사이클동안 발생하는 기대재고유지비용과 기대벌과비용의 합 $C(r, S)$ 를 구하는 순환식을 유도해 보도록 한다. 이를 위해 검사 간격 초의 재고 수준이 k 일 경우 검사간격 동안 발생한 기대비용(재고유지비용+벌과비용)을 EV_k 로 정의한다. 또한 생산기간중에 발생하는 비용을 표시하기 위하여 기호 f_u

를 다음과 같이 정의한다. $f_{ii}(i \leq j)$ 는 재고수준이 i 인 상태에서 가공을 막 시작한 시점(epoch)으로 부터 가공이 끝나 최초로 재고수준이 j 에 도달한 시점까지 발생한 기대재고유지비용과 기대벌과비용의 합을 나타낸다(정의상 $f_{ii}=0$ 이다). 또한 $e_k(k \geq 0)$ 를 생산준비기간초에 재고수준이 k 라는 조건하에, 생산준비기간이 시작되는 시점에서부터 준비기간의 종료 이후(종료시점포함) 최초로 재고수준이 다시 k 로 복귀되는 시점까지 발생하는 기대비용(재고유지비용 + 벌과비용)을 나타낸다고 하자. 생산준비기간동안 수요가 발생하지 않으면 e_k 는 단순히 생산준비기간 중에 발생한 비용이 된다.

이와 같은 기호하에서 $C(r, S)$ 의 식은 다음 보조정리로 표시된다.

보조정리 2.1

$$C(r, S) = \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j C(1, S-j) - \sum_{j=1}^{r-1} \beta_j e_{S-j} \quad (2.6)$$

여기서, β_j 는 다음과 같이 정의된다($0 \leq \beta_j \leq \beta_0 = 1, j > 0$ 임을 유의할 것).

$$\beta_j = \begin{cases} 1, & j=0 \\ \prod_{i=1}^j \tilde{b}_i \beta_{i-1}, & j>0 \end{cases}$$

(증명) 첫 검사간격동안 발생한 총수요가 j 일 확률은 b_j 로 표시된다. 만일 $r \leq j \leq S$ 이면 첫번째 검사시점에서의 재고수준이 s 이하가 되어 비생산기간은 끝나고 즉시 생산준비가 시작된다. 이후 생산기간이 끝날 때까지 발생하는 총 기대비용은 $e_{S-j} + f_{S-j, s}$ 가 된다. $j \geq S+1$ 일 경우에도 첫번째 검사시점에서 생산준비는 시작되나 이 시점에서의 재고는 0가 된다. 따라서 생산준비가 시작되는 시점부터 생산기간이 끝나는 시점까지 발생하는 기대비용은 이 경우 $e_0 + f_{0s}$

가 된다. 반면에 $j < r$ 이면 첫번째 검사시점에서의 재고수준 $S-j$ 는 s 를 초과하여 최소한 다음 검사시점까지 비생산기간이 계속된다. 이 경우 첫번째 검사시점으로부터 최초로 재고수준이 $S-j$ 에 복귀할 때까지 소요되는 기대비용은 $C(r-j, S-j)$ 와 같음을 쉽게 알 수 있다. 또한 재고수준이 $S-j$ 에 복귀한 시점으로부터 생산기간이 끝날때까지 소요되는 기대비용은 $f_{S-j, s}$ 로 표시된다. $EV_{k/r}$ 를 검사간격 초의 재고수준이 k 이고 검사간격중 발생한 총수요가 j 라는 조건하에서 검사간격 중에 발생하는 기대비용이라 정의하면, $C(r, S)$ 는 첫번째 검사간격동안 발생한 수요에 대해 조건화하여 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} C(r, S) &= \sum_{j=r}^S b_j (EV_{S/j} + e_{S-j} + f_{S-j, s}) \\ &\quad + \sum_{j=S+1}^{\infty} b_j (EV_{S/j} + e_0 + f_{0s}) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{r-1} b_j (EV_{S/j} + C(r-j, S-j) + f_{S-j, s}) \\ &= EV_s + \sum_{j=0}^{r-1} b_j C(r-j, S-j) \\ &\quad + \sum_{j=1}^S b_j f_{S-j, s} + \sum_{j=S+1}^{\infty} b_j f_{0s} \\ &\quad + \sum_{j=r}^S b_j e_{S-j} + e_0 \sum_{j=S+1}^{\infty} b_j. \end{aligned} \quad (2.7)$$

우변의 $C(r, S)$ 를 좌변으로 이항하여 정리하면 $C(r, S)$ 에 대한 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned} C(r, S) &= \frac{EV_s}{1-b_0} + \sum_{j=1}^{r-1} \tilde{b}_j C(r-j, S-r) + \sum_{j=1}^S \tilde{b}_j f_{S-j, s} \\ &\quad + \sum_{j=S+1}^{\infty} \tilde{b}_j f_{0s} + \sum_{j=r}^S \tilde{b}_j e_{S-j} + e_0 \sum_{j=S+1}^{\infty} \tilde{b}_j. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$r=1$ 을 식(2.8)에 대입하면, 다음과 같이 $r=1$ 일 경우의 식을 얻는다.

$$C(1, S) = \frac{EV_s}{1-b_0} + \sum_{j=1}^S \tilde{b}_j f_{s-j, s} + \sum_{j=S+1}^{\infty} \tilde{b}_j f_{0s} + \sum_{j=1}^S \tilde{b}_j e_{s-j} + e_0 \sum_{j=S+1}^{\infty} \tilde{b}_j. \quad (2.9)$$

식 (2.9)를 식(2.8)에 대입하면 C(r, S)는 다음과 같이 표현된다.

$$C(r, S) = \sum_{j=1}^{r-1} \tilde{b}_j C(r-j, S-j) + C(1, S) - \sum_{j=1}^{r-1} \tilde{b}_j e_{s-j}. \quad (2.10)$$

항 C(r-j, S-j)에 위 순환식을 반복 적용하여 정리하면 β_j를 정의로부터 C(r, S)는 식(2.6)과 같이 표시됨을 증명할 수 있다.

2.4. L(r, S) 및 L_N(r, S)의 계산

제어변수의 값이 r과 s로 주어졌을 경우 한 사이의 기대길이 L(r, S)는 C(r, S)와 비슷하게 유도된다. L(r, S)를 구하기 위하여 몇가지 새로운 기호를 도입하도록 하자. \bar{v}_k 를 한 검사간격동안 발생한 총수요가 k라는 조건하에서 검사간격의 기대길이라고 정의한다. t_k 를 생산준비기간 초에 재고수준이 k라는 조건하에 생산준비기간의 종료이후(종료시점포함) 최초로 재고수준이 k로 복귀될때까지 소요되는 기대시간이라 정의한다. 또한 $\tau_{ij}(i \leq j)$ 는 재고수준이 i인 상태에서 가공이 시작된 시점으로 부터 가공이 끝나 최초로 재고수준이 j에 도달할 때까지 소요되는 기대시간으로 정의한다. v_k, t_k, τ_{ij} 는 각각 C(r, S)를 유도하는 과정에서 사용된 EV_k, e_k, f_{ij} 에 해당함을 알 수 있다. 이러한 정의하에서 첫번째 검사간격동안 발생한 수요량에 대해 조건화하면 L(r, S)는 다음과 같이 표시된다.

$$L(r, S) = \sum_{j=0}^{r-1} b_j (\bar{v}_j + L(r-j, S-j) + \tau_{s-j, s}) + \sum_{j=r}^S b_j (\bar{v}_j + t_{s-j} + \tau_{s-j, s}) + \sum_{j=S+1}^{\infty} b_j (\bar{v}_j + t_0 + \tau_{0s}). \quad (2.11)$$

식 (2.11)에 대한 설명은 C(r, S)에서의 설명과 유사하므로 생략한다. 식 (2.11)을 식 (2.8), (2.9), (2.10)과 유사한 과정을 거쳐 정리하면 L(r, S)는 다음과 같이 표현된다.

$$L(r, S) = \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j L(1, S-j) - \sum_{j=1}^{r-1} \beta_j t_{s-j} \quad (2.12)$$

(r, S)정책중 비생산기간의 기대값이 L_N(r, S)도 첫번째 검사간격동안 발생한 수요량에 대해 조건화하면 다음과 같이 유사한 순환식을 얻는다.

$$L_N(r, S) = \sum_{j=0}^{r-1} b_j (\bar{v}_j + L_N(r-j, S-j)) + \sum_{j=r}^{\infty} b_j \bar{v}_j = E(V) + \sum_{j=0}^{r-1} b_j L_N(r-j, S-j). \quad (2.13)$$

C(r, S), L(r, S)와 유사한 유도과정을 거치면 L_N(r, S)는 다음과 같이 표현된다.

$$L_N(r, S) = \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j L_N(1, S-j) = \frac{E(V)}{1-b_0} \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j. \quad (2.14)$$

이제 C(r, S), L(r, S), L_N(r, S)에 대한 식 (2.10), (2.12), (2.14)를 식 (2.1)에 대입하면 TC(r, S)는 다음 보조정리로서 표현된다.

보조정리 2.2

$$TC(r, S) = k + \frac{\sum_{j=0}^{r-1} \beta_j C(1, S-j) - \sum_{j=1}^{r-1} \beta_j e_{s-j} - (C_1 - C_2) \frac{E(V)}{1-b_0} \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j}{\sum_{j=0}^{r-1} \beta_j L(1, S-j) - \sum_{j=1}^{r-1} \beta_j t_{s-j}} + C_1. \quad (2.15)$$

보조정리 2.2로부터 우리는 TC(r, S)의 값은 r=1

인 경우의 $C(1, k)$, $L(1, k)$ 그리고 e_k , t_k 의 값만 계산가능하면 구할 수 있음을 알 수 있다. 이들 항에 대한 계산과정의 유도는 아래에서 설명된다.

2.5. $C(1, k)$ 의 계산

$C(1, k)$ 를 계산하기 위하여 한 사이클을 다음과 같이 3기간으로 나누어 생각해 보자. 기간 1은 비생산기간으로 정의하고, 기간2는 생산준비의 시작점으로부터 생산준비기간의 종료후(종료기간포함) 최초로 재고수준이 생산준비기간의 시작점에서의 수준으로 복귀할 때까지의 기간으로 정의한다. 또한 기간3은 기간2의 종점으로부터 사이클이 끝날 때까지의 기간으로 정의한다. 기간 1, 2, 3동안 발생하는 기대비용을 각각 $C_N(1, k)$, $C_S(1, k)$, $C_P(1, k)$ 로 표시하면 $C(1, k) = C_N(1, k) + C_S(1, k) + C_P(1, k)$ 가 되며, 각 항은 다음식으로 표시됨을 확인할 수 있다.

$$C_N(1, k) = \frac{EV_k}{1 - b_0}. \quad (2.16a)$$

$$C_S(1, k) = \sum_{j=1}^k \tilde{b}_j e_{k-j} + e_0 \sum_{j=k+1}^{\infty} \tilde{b}_j. \quad (2.16b)$$

$$C_P(1, k) = \sum_{j=1}^k \tilde{b}_j f_{k-j, k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \tilde{b}_j f_{0k}. \quad (2.16c)$$

2.5.1. $C_N(1, k)$ 의 계산

식 (2.16a)로부터 $C_N(1, k)$ 는 EV_k 의 값만 구해지면 쉽게 계산됨을 알 수 있다. EV_k 를 구하기 위해 α_n 을 검사간격중 n 번째 제품(검사간격중 도래하는 n 번째 수요를 충족시켜줄 제품)이 재고로 유지되는 기대시간을 나타낸다고 하자. 그러면 검사간격 초의 재고수준이 k 일 경우 검사간격 V 동안 발생하는 기대비용 EV_k 는 다음의 순환식으로 표시된다.

보조정리 2.3

$$EV_k = EV_{k-1} + \alpha_k C_n - C_p \sum_{i=k}^{\infty} b_i, \quad k \geq 1. \quad (2.17)$$

초기치로는 $EV_0 = \lambda E(X)E(V)C_p$ 가 사용되고, α_k 는 다음 식으로 표시된다.

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^k [j(1 - \sum_{m=0}^j a_m) \sum_{i=1}^{k-j+1} \pi_{k-1, j-1} P(X \geq i) \\ \quad + P\{X_1 + \dots + X_{j-1} \leq k-1\} j a_j], & k > 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

(증명) 보조정리 2.3은 수학적 증명도 가능하나 다음과 같이 직관적으로도 설명될 수 있다. EV_k 를 EV_{k-1} 과 비교하여 보면 EV_k 는 EV_{k-1} 에 비하여 검사간격동안 k 번째 제품의 재고유지비용을 더 부과하여야만 하는 대신에 검사간격 동안의 수요가 k 개 이상일 경우 k 번째 제품의 판매유실로 인한 손실은 줄어든다. 검사간격동안 k 번째 제품의 기대재고유지비용은 $\alpha_k C_n$ 이고 재고를 $k-1$ 개만 보유하고 있을때 k 번째 수요의 판매유실로 인한 기대손실은 $\sum_{i=k}^{\infty} b_i C_p$ 이므로 보조정리 2.3이 성립된다. 검사간격 초의 재고가 0이면 검사간격중 발생하는 기대수요 $\lambda E(X)E(V)$ 가 모두 유실되므로 $EV_0 = \lambda E(X)E(V)C_p$ 가 성립한다. α_k 에 대한 식의 유도는 Srinivasan과 Lee의 논문[10]에 주어져 있다.

2.5.2. $C_S(1, k)$ 의 계산

$\Delta e_n = e_n - e_{n-1}$ 으로 정의하면 식(2.16b)로부터 $C_S(1, k)$ 에 대한 다음 순환식을 얻는다.

$$C_S(1, k) = C_S(1, k-1) + \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{b}_j \Delta e_{k-j}, \quad k \geq 2. \quad (2.19)$$

식 (2.19)의 초기치로는 다음값이 이용된다.

$$C_s(1, 1) = e_0 = \lambda E(X)E(W)C_p. \quad (2.20)$$

따라서 $C_s(1, k)$ 는 $\Delta e_n (n=1, 2, \dots, k-1)$ 의 값만 구할 수 있으면 순환식 (2.19)로 부터 간단히 계산된다. Δe_n 을 구하기 위하여 EW_k 를 생산준비기간 초의 재고수준이 k 라는 조건하에 생산준비기간 동안 발생하는 기대재고유지 및 벌과비용의 합이라 정의하자. 또한 ξ_n 을 생산준비기간중 n 번째 제품이 재고로 유지되는 기대시간을 나타낸다고 하자. 그러면 EW_k 의 식은 EV_k 의 식(2.17)에서 α_k 대신 ξ_k , b_i 대신 d_i 를 대입함으로써 얻어지며, ξ_k 의 식은 α_k 의 식 (2.18)에서 a_j 대신 c_j 를 대입함으로써 얻어진다. 따라서 EW_n 은 다음 식으로 표시된다.

$$EW_n = EW_{n-1} + \xi_n C_h - C_p \sum_{j=n}^{\infty} d_j, \quad n \geq 1. \quad (2.21)$$

EW_n 의 초기치로는 $EW_0 = \lambda E(X)E(W)C_p$ 가 사용된다.

e_n 에 대한 식을 얻기 위하여 생산준비기간 동안 도착하는 수요의 크기에 의해 조건화하면 e_n 은 다음 순환식으로 표시된다.

$$e_n = EW_n + \sum_{j=0}^{n-1} d_j f_{n-j, n} + \sum_{j=n}^{\infty} d_j f_{0, n}, \quad n \geq 0. \quad (2.22)$$

$\Delta EW_n = EW_n - EW_{n-1}$ 이라 정의하면 식 (2.22)로부터 Δe_n 은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Delta e_n &= e_n - e_{n-1} \\ &= \Delta EW_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j (f_{n-1, n} - f_{n-j-1, n-j}) + \sum_{j=n}^{\infty} d_j f_{n-1, n} \\ &= \Delta EW_n + f_{n-1, n} (1 - d_0) - \sum_{j=1}^{n-1} d_j f_{n-j-1, n-j}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.23)$$

식 (2.23)은 보조정리 2.2의 $TC(r, S)$ 계산에 필

요한 e_n 의 값을 구하는 순환식으로도 이용된다.

따라서, Δe_n 과 e_n 은 ΔEW_n 의 값과 $f_{k, k+i} (k=0, 1, \dots, n-1)$ 의 값만 계산되면, 식(2.23)으로 부터 간단히 계산되면 ΔEW_n 은 식 (2.21)으로부터 계산된다. 이제 $f_{k, k+i}$ 의 값만 구할 수 있으면 e_n 과 Δe_n 의 값은 계산 가능하며, 따라서 $C_s(1, k)$ 의 계산도 가능해진다. $f_{k, k+i}$ 은 재고수준 k 로 가공이 시작된 시점으로부터 최초로 재고수준이 $k+1$ 에 도달하는 시점까지 발생하는 기대재고유지비용과 벌과비용의 합이다. 이 값을 구하기 위해 가공시간 초의 재고수준이 k 라는 조건하에 가공시간 U 동안 발생하는 기대비용을 EU_k 라 정의하자. 그러면, 가공시간동안 도래하는 수요의 크기에 의해 조건화하면 $f_{k, k+i}$ 은 다음과 같이 표시된다.

$$f_{k, k+i} = EU_k + \sum_{j=0}^{k-1} h_j f_{k+i-j, k+1} + \sum_{j=k}^{\infty} h_j f_{1, k+1}, \quad k \geq 1. \quad (2.24)$$

$\Delta EU_k = EU_k - EU_{k-1}$ 으로 정의하면 식 (2.24)으로부터 $f_{k, k+i}$ 에 대한 다음 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} f_{k, k+i} - f_{k-1, k} &= \Delta EU_k + \sum_{j=1}^{k-2} h_j (f_{k+i-j, k+1} - f_{k-j, k}) \\ &\quad + \sum_{j=k}^{\infty} h_j (f_{1, k+1} - f_{1, k}) + h_{k-1} (f_{2, k+1} - f_{1, k}) \\ &= \Delta EU_k + \sum_{j=1}^{k-2} h_j (f_{k, k+i} - f_{k-j, k-j+i}) \\ &\quad + \sum_{j=k}^{\infty} h_j f_{k, k+1} + h_{k-1} (f_{k, k+1} + f_{1, 2}) \\ &= \Delta EU_k + \sum_{j=1}^{\infty} h_j f_{k, k+1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k-1} h_j (f_{k-j, k-j+i}). \end{aligned}$$

위 식을 $f_{k, k+i}$ 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$f_{k, k+1} = \frac{1}{h_0} (\Delta E U_k + f_{k-1, k} - \sum_{j=1}^{k-1} h_j f_{k-j, k-j+1}), \quad k \geq 1. \tag{2.25}$$

따라서, $f_{k, k+1}$ 을 구하기 위해서는 $f_{n, n+1}(n=0, \dots, k-1)$ 의 값을 미리 알아야만 한다. 이는 $f_{k, k+1}$ 이 $k=0$ 로부터 순환적으로 계산됨을 의미한다. $f_{k, k+1}$ 의 초기치로 사용되는 $f_{0,1}$ 과 $\Delta E U_k$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$f_{0,1} = E U_0 = \lambda E(X) E(U) C_p. \tag{2.26}$$

$$\Delta E U_k = \gamma_k C_n - C_p \sum_{j=k}^{\infty} h_j, \quad k \geq 1. \tag{2.27}$$

여기서, γ_k 는 α_k, ξ_k 와 같은 개념으로 가공시간중 k 번째 제품이 재고로 유지되는 기대시간을 나타낸다. γ_k 를 구하는 식은 α_k 를 구하는 식에서 a_j 대신 g_j 를 대입하면 얻어진다.

2.5.3. $C_p(1, k)$ 의 계산

식 (2.16.c)로 부터 $C_p(1, k)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} C_p(1, k) - C_p(1, k-1) &= \left(\sum_{j=1}^{k-1} \tilde{b}_j f_{k-j, k} + \sum_{j=k}^{\infty} \tilde{b}_j f_{0, k} \right) \\ &\quad - \left(\sum_{j=1}^{k-1} \tilde{b}_j f_{k-1-j, k} + \sum_{j=k}^{\infty} \tilde{b}_j f_{0, k-1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{b}_j (f_{k-j, k} - f_{k-1-j, k}) \\ &\quad + \sum_{j=k}^{\infty} \tilde{b}_j (f_{0, k} - f_{0, k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{b}_j (f_{k-j, k} - f_{k-1-j, k-j}) \\ &\quad + \sum_{j=k}^{\infty} \tilde{b}_j f_{k-1, k} \end{aligned}$$

$$= f_{k-1, k} - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{b}_j f_{k-1-j, k-j}, \quad k \geq 2. \tag{2.28}$$

따라서, $C_p(1, k)$ 는 Δe_k 과 마찬가지로 $f_{n, n+1}(n=0, \dots, k-1)$ 의 값만 구할 수 있으면 계산 가능하며, $f_{n, n+1}$ 은 전술한 바와 같이 식 (2.25)를 이용하여 순환적으로 계산된다.

식 (2.28)은 초기치로서는 다음 값이 이용된다.

$$C_p(1, 1) = f_{0, 1} = \lambda E(X) E(U) C_p.$$

2.6.(1, k)의 계산

$L(1, k)$ 를 계산하기 위해서는 $C(1, k)$ 에서와 같이 사이클을 3기간으로 나누어 기간 1의 기대길이를 $L_N(1, k)$, 기간 2의 기대길이를 $L_S(1, k)$, 그리고 기간 3의 기대길이를 $L_P(1, k)$ 로 정의한다. 그러면, $L(1, k) = L_N(1, k) + L_S(1, k) + L_P(1, k)$ 로 표시되며 각각의 값은 아래와 같다.

$$L_N(1, k) = \frac{E(V)}{1 - b_0}. \tag{2.29.a}$$

$$L_S(1, k) = \sum_{j=1}^k \tilde{b}_j t_{k-j} + t_0 \sum_{j=k+1}^{\infty} \tilde{b}_j. \tag{2.29.b}$$

$$L_P(1, k) = \sum_{j=1}^k \tilde{b}_j x_{k-j, k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \tilde{b}_j x_{0, k}. \tag{2.29.c}$$

$L_N(1, k)$ 는 상수이므로 $L_S(1, k)$ 와 $L_P(1, k)$ 의 계산만 유도되면 되며 이들은 $C_S(1, k)$ 와 $C_P(1, k)$ 와 유사한 방법으로 유도된다.

2.6.1. $L_S(1, k)$ 의 계산

$\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ 으로 정의하면 식 (2.35.b)로 부터 $L_S(1, k)$ 는 다음과 같은 순환식으로 표현된다.

$$L_S(1, k) = L_S(1, k-1) + \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{b}_j \Delta t_{k-j}, \quad k \geq 2. \tag{2.30}$$

식 (2.30)의 초기치로는 $L_S(1, 1) = t_0 = E(W)$ 가 이용된다.

따라서 $\Delta t_n (n=1, \dots, k-1)$ 의 값을 구할 수 있으면 $L_S(1, k)$ 는 $L_S(1, k-1)$ 으로 부터 직접 계산된다. Δt_n 을 구하기 위해 필요한 t_n 의 식은 e_n 의 식과 유사하게 유도되며, 다음과 같이 표현된다.

$$t_n = E(W) + \sum_{j=1}^{n-1} dx_{n-j, n} + \sum_{j=n}^{\infty} dx_{0, n}, \quad n \geq 0. \quad (2.31)$$

식 (2.31)로 부터 Δt_n 은 다음과 같이 표시되며 이 식은 보조정리 2.2의 $TC(r, S)$ 계산에 필요한 t_n 의 값을 구하는 순환식으로도 이용된다.

$$\begin{aligned} \Delta t_n &= t_n - t_{n-1} \\ &= (1-d_0)\tau_{n-1, n} - \sum_{j=1}^{n-1} dx_{n-j-1, n-j}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.32)$$

따라서, Δt_n 과 t_n 모두 $\tau_{k, k+1} (k=0, 1, \dots, n-1)$ 의 값만 계산되면 식 (2.32)로 부터 간단히 계산되며 $\tau_{k, k+1}$ 은 $f_{k, k+1}$ 과 유사한 과정을 거쳐 유도된다. 제품 1개의 가공시간 U동안에 발생한 수요의 크기에 의해 조건화하면 $\tau_{k, k+1}$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$\tau_{k, k+1} = E(U) + \sum_{j=0}^k h_{k+1-j, k+1} + \sum_{j=k+1}^{\infty} h_{j-1, k+1}. \quad (2.33)$$

약간의 계산과정을 거치면 식 (2.33)으로부터 $\tau_{k, k+1}$ 을 구하는 다음의 순환식이 얻어진다.

$$\tau_{k, k+1} = \frac{1}{h_0} (\tau_{k-1, k} - \sum_{j=1}^{k-1} h_{k-j, k-j+1}). \quad (2.34)$$

위 식의 초기치로는 $\tau_{0,1} = E(U)$ 가 사용된다.

2.6.2. $L_P(1, k)$ 의 계산

$L_P(1, k)$ 의 식은 $C_P(1, k)$ 의 식과 유사하게 유도된다. 식 (2.29.c)로 부터 $L_P(1, k)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$L_P(1, k) = L_P(1, k-1) + \tau_{k-1, k} - \sum_{j=1}^{k-1} b_{k-j-1, k-j}. \quad (2.35)$$

따라서, $L_P(1, k)$ 는 $\tau_{n, n+1} (n=0, \dots, k-1)$ 의 값만 구할 수 있으면 계산 가능하며 $\tau_{n, n+1}$ 은 식 (2.34)을 이용하여 순환적으로 계산된다. 식 (2.35)의 초기치로서는 $L_P(1, 1) = \tau_{0, 1} = E(U)$ 의 값이 이용된다.

이상의 과정을 통해 제어변수의 값 r과 S가 주어질 경우 단위기간당 발생하는 기대비용 $TC(r, S)$ 의 값을 구할 수 있게 되었다. $TC(r, S)$ 의 값은 $C(1, k), L(1, k), e_k, t_k$ 의 식으로 표시되었으며 이러한 값들은 $k=0$ 혹은 $k=1$ 로 부터 순환식을 통해 순차적으로 구해질 수 있었다. 보조정리 2.2로 부터 $TC(r, S)$ 의 값은 r의 값에 관계없이 $C(1, k), L(1, k), e_k, t_k$ 의 값이 $k \leq S$ 의 범위에서 구해지면 직접 계산된다. 또한, 이들 값이 구해지면 $TC(r, S+1)$ 의 값은 역시 r의 값에 관계없이 $C(1, k+1), L(1, k+1), e_{k+1}, t_{k+1}$ 만을 추가적으로 구함으로써 계산 가능하며, 순환식의 구조상 $C(1, k+1), L(1, k+1), e_{k+1}, t_{k+1}$ 은 $C(1, k), L(1, k), e_k, t_k$ 의 값을 알면 극히 적은 양의 계산만이 부가됨으로써 값이 구해진다. 따라서, $TC(r, S)$ 의 값을 구하기 위해서는, $k=0$ 혹은 1로부터 이들 4함수의 값을 순차적으로 구하여 $k \leq S$ 까지 저장해 두면 되며, r과 S의 값이 변동할 경우에도 만일 S의 값이 줄어들면 새로운 $C(1, k), L(1, k), e_k, t_k$ 의 값을 계산하지 않고도 직접 $TC(r, S)$ 의 값을 구해진다. 반면에 S의 값이 커지면 저장되어 있는 함수값을 이용하여 $C(1, k), L(1, k), e_k, t_k$ 의 값을 k가 변화된 S값에 도달할때까지 순차적으로

로 구하여 $TC(r, S)$ 의 값을 계산한다. 또한 추가적으로 구해진 함수값들은 r 과 S 값이 또다시 변동되었을 때 변동된 $TC(r, S)$ 의 값을 구하는데 이용하기 위하여 저장해 둔다.

2.7 재고수준이 연속적으로 감시되는 경우의 생산/재고시스템

재고수준이 연속적으로 감시되는 경우도 앞 절의 결과를 직접 적용할 수 있다. 이 경우에는 $\tilde{a}_1=1$ 이 되며, $\tilde{b}_j=x_j$ 가 되므로 \tilde{b}_j 를 포함하는 모든 식에서 \tilde{b}_j 가 x_j 로 대체되어야 하며, EV_k 를 구하는 식은 다음과 같이 단순화된다.

$$EV_k = EV_{k-1} + \frac{C_h}{\lambda} - C_p \sum_{i=k}^{\infty} x_i. \quad (2.36)$$

위 식의 초기치로는 다음이 이용된다.

$$EV_0 = C_p \cdot E(X)$$

기타 모든 과정은 재고수준이 검사시점에서만 파악되는 경우와 동일하다.

2.8 최적화 과정 및 최적해의 형태

최적 제어변수(r^*, S^*)의 값을 구하기 위해서는 2차원 공간상에서의 탐사를 하여야만 한다. 재고부족시 발생하는 수요가 유실되지 않고 추후납품이 가능하며 생산준비기간이 존재하지 않는 경우는 Srinivasan과 Lee[10]의 연구에서 볼 수 있듯이 함수 $C(r, S)$ 와 $TC(r, S)$ 가 최적해 탐사를 위해 유용하게 이용될 수 있는 좋은 성질들을 보유하고 있다. 이 경우에 비용함수의 성질이 쉽게 규명되는 가장 큰 이유는 r 의 값이 주어지면 $L(r, S)$ 의 값이 S 의

값에 관계없이 일정하기 때문이다. 그러나, 본 연구에서와 같이 재고부족시 발생하는 수요가 유실되는 경우는 r 의 값이 일정하더라도 사이클의 기대길이가 S 의 값에 따라 달라져 $TC(r, S)$ 의 형태가 복잡해지며, 생산준비기간의 존재와 보다 일반화된 비용구조는 $TC(r, S)$ 의 형태를 더욱 복잡하게 만든다. 따라서 $TC(r, S)$ 가 갖는 성질을 규명하여 최적해 탐사에 이용하기는 힘들고 2차원 공간 상에서의 일반적인 탐사기법이 이용된다. 기호의 편의상 앞으로는 r 의 값이 주어졌을 때의 최적 S 값을 $S^*(r)$ 로 표시하고, S 의 값이 주어졌을 때 최적 r 의 값을 $r^*(S)$ 로 표시하도록 한다.

그러면, 최적해를 구하기 위해 다음과 같은 탐사 방법을 이용할 수 있다. 우선 적절한 r 의 값에 대하여 $S^*(r)$ 의 값을 구한다. 이를 구하기 위해서는 어떤 종류의 선탐사(line search)방식도 사용가능하다. 일단 주어진 r 의 값에 대해 최적 S 의 값 $S^*(r)$ 이 구해지면, r 의 값을 변동시켜 변동된 r 에 대해 $S^*(r)$ 의 값을 구한다. 이러한 방법으로 해가 개선되는 방향의 r 을 찾아 나가며, 어느 방향으로 r 을 변동시켜도 해가 더 이상 개선되지 않을 때까지 이러한 과정을 계속 수행한다. 본 연구에서는 $TC(r, S)$ 의 특성을 수학적으로 증명하지는 못하였으나 대부분의 경우 r 의 값이 주어지면 $TC(r, S^*(r))$ 은 r 에 대해 unimodal한 형태를 취하는 것으로 관측되었다.

또한, 최적 r^* 부근의 r 값에 대해서는 $TC(r, S^*(r))$ 의 값이 최적해 $TC(r^*, S^*)$ 값과 극히 미세한 차이만을 가짐이 관측되었다. 따라서, 주어진 r 에 대해 $TC(r, S^*(r))$ 의 값이 r 과 인근한 k 에 대해 $TC(k, S^*(k))$ 의 값과 근소한 차이를 보이면 이 값은

최적해와도 큰 차이가 없는 값으로 판단 가능하다. 그외에 일반적으로 관측된 최적해의 형태(behavior)를 요약해 보면 다음과 같다.

첫째, K 의 값(설비가동비용+설비중단비용의 합)이 커지면, 빈번한 생산설비의 가동 및 중단을 줄이기 위하여 사이클의 길이가 길어지며, 사이클의 길이를 크게 하기 위하여 r^* 의 값이 커지는 경향이 있다.

둘째, 재고유지비용이 커지면 가능한한 보유재고량을 줄이기 위해 S^* 의 값이 작아지는 경향이 있다.

셋째, 판매유실로 인한 벌과비용이 커지면, 가능한 재고부족상태를 줄이기 위하여 s^* 의 값이 커지는 경향이 있다.

마지막으로 (r, S) 정책에서는 생산을 포기하는, 즉 생산설비를 항상 비가동상태로 유지하는 경우가 경제적인 수도 있다. 이러한 경우는 $(0, S+1)$ 정책으로 표시된다. $(0, S+1)$ 정책하에서 단위시간당 발생하는 비용은 $TC(0, S+1) = C_2 + \lambda E(X)C_p$ 이며 이 정책도 최적해를 구하는데 있어 비교 대상에서 배제하지 않아야만 하겠다.

(예제) 다음 예제를 살펴보자.

$$\lambda = 0.3$$

$$x_1 = 0.4, x_2 = 0.3, x_3 = 0.3,$$

V 는 평균 $\frac{10}{3}$ 인 지수분포를 따르고 W 는 확정적인 값 2이며 U 는 $[1, 1.2]$ 구간에서 값을 갖는 일양분포를 따른다.

시스템 운용과 관련된 비용은 다음과 같다.

$$K = 300, C_h = 1, C_p = 30, C_1 = 1, C_2 = 0.3$$

본 연구에서 소개된 알고리즘에 의해 위 예제의

최적해를 구한 결과가 표 1에 정리되어 있다. 표 1에서 볼 수 있듯이 r^* 부근의 r 값에 대해서는 $TC(r, S^*(r))$ 의 값이 최적해와 근사한 값을 가지며, $TC(r, S^*(r))$ 은 r 에 대해 unimodal한 형태를 갖음이 관측된다. 이러한 특성은 위 예제 뿐만 아니라 다른 모든 실험 예제에서도 공통적으로 발견되는 특성이며 PC를 이용하여 최적해를 구하는데는 모든 예제에서 수초 이내의 짧은 시간이 소요되었다.

표1. 예제의 결과

r	$s^*(r)$	$S^*(r)$	$TC(r, S^*(r))$
1	9	10	22.3032
2	8	10	20.4230
10	3	13	14.3312
11	2	13	14.1980
12	2	14	14.1256
13*	1	14	14.0960
14	1	15	14.1044
15	0	15	14.1408
16	0	16	14.2070

(*는 최적해임을 표시함)

3. 생산/재고 시스템을 이용한 대기행렬 시스템의 제어

대기행렬 시스템과 재고관리 시스템 사이에 유사성(analogy)이 존재함은 잘 알려진 사실이다[8, 9]. 2장에서 제시한 생산/재고 시스템은 다음에서 설명되는 용량이 S 인 $M^X/G/1$ 다중서버 휴가모형($M^X/G/1$ server vacation model with multiple vacations and finite capacity)과 유사성이 존재한다. 서비스는 선입선출방식(FIFO)에 따라 개별적으로 이루어지며 서비스가 끝나 대기행렬 시스템에 고객이 더 이상 존재하지 않으면 서어버는 V 시간동안

휴가를 떠난다. V 는 확률변수로서 임의의 분포를 따른다고 가정한다. V 시간후에 서버가 휴가에서 돌아오면 서버는 대기행렬내에 존재하는 고객의 수가 한계치 r 을 넘어섰는지 조사한다. 만일 대기중인 고객의 수가 r 미만이면 서버는 또 다시 V 시간을 요하는 휴가를 떠나게 되고, 대기중인 고객의 수가 r 이상이면 서버는 즉시 서비스 준비를 시작한다. 서비스 준비시간은 임의의 분포를 따르는 확률변수 W 로 표시되고 일단 준비시간이 끝나면 서버의 서비스는 즉시 시작된다. 고객 한명을 서비스 하는데 걸리는 시간은 확률변수 U 로 표시되고 서비스는 대기시스템에 고객이 존재하지 않을 때까지 계속된다 (exhaustive service discipline). 따라서, 위 모형은 대기행렬 용어로는 “제어와 서비스 준비시간이 존재하는 $M^x/G/1$ 다중서버 휴가모형”에 해당된다. 대기행렬의 제어모형은 용량이 무한한 경우에는 활발한 연구가 수행되었다. 특히 서버의 휴가가 존재하는 제어모형에 대해서는 $M/G/1$ 다중서버 휴가모형의 체적제어값 r^* 을 구하는 알고리즘을 Kella [6]가 최근 개발하였고, 비슷한 시기에 Lee와 Srinivasan[7]은 보다 일반화된 모형인 $M^x/G/1$ 다중서버 휴가모형의 체적제어값을 구하는 알고리즘을 개발하였다. 그러나 용량이 유한한 경우에 대한 유사한 연구는 아직까지 수행되지 않은 것으로 보인다. 단지 Teghem[12]이 용량이 유한한 $M/G/1$ 모형의 최적제어값을 구하는 연구를 행하였으나 그 연구는 가장 중요한 비용 요소인 고객의 대기비용 (waiting cost)을 고려하지 않았다는 결함을 가지고

있다. 위에서 제시한 대기행렬시스템의 제어모형과 2장의 생산/재고 시스템의 (r, S) 정책은 다음과 같은 유사성이 있음을 알 수 있다. 대기행렬 시스템에서의 서버는 생산/재고시스템의 생산설비에 해당되고 서버의 휴가시간은 생산/재고 시스템에서의 검사간격에 해당되며 서비스 준비시간은 생산 준비시간에 대응된다. 대기행렬 시스템에서의 고객의 도착은 생산/재고 시스템에서의 수요의 발생에 대응하고, 고객 1명의 서비스 시간은 제품 1개의 가공시간에 대응한다. 또한 대기행렬 시스템의 한계치 r 은 생산/재고 시스템에서의 제어변수 $r=S-s$ 에 해당함을 알 수 있다. 대기행렬 시스템의 시스템운용과 관련하여 발생하는 비용구조도 생산/재고 시스템에서의 비용구조와 동일하게 가정한다. 즉, 고객 1명의 단위시간당 대기비용(waiting cost)은 C_w 이고, 1명의 고객이 유실되는데 따른 벌과비용은 C_p , 서버의 서비스가 시작될 때와 끝날 때 K_1 과 K_2 의 비용이 각각 발생하고, 서비스 준비시간이나 서비스기간 중에는 단위시간당 C_1 , 서버의 유휴기간 중에는 단위시간당 C_2 의 운용비용이 발생한다. 그림2는 생산/재고 시스템과 대기행렬 시스템의 유사성을 보다 쉽게 설명해 준다. 그림 (2.a)는 생산/재고 시스템의 한 예이고 그림 (2.b)는 이에 상응하는 대기행렬 시스템을 아래 방향으로 그린 것이다. 두 그림에서 한 사이클 동안 발생하는 기대재고유지비용과 기대 대기비용은 각각 표시된 부분의 면적에 C_h 를 곱함으로써 구해짐을 쉽게 알 수 있다.

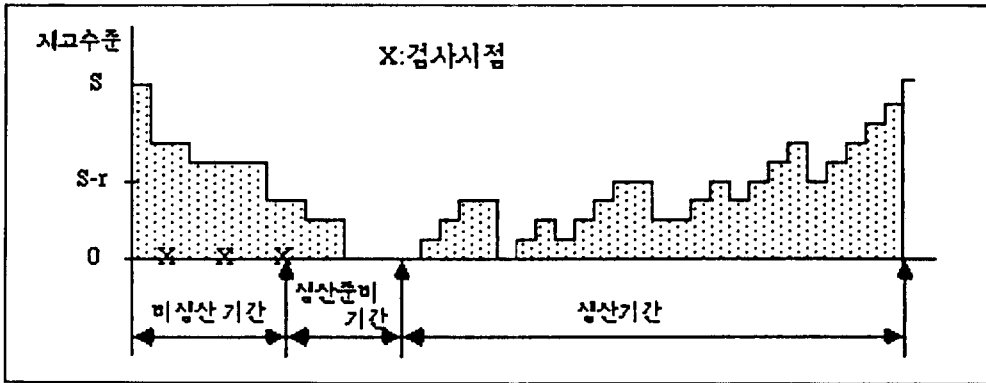


그림 2.a 생산/재고 시스템

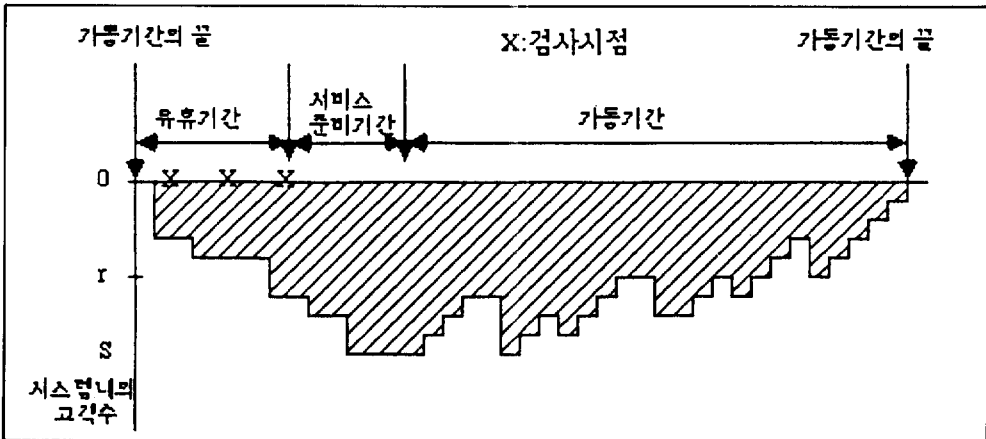


그림 2.b 생산/재고시스템에 상응하는 대기행렬시스템

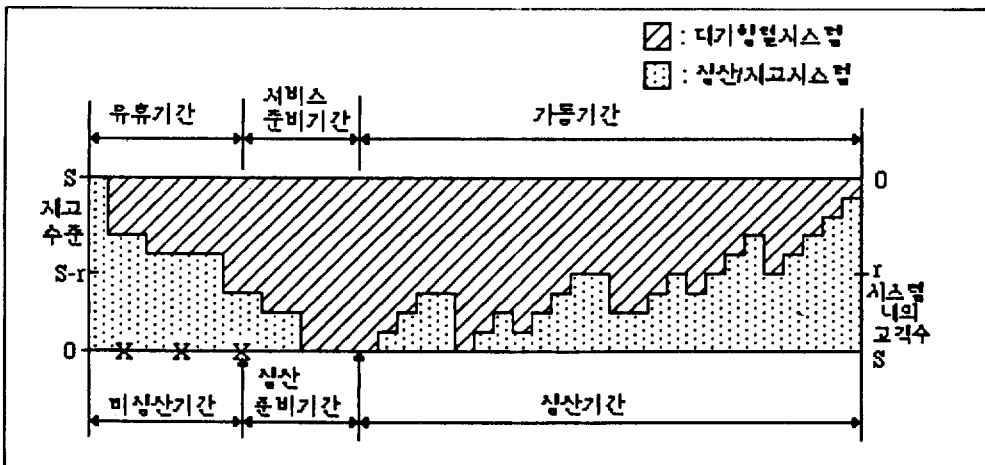


그림 2.c 생산/재고시스템과 대기행렬시스템의 관계

그림 (2.c)는 생산/재고 시스템과 대기행렬 시스템을 동시에 표시하여 두 시스템의 관계를 쉽게 보여준다. 그림 (2.c)에서 볼 수 있듯이 대기행렬 시스템에서 한 사이클동안 발생하는 기대대기비용은 사각형의 면적에서 생산/재고 시스템의 표시된 면적을 뺀 후 C_n 를 곱함으로써 구해짐을 알 수 있다. 사각형의 면적은 $S \cdot L(r, S)$ 이고, 생산/재고 시스템의 빗금친 면적에 C_n 를 곱한 값은 $C_p=0$ 을 대입한 $C(r, S)$ 의 값이다. 따라서 $C(r, S)$ 를 구하는 과정에서 $C_p=0$ 을 대입한 값을 $C_0(r, S)$ 라 표시하면 대기행렬 시스템에서의 사이클당 기대대기비용은 $C_n S \cdot L(r, S) - C_0(r, S)$ 로 표시된다. 특히 $C_0(r, S)$ 의 계산은 C_p 의 값을 0으로 놓음으로써 $C(r, S)$ 의 계산에 비해 간소화됨을 확인할 수 있다. 기대대기비용을 제외한 나머지 비용은 두 시스템이 동일한 값을 갖는다. 대기행렬 시스템에서의 고객상실로 인한 기대벌과비용은 생산/재고 시스템에서 $C_n=0$ 을 대입한 $C(r, S)$ 의 값이므로 2장에서의 과정을 이용해 역시 계산 가능하다. 그러나, 기대벌과비용은 다음과 같이 보다 쉬운 방법으로 구해질 수 있다.

$f(r, S)$ 을 (r, S) 시스템에서의 고객유실비율이라 정의하고 $e = \lambda E(X)E(U)$ 라 정의하면 서어버가 실제로 서비스를 행한 시간적 비율은 $e(1-f(r, S))$ 이므로 다음 식이 성립한다.

$$e(1-f(r, S)) = 1 - \frac{L_N(r, S) + E(W)}{L(r, S)} \quad (3.1)$$

식 (3.1)을 $f(r, s)$ 에 대해 정리하면 다음식이 얻어진다.

$$f(r, S) = 1 - \frac{L(r, S) - L_N(r, S) - E(W)}{eL(r, S)} \quad (3.2)$$

고객유실로 인한 단위기간당 기대벌과비용을 $\pi(r, S)$

라 정의하면 단위기간당 유실되는 평균고객수는

$$\lambda E(X)f(r, S) \text{ 이고 } L_N = \frac{E(V)}{1-b_0} \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j \text{ 이므로 다음과}$$

같은 $\pi(r, S)$ 의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \pi(r, S) &= \lambda E(X)f(r, S)C_p \\ &= (\lambda E(X)C_p - \frac{C_p}{E(U)}) \\ &\quad + \frac{\frac{E(V)}{1-b_0} \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j + E(W)}{L(r, S)} - \frac{C_p}{E(U)} \quad (3.3) \end{aligned}$$

$C_0(r, S)$ 와 유사하게 $e_0(k)$ 를 $C_p=0$ 을 대입하여 얻어지는 e_k 의 값으로 정의하면, 대기행렬 시스템을 운용하는데 발생하는 단위기간당 비용은 $r=1$ 에 대한 다음식으로 정리된다.

$$\begin{aligned} TC(r, S) &= \\ &= \alpha + \frac{\varphi + \gamma \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j - \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j C_0(1, S-j) + \sum_{j=1}^{r-1} \beta_j e_0(S-j)}{\sum_{j=0}^{r-1} \beta_j L(1, S-j) - \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j t_{s-j}} \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\text{여기서, } \alpha = C_n S + C_1 + \lambda E(X)C_p - \frac{C_p}{E(U)},$$

$$\varphi = K + C_p \frac{E(W)}{E(U)},$$

$$\gamma = (\frac{C_p}{E(U)} + C_2 - C_1) \frac{E(V)}{1-b_0}.$$

대기행렬시스템에서 한 사이클당 발생하는 기대비용에 대한 식은 2장에서와 유사한 방법으로 직접 유도가능하나 생산/재고 시스템에 비해 식이 복잡해진다. 따라서, 식 (3.4)를 이용하는 것이 보다 효과적인 방법으로 판단된다. 단위기간당 기대벌과비용이 식 (3.3)으로 주어지므로 2장의 생산/재고 시스템에서도 $C(r, N)$ 을 직접 구하는 것보다 $C_0(r, N) + \pi(r, N)$ 의 합을 구하는 것이 계산량을 줄여주는 보다

효과적인 방법이 된다. 이 방법을 사용하여 생산/재고 시스템에서의 $TC(r, N)$ 의 값을 정리하면 보조정리 2.2는 다음과 같이 표현된다.

$$TC(r, S) = \chi + \frac{\varphi + \gamma \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j + \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j C_0(1, S-j) - \sum_{j=1}^{r-1} \beta_j e_0(S-j)}{\sum_{j=1}^{r-1} \beta_j L(1, S-j) - \sum_{j=1}^{r-1} \beta_j s_{s-j}} \quad (3.5)$$

여기서, φ 와 γ 는 식 (3.4)에서 정의된 바와 같고 χ 는 다음과 같다.

$$\chi = C_1 + \lambda E(X)C_p - \frac{C_p}{E(U)}$$

4. 생산준비기간과 생산기간이 존재하지 않는 경우

2장에서 소개한 모형은 $TC(r, N)$ 의 식이 복잡해서 최적 제어변수의 값을 탐색하는데 비용함수가 갖는 특성을 이용하지 못하였다. 그러나 보다 단순화된 모형에 대해서는 비용함수들이 갖는 중요한 특성들을 증명할 수 있으며, 이를 이용하여 최적해를 탐색하는 효율적인 알고리즘이 개발 가능하다. 본 장에서는 비용함수의 특성규명이 가능한 경우인 생산준비기간과 생산기간이 존재하지 않는 단순화된 모형에 대하여 살펴본다.

이 경우는 재고보충이 일시에 이루어지는 (s, S) 모형으로, 재고수준이 s이하로 떨어진 최초의 검사시점에서 재고보충 후의 재고수준이 S가 되도록 발주한다. 제품인도기간(lead time)은 0으로서 발주 즉시 재고가 보충되며, 검사간격중에 재고부족시 발

생한 수요는 유실된다. 따라서, 본 모형은 2장의 모형에서 생산준비기간과 생산기간이 존재하지 않고 비생산기간만 존재하는 경우로 귀착된다. 시스템은 용과 관련하여 비용은 재고유지비용(C_p)과 벌과비용(C_h) 그리고, 발주비용(K)이 발생하는 것으로 가정한다. 그러면 한 사이클당 발생하는 기대재고유지비용과 벌과비용의 합 $C(r, S)$ 와 한 사이클의 기대길이 $L(r, S)$ 는 2장의 모형에서 비생산기간중 발생하는 기대비용 및 비생산기간의 기대길이와 같으므로 다음 식으로 표현된다.

$$C(r, S) = \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j C(1, S-j). \quad (4.1)$$

$$L(r, S) = \frac{E(V)}{1-b_0} \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j. \quad (4.2)$$

식 (4.2)에서 볼 수 있듯이 이 경우에는 사이클의 기대길이가 S와 관계없이 r의 값에 의해 결정됨을 알 수 있다. 따라서, 이 모형에서는 r의 값이 주어질 경우 사이클의 기대길이는 일정하므로 $S^*(r)$ 의 값은 단순히 $C(r, S)$ 의 값을 최소화해주는 S가 된다. 식 (4.1)에서 필요한 $C(1, k)$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$C(1, k) = \frac{EV_k}{1-b_0}, \quad k \geq 1. \quad (4.3)$$

여기서, EV_k 는 다음 순환식으로 얻어진다.

$$EV_k = EV_{k-1} + \alpha_k C_h - C_p \sum_{i=k}^{\infty} b_i, \quad k \geq 1. \quad (4.4)$$

식 (4.4)의 초기치로는 $EV_0 = \lambda E(X)E(V)C_p$ 가 이용된다.

단위기간당 발생하는 기대비용 $TC(r, S)$ 는 식 (4.1)과 (4.2)로부터 다음과 같이 표시된다.

$$TC(r, S) = \frac{K + \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j C(1, S-j)}{\frac{E(V)}{1-b_0} \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j} \quad (4.5)$$

다음 정리들은 최적해를 탐색하는데 직접적인 도움을 주는 비용함수의 제특성을 보여준다.

보조정리 4.1

$C(r, S)$ 는 r 의 값이 주어지면 S 에 대해 볼록이다.
(증명) $C(r, S)$ 의 볼록성을 증명하기 위해서는 식 (4.1)로 부터 $C(1, k)$ 가 k 에 대해 볼록임을 증명하면 충분하다. 또한 식 (4.3)으로부터 EV_k 가 k 에 대해 볼록이면 $C(1, k)$ 도 볼록이 된다.

$\Delta EV_k = EV_k - EV_{k-1}$ 이라 하면 α_k 의 정의상 $\alpha_k \geq \alpha_{k-1}$ 이므로 EV_k 가 k 에 대해 볼록임을 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$\Delta EV_k - \Delta EV_{k-1} = C_k(\alpha_k - \alpha_{k-1}) + C_p \cdot b_{k-1} \geq 0. \quad (4.6)$$

보조정리 4.2

$C(r, k) < C(r, k-1)$ 이면 $C(r+1, k) < C(r+1, k-1)$ 이 성립한다.

(증명) 주어진 조건으로부터 다음이 성립한다.

$$C(r, k-1) - C(r, k) = \sum_{j=0}^{r-1} \beta_j \{C(1, k-1-j) - C(1, k-j)\} > 0. \quad (4.7)$$

$C(1, k)$ 가 k 에 대해 볼록이므로 식 (4.7)이 성립하기 위해서는 $\beta_{r-1} \{C(1, k+1-r) - C(1, k-r)\} < 0$ 이 반드시 성립해야 한다. 또한 $0 \leq \beta_r \leq 1$ 이므로 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} C(r+1, k-1) - C(r+1, k) &= \sum_{j=0}^r \beta_0 \{C(1, k-1-j) - C(1, k-j)\} \\ &= C(r, k-1) - C(r, k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \beta_r \{C(1, k-1-r) - C(1, k-r)\} > 0 \end{aligned}$$

보조정리 4.3

$$S^*(r) \leq S^*(r+1) \leq S^*(1) + r, \quad r \geq 1.$$

(증명) $S^*(r) \leq S^*(r+1)$ 은 보조정리 4.2로 부터 자명하므로 $S^*(r+1) \leq S^*(1) + r$ 을 증명하면 된다. 이를 위하여 $m = S^*(1)$ 이라 하자. 그러면 $C(1, k)$ 는 볼록함수이므로 $k \geq 1$ 의 범위에서 $C(1, m+k) \geq C(1, m+k-1)$ 이 성립한다. 보조정리 4.3을 증명하기 위해서는 다음 식이 성립함을 보이면 된다.

$$\begin{aligned} C(r+1, m+r+1) - C(r+1, m+r) &= \sum_{j=0}^r \beta_j \{C(1, m+r+1-j) - C(1, m+r-j)\} \geq 0. \quad (4.8) \end{aligned}$$

부등식 (4.8)은 $C(1, m+k) \geq C(1, m+k-1)$, $k \geq 1$ 의 사실로부터 증명된다.

보조정리 4.1로부터 일단 r 의 값이 주어지면 $S^*(r)$ 의 값은 쉽게 구해질 수 있으며 보조정리 4.2, 4.3으로부터 $S^*(r)$ 의 값이 구해지면 $S^*(r+1)$ 의 탐사범위는 좁은 값으로 제한된다. $S^*(r)$ 의 값이 구해졌음은 $1 \leq k \leq S^*(r)$ 의 범위에서 $C(1, k)$ 의 값이 이미 구해져 있음을 의미한다. 보조정리로부터 $r+1$ 의 값에 대한 최적 S 값은 $S^*(r)$ 이상의 k 값중 $C(r+1, k) < C(r+1, k+1)$ 이 성립되는 최소 k 값이다. 이를 구하기 위해서는 $k \geq S^*(r)+1$ 이후의 $C(1, k)$ 값이 필요하며 이러한 값들은 $C(1, k)$ 의 순환적 구조에 의하여 이미 저장되어 있는 $k \leq S^*(r)$ 범위의 $(1, k)$ 값들로부터 간단히 계산된다. 따라서, $S^*(r)$ 의 값이 구해지면 극히 적은 계산만이 부가됨으로써 $S^*(r+1)$ 의 값이 구해진다. 2장에서 우리는 $TC(r,$

$S^*(r)$ 의 값은 r 에 대해 unimodal한 것으로 관측되었음을 언급하였다. 이러한 관측과 위 보조정리들로부터 최적해를 구하기 위한 다음의 알고리즘이 제안될 수 있다.

최적해를 구하기 위한 알고리즘

1. $r=1$ 로 놓고 $k=2$ 에서 부터 시작하여 $C(1, k) > C(1, k-1)$ 을 만족할 때까지 k 값을 증가시킨다. $S^*(1)=k-1$ 으로 놓고 $TC(1, S^*(1))$ 을 계산한다.
2. $r=r+1$ 으로 놓는다. $k=S^*(r-1)$ 으로 부터 시작하여 $C(r, k) > C(r, k-1)$ 을 만족할 때까지 k 값을 증가시킨다. $S^*(r)=k-1$ 으로 놓고 $TC(r, S^*(r))$ 을 계산한다.
3. 만일 $TC(r, S^*(r)) > TC(r-1, S^*(r-1))$ 을 만족하면 최적해는 $(r-1, S^*(r-1))$ 이며 알고리즘은 끝난다. 그렇지 않으면, 단계2로 간다.
위 알고리즘으로 얻어진 해가 최적해임을 수학적으로 증명하지는 못했으나 위 알고리즘에 의해 얻어진 해는 모든 실험 예제들에서 실제로 최적해였음이 관측되었다. 또한 몇가지 중요한 경우에 대해서는 $S^*(r+1)=S^*(r)$ 이나 $S^*(r+1)$ 임이 증명되며, 이러한 경우에는 위 알고리즘에 의해 얻어진 해가 최적해임이 증명가능해진다. 정리 4.1은 이러한 사실을 보여준다.

정리 4.1

$j \geq 1$ 의 범위에서 $\beta_j = \beta$ 라 가정하자. 그러면, 다음이 성립된다.

- (a) $S^*(r+1)$ 은 $S^*(r)$ 이거나 $S^*(r)+1$ 중 한 값을 갖는다.
- (b) $C(r+2, S^*(r+2)) - C(r+1, S^*(r+1)) \geq C(r+1, S^*(r+1)) - C(r, S^*(r))$
- (c) $TC(r, S^*(r))$ 은 r 에 대해 unimodal하다.

(증명)

(a) 보조정리 4.2로 부터 (a)의 증명은 다음 부등식의 성립을 증명하면 충분하다.

$$C(r, k) \leq C(r, k+1) \text{ 이면}$$

$$C(r+1, k+1) \leq C(r+1, k+2). \quad (4.9)$$

$C(1, k)$ 가 볼록함수라는 성질과 $\beta_j = \beta (j \geq 1)$ 라는 가정으로부터 식(4.9)는 쉽게 증명한다.

(b) $S^*(r) = k$ 라 하자. 그러면, 정리 4.1(a)로부터 $S^*(r+1)$ 과 $S^*(r+2)$ 가 가질 수 있는 값은 다음 4경우에 국한된다.

$$i) S^*(r+1) = k, S^*(r+2) = k$$

$$ii) S^*(r+1) = k, S^*(r+2) = k+1$$

$$iii) S^*(r+1) = k+1, S^*(r+2) = k+1$$

$$iv) S^*(r+1) = k+1, S^*(r+2) = k+2$$

$C(1, k)$ 가 k 에 대해 볼록이라는 사실과 주어진 조건으로부터 4경우 모두에 대해 (b)가 성립됨을 증명할 수 있다.

(c) (c)를 증명하기 위해서는 다음이 성립함을 보임으로써 충분하다.

$$TC(r, S^*(r)) < TC(r+1, S^*(r+1)) \text{ 이면,}$$

$$TC(r+1, S^*(r+1)) < TC(r+2, S^*(r+2))$$

$$(4.10)$$

$$\theta_r = K + C(r, S^*(r)),$$

$$\delta_r = C(r, S^*(r)) - C(r-1, S^*(r-1)) \text{으로 정}$$

의하면, $L(r+1)=L(r)+\frac{E(V)}{1-b_0}\beta$ 로 표시된다.

위 기호를 이용하여 식 (4.10)을 다시 적으면 다음과 같다.

$$\frac{\theta_r}{L(r)} < \frac{\theta_r + \delta_{r+1}}{L(r) + \frac{E(V)}{1-b_0}\beta}$$

$$\frac{\theta_r + \delta_{r+1}}{L(r) + \frac{E(V)}{1-b_0}\beta} < \frac{\theta_r + \delta_{r+1} + \delta_{r+2}}{L(r) + \frac{2E(V)}{1-b_0}\beta} \quad (4.11)$$

정리 4.1(b)로 부터 $\delta_{r+2} > \delta_{r+1}$ 이므로 (4.11)이 성립됨은 증명된다.

정리 4.1로 부터 만일 $j \geq 1$ 에 대하여 $\beta_j = \beta$ 가 성립하면 위 알고리즘에 의하여 구해진 해는 최적해임이 보장된다. 또한, 정리 4.1(a)로 부터 $S^*(r)$ 이 구해지면 1개의 $C(1, k)$, 즉 $C(1, S^*(r)+1)$ 만을 더 계산함으로써 $S^*(r+1)$ 이 구해지며 이 경우 알고리즘은 더욱 효율적임이 입증된다.

다음은 이러한 조건이 성립되어 최적해가 보장되는 세가지 중요한 경우이다.

i) 검사간격이 지수분포를 따르고, 1회 수요량 X 가 기하분포를 따를 경우,

만일 검사간격이 지수분포를 따르면 \tilde{b}_j 가 다음과 같음이 증명된다.

$$\tilde{b}_j = P\tilde{a}_j(1-P\tilde{a}_j)^{j-1}, j \geq 1.$$

이때, X 가 모수 P 인 기하분포를 따르면, β_j 의 정의로부터 β_j 의 값은 다음과 같이 구해진다.

$$\beta_j = Pa_j, j \geq 1.$$

ii) 검사간격이 지수분포를 따르고, 수요가 단순 Poisson일 경우.

이 경우는 X 의 값이 항상 1이며 i)에서 $P=1$ 의 경우이다. 따라서 $\beta_j = \tilde{a}_j, j \geq 1$ 가 성립된다.

iii) 재고수준이 연속적으로 감시되고, X 가 기하분포를 따를 경우.

이 경우는 $\tilde{a}_1=1$ 이 되는 경우이다. 따라서, 경우 i)에 $\tilde{a}_1=1$ 을 대입하면 $\beta_j=P, j \geq 1$ 가 성립됨이 증명된다. 만일 수요가 단순 Poisson($P=1$ 의 경우)이라면 $\beta_j=1, j \geq 0$ 이 성립한다.

5. 결론

본 논문에서는 수요는 compound Poisson과정에 따라 발생하고 검사간격은 일반분포를 가지며 재고보충이 생산에 의해 한개씩 점진적으로 이루어지는 생산/재고 시스템에서의 (s, S) 정책을 분석하였다. 제품1개를 생산하는데 소요되는 가공시간은 일반분포를 따르며 생산을 시작하기 위해서는 일반분포를 따르는 생산준비기간이 필요하고, 재고부족시에 도래하는 수요는 유실되는 것으로 가정하였다. 이러한 모형에 대해 본 논문에서는 s 와 S 값이 주어졌을때 단위기간당 발생하는 기대비용을 효율적으로 구하는 과정을 제시하였으며 최적정책을 탐색하는 방안도 논의하였다. 본 모형을 단순화한 특수한 경우에 대해서는 비용함수들이 갖는 중요한 특성들을 규명하였으며, 이를 이용하여 최적해를 탐색하는 효율적인 알고리즘을 제시하였다. 이 경우 특히 몇가지 중요한 상황에 대해서는 본 알고리즘에 의해서 구해진 해가 최적해가 됨을 수학적으로 증명하였다. 또한 생산/재고 시스템과 대기행렬 시스템 사이에 존재하는 유사성을 이용하여 2장에서 소개된 생산/재고 시스템에 상응하는 대기행렬 시스템의 제어정책을 분석하였다. 본 논문과 관련되어 앞으로 수행되어야

할 연구는 2장의 일반적인 모형에 대해서 비용함수 있는 효율적인 알고리즘을 개발하는 것이다.
의 특성을 발견하고 이를 통하여 최적해를 구할 수

— 參考文獻 —

- [1] Altink, T., "(R, r) Production/Inventory Systems." *Opns. Res.*, v37, no 2(1989), pp.266~276
- [2] Archibald, B.C. and E.A. Silver, "(s, S) Policies under Continuous Review and Discrete Compound Demand," *Mgmt. Sci.*, v24(1978), pp.899~909.
- [3] De Kok, A.G., H.C. Tijms and F.A. Van Der Duyn Schouten, "Inventory Levels to Stop and Restart a Single Machine Producing One Product," *European J. Operational Research.*, v 20(1985), pp.239~247
- [4] Gavish, B. and S.C. Graves, "A One Product Production/Inventory Problem Under Continuous Review Policy," *Opns. Res.*, v 28(1980), pp.1228~1236
- [5] Gavish, B. and S.C. Graves, "Production/Inventory Systems with a Stochastic Production Rate under a Continuous Review Policy," *Comp. & Opns. Res.*, v 8, no 3(1980), pp.169~183
- [6] Kella, O., "The Threshold Policy in the M/G/1 Queue with Server Vactions," *Naval Research Logistics*, v 36(1989), pp.111~123.
- [7] Lee, H.S. and M.M. Srinivasan, "Control Policies for the $M^x/G/1$ Queueing System," *Mgmt. Sci.*, v35, no 6(1989), pp.708~721
- [8] Morse, P.M., *Queues, Inventories and Maintenance*, John Wiley and Sons, New York, (1958)
- [9] Prabhu, N.U., *Queues and Inventories: A Study of their Basic Stochastic Processes*, John Wiley and sons, New York.,(1965)
- [10] Srinivasan, M.M. and H.S. Lee, "Random Review Production/Inventory Systems with Comound Poisson Demands and Arbitrary Processing Times," to appear in *Mgmt. Sci.*(1991).
- [11] Sung, C. and G.T. Oh, "(r, Q) Policy for a Single Product Production/Inventory Problem with a Compound Demand Process," *Jour. of the Oper. Res. of Japan*, 30(1987), 132~149
- [12] Teghem, J., "Optimal Control of a Removable Server in an M/G/1 Queue with Finite Capacity," *European J. of Operational Research*, V 23(1987), pp.141~158
- [13] Tijms, H.C., "An Algorithm for Denumerable State Semi-Markov Decision Problems with Applica-

- tion to Controlled Production and Queueing Systems,” in Recent Developments in Markov Decision Theory, ed., R. Hartley et al., Academic Press, New York, (1980), pp.143~179
- [14] Veinott, A.F., Jr., “On the Optimality of (s, S) Policies in Multi-item Infinite Horizon Inventory Problems,” Mgmt Sci., v 13(1967), pp.475~491
- [15] Veinott, A.F., Jr. and H.M. Wagner, “Computing Optimal (s, S) Inventory Policies,” Mgmt. Sci., v 11(1965), pp.525~552