

빛의 간섭성 이론

김기식*·이종민

한국 원자력 연구소

(1990년 2월 2일 접수)

I. 서 론

자연에 존재하는 빛의 전자장은 어느 정도의 요동(fluctuation)을 갖는다. 넓은 의미로, 빛의 간섭성(coherence) 이론은 이러한 요동에 대하여 통계적인 입장에서 기술하는 것이고, 빛의 간섭성 현상은 그들 빛의 전자장이 갖는 상호 상관관계(correlation) 존재의 명백한 증거이다. 빛의 상관관계 개념은 간섭 현상과 연관되어 오래 전부터 인식되어 왔다. 이는 아마도 간섭 현상이 빛의 상관관계를 나타내는 가장 간단한 현상이기 때문일 것이다. 그러나, 관측 시간 한도가 매우 짧은 장비와 새로운 광원의 발명으로 그의 여러 종류의 상관관계 효과들이 연구되기 시작하였다. 이러한 연구 결과, 빛의 간섭성(coherence) 현상에 대한 체계적인 구분과 함께 좀 더 완벽한 빛의 통계적 기술이 필요하게 되었다.

간섭성 현상은 von Laue,^[1] Berek,^[2] Lakeman과 Groosmuller,^[3] Schroedinger^[4] 등에 의하여 연구되기 시작하였으며 비록 구체적으로 명시되지는 않았으나 그 초기 단계에는 Michelson^[5]과 같은 광학자들에 의하여도 고찰되었다. 이 연구는 Wiener,^[6] van Cittert,^[7] Zernike,^[8] Hopkins,^[9] Wolf,^[10] Blanc-Lappierre와 Dumontet,^[11] Pancharatnam^[12] 등에 의하여 계승되어 한층 더 발전하였다. 이러한 초기 연구의 결과, 시공간적 두 점에서 요동하는 전자장의 상관관계에 대한 정확한 관측 대상이 설정되었고, 자유 공간에서 상관관계 함수가 만족시키는 동력학적 법칙이 발견되었다. 시공간적 두점사이의 상관관계를 다루기 때문에 이 이론은 2차 이론이라 불리우고, 이는 전통적인 광학의 범주 내에서 잘 알려져 있는 간섭과 편광 현상을 일관된 입장에서 기술하였다.

2차 이론이 형성된 이후, 빛의 강도 사이의 상관관계가 Hanbury Brown과 Twiss^[13]에 의하여 관측되었고, 이는

빛의 전자장이 보이는 2차 이상의 상관관계 효과에 대한 연구를 태동시켰다. Gaussian random process로 간주될 수 있는 열 빛의 전자장에 대하여는 2차 상관관계 함수로 그 빛의 통계적 특성을 기술하는 것이 적합하나, 레이저와 같은 새로운 광원이 창출하는 빛에 대해서는 좀 더 일반적이고, 2차 이상의 상관관계 함수의 도입이 불가피하다.

빛의 전자장을 고전적인 파동으로 취급하는 이론과 함께 양자 역학적 연산자로 취급하는 이론도 병행하여 발달하였다.^[14] 고전적 상관관계 함수에 대응하는 양자 역학적 상관관계 함수가 정의되었고, 이는 생성 또는 소멸 연산자들의 정규 차에 대한 양자 역학적 기대치로 주어진다. 더우기 이렇게 정의된 상관관계 함수는 관측 방법과 연관되어 물리적으로 의미를 갖는다. 양자 역학적 상관관계 함수는 계가 간섭성 상태에 있을 때 고전적 정의와 일치하게 되고, 따라서 양자 광학에서 간섭성 상태는 특별한 관심을 끈다. 간섭성에 대한 고전적 기술과 양자 역학적 기술의 관계는 많은 학자들에 의하여 조사되었다. Sudarshan^[15]은 일반화된 위상 공간에서의 distribution을 이용하여, 양자 역학적 상관관계 함수는 고전적 상관관계 함수와 동등한 꼴로 쓰여질 수 있음을 보였다.

빛의 간섭성 이론에 대한 발달은 기존의 잘못 인식되어 오던 개념 및 사실 들을 수정시켜 주었다. 두 개의 독립적인 레이저 빔 사이의 간섭 현상이 가능하다는 것을 보여주었고, 광자수를 측정하므로써 빛의 스펙트럼에 대한 정보를 얻을 수 있음을 지적하였다. 실제로 두 빛 사이의 맥동 현상^[16]과 독립적인 두 레이저 빔이 보이는 간섭 현상이^[17] 실험적으로 관측되었고, 이들은 고전적으로나 또는 양자 역학적인 간섭성 이론에 의하여 설명될 수 있다.

*원주소: 인하대학교, 물리학과

2. 간섭성에 대한 기본 개념

점 광원 σ 로부터 발생되는 빛이 그림 2.1과 같이 Michelson 간섭계를 통과하여 스크린 B에서 중첩되어 간섭 무늬를 보이는 경우를 생각하자. 빔 splitter에 의하여 나뉜 두 빔은 $\Delta s = c\Delta t$ (c 는 광속도)의 경로차를 갖고 Δs 가 충분히 작으면 스크린 B에 간섭 무늬가 나타난다. 이러한 간섭 무늬가 나타나는 것은 두 빔 사이에 시간적 간섭성이 존재함을 의미한다. 간섭 무늬의 대비는 Δt 에 의존하고, 간섭 무늬는 대략

$$\Delta t \Delta v < 1 \quad (2.1)$$

의 조건이 만족될 때 관측되고, 여기서 Δv 는 실질적인 빛의 선폭을 나타낸다. 시간차 Δt 는 간섭성 시간이라 불리우고, $c\Delta t$ 는 간섭성 길이라 불리운다.

다음으로 Young의 간섭계를 살펴보자. (그림 2.2) 간단하게 대칭적인 기하학적 구조를 생각하기로 하고, 각변의 길이가 Δx 인 정사각형의 형태를 갖는 광원으로 부터 수직 거리 R 되는 지점에 두개의 작은 구멍 P_1 과 P_2 가 뚫려 있다고 가정하자. 구멍 P_1 과 P_2 가 충분히 가까우면 스크린 B 상의 점 P 주위에 간섭 무늬가 나타나고, 이러한 간섭 무늬의 관측으로 공간적 간섭성의 존재를 확인할 수 있다. 역시 간섭 무늬의 대비는 구멍 사이의 간격에 의존하고 점 P 주위의 간섭 무늬는

$$\Delta x \Delta \theta < \lambda_0 \quad (2.2)$$

를 만족시킬 때 관측된다. 여기서 $\Delta \theta$ 는 P_1 과 P_2 가 광원에 대하여 이루는 각도이고, λ_0 는 실질적인 빛의 파장이다.

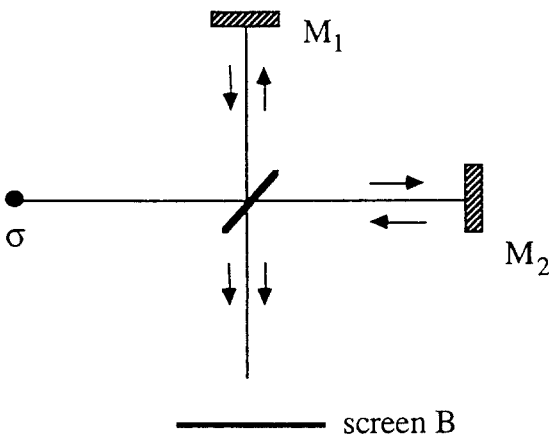


그림 2.1. 간섭성 시간을 기술하기 위한 Michelson 간섭계.

식 (2.2)는 R 을 사용하여 다음의 형태로 쓰일 수 있다.

$$\Delta A = (R\Delta\theta)^2 = R^2(\lambda_0/\Delta x)^2 = (c/v_0)^2 R^2/S \quad (2.3)$$

위 식에서 $S = (\Delta x)^2$ 이다. 이 면적 ΔA 는 간섭성 면적이라 불리우고, 코히어런스 면적은 R 이 커감에 따라 같이 커짐을 알 수 있다.

위에서 정의된 간섭성 길이와 간섭성 면적을 사용하여 다음과 같이 간섭성 부피

$$\Delta V = c\Delta t \Delta A = (c/\Delta v)\lambda_0^2(R/\Delta x)^2 = (R/\Delta x)^2(\lambda_0/\Delta \lambda)\lambda_0^3 \quad (2.4)$$

를 정의할 수 있고, 여기서 $\Delta \lambda = \Delta(c/v_0) = c\Delta v/v_0^2$ 이다. 양자 역학적인 기술과 연관되어 간섭성 시간당 간섭성 면적을 통과하는 동일 편광 상태의 평균 광자수는 특별한 의미를 갖고, 이는 간섭성 부피 안의 평균 광자수가 되며 degeneracy 변수 δ 로 표시한다.^[18]

예를 들어, 흑사 복사체의 degeneracy 변수는

$$\delta = [\exp(h\nu/kT) - 1]^{-1} \quad (2.5)$$

로 주어지고, 주파수 $\nu = 5 \times 10^{14}$ Hz와 온도 $T = 3000^\circ$ K에서 그 수치는 $\delta = 3 \times 10^{-4}$ 의 값을 갖는다. 따라서 식

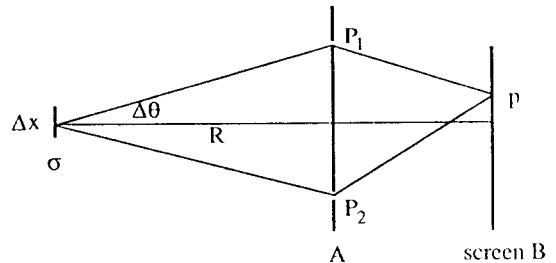


그림 2.2. 간섭성 면적을 기술하기 위한 Young 실험.

표 2.1. 열 광원과 레이저의 특성

	Thermal Source	Laser
Emission	Spontaneous	Stimulated
Bandwidth ($\Delta \nu$)	10^8 c.p.s.	10^2 c.p.s.
Coherence time (Δt)	10^{-8} sec	10^{-2} sec
Coherence length (Δl)	1 meter	10^6 meter
Degeneracy (δ)	10^{-3}	10^{12}
Probability [$p(U)$]	$\exp(-U^2/\sigma^2)$	$(I_\sigma^2 - U^2)^{-1/2}$
$\Delta t/T$	$\ll 1$	$\gg 1$

(2.5)로 기술되는 빛의 degeneracy 변수는 매우 작다. $\delta=1$ 을 얻기 위한 온도는 대략 3×10^{10} K이다. 반면에 레이저의 경우는 상당히 다르다. 보통의 실험실에서 흔히 볼 수 있는 1 mW 출력 He:Ne 레이저를 생각하자. 빔의 단면적을 1 mm²로 두고 중심 파장이 10⁻² cm라 하면, 광자 밀도 ρ 는 약 5×10^7 개/cm³이고 따라서 degeneracy 변수는

$$\delta = \rho \Delta V = 1.5 \times 10^{10} \quad (2.6)$$

으로 레이저 빛은 매우 큰 degeneracy 변수를 가짐을 알 수 있고, 열 빛과 간섭성 측면에서 그 특성이 상이함을 시사한다. 표 2.1은 열 광원과 레이저의 특성을 비교 정리하였다.

3. 고전적 기술과 간섭과 현상^[19]

이 절에서는 2차 간섭성 이론의 정량적인 양들을 정의하고, 이들을 이용하여 간섭 현상을 자세히 기술하기로 하자.

$V^{(r)}(r,t)$ 가 공간의 점 r 과 시각 t 에서의 실변수의 고전적 파동 함수를 나타낸다고 하자. 이 함수는 전자장이나 벡터 potential의 한 성분으로 간주 될 수 있다. 임의의 실제적인 빛을 기술하는 $V^{(r)}$ 은 시간에 대하여 요동하는 함수이고 따라서 그 빛을 기술하는 ensemble의 한 구성 인자로 생각되어, 앞서 언급한 바와 같이 간섭성 효과는 서로 다른 두 시공간적 점들 사이의 상관관계에 의하여 도출되며, 이는 두 점에서의 파동 함수의 곱에 대한 ensemble 평균으로 정량화된다.

본 논문에서 다루는 파동 함수는 stationarity를 만족한다고 가정하여 관측되는 물리량은 시각의 원점에 의존하지 않고, 아울러 ergodicity를 가정하여 ensemble 평균과 시간 평균이 같음을 인정하기로 한다.

이론 전개가 빛의 파동 함수를 복소수화 하므로써 수월하여 지므로, 이를 위하여 실수 파동 함수

$$V^{(r)}(r,t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(r,\nu) \exp(-2\pi i \nu t) d\nu \quad (3.1)$$

에 대응하는 복소 함수

$$V(r,t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} v(r,\nu) \exp(-2\pi i \nu t) d\nu \quad (3.2)$$

를 도입하기로 하자. $V^{(r)}$ 이 실함수이므로

$$v(r,-\nu) = v^*(r, \nu) \quad (3.3)$$

가 되고, $V(r,t)$ 는 complex analytic signal이라 불리우며

$$V(r,t) = V^{(r)}(r,t) + iV^{(i)}(r,t) \quad (3.4)$$

와 같이 두 개의 실함수 $V^{(r)}(r,t)$ 과 $V^{(i)}(r,t)$ 로 나누어 쓸 수 있다. 두 개의 실함수 들은 다음의 Hilbert transform 쌍을 형성한다.

$$V^{(i)}(r,t) = (1/\pi)P \int V^{(r)}(r,t')/(t'-t) dt' \quad (3.5a)$$

$$V^{(r)}(r,t) = -(1/\pi)P \int V^{(i)}(r,t')/(t'-t) dt' \quad (3.5b)$$

위에서 P 는 Cauchy principal value를 나타낸다.

두 시공간적인 점 $P(r,t)$ 와 $P'(r',t')$ 사이의 코리레이션 함수는

$$\Gamma(r,r';t,t') = \langle V^*(r,t)V(r',t') \rangle \quad (3.6)$$

으로 정의되고, 여기서 $\langle \rangle$ 는 ensemble 평균을 의미한다. 앞서 명시한대로 stationarity를 가정하면 Γ 는 t 와 t' 의 차에만 의존하여

$$\Gamma(r,r';t,t') = \Gamma(r,r';\tau) \quad (\tau = t' - t) \quad (3.7)$$

로 둔다. 빛의 간섭성 이론에서 Γ 는 때때로 상호 간섭성 함수라 불리우고, Γ 는 정규격화하여

$$\gamma(r,r';\tau) = \Gamma(r,r';\tau)/[\Gamma(r,r;0)\Gamma(r',r';0)]^{1/2} \quad (3.8)$$

을 정의하고 이를 복소 간섭성 정도로 칭한다. $\Gamma(r,r;0)$ 는 점 r 에서의 빛의 강도의 평균치 $\langle I(r) \rangle$ 을 나타내므로, 식 (3.8)은

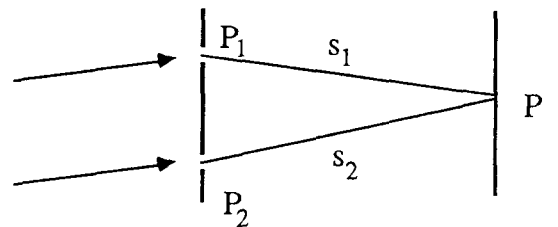
$$\gamma(r,r';\tau) = \Gamma(r,r';\tau)/[\langle I(r) \rangle \langle I(r') \rangle]^{1/2} \quad (3.9)$$

로 다시 쓰일 수 있다. 한편 Schwarz 부등식에 의하여

$$0 < |\gamma| < 1 \quad (3.10)$$

을 얻는다.

이제 위에서 정의된 상관관계 함수 들을 사용하여 이들이 어떻게 실제 관측되는 결과에 적용되는가를 알아보기로 하자. 그림 3.1과 같이 두 개의 빔이 중첩되어



$$t_i = S_i/c$$

그림 3.1. 빛의 간섭 현상을 설명하기 위한 개략도.

간섭 현상을 보이는 실험 장치를 생각하자. 선형 편광된 빛을 가정하여, V 는 편광된 방향으로의 빛의 전장 또는 벡터 potential을 나타내는 것으로 간주한다. 점 P_1 과 P_2 에서의 빛의 파동 함수는 빛을 차단하는 막 A 에 의하여 다른 부분과 결리되어 있어, 스크린 B 상의 한 점 P 에서의 파동 함수는

$$V(r,t) = K_1 V(r_1,t-t_1) + K_2 V(r_2,t-t_2) \quad (3.11)$$

로 주어지고, 여기서 $t_1 = s_1/c$, $t_2 = s_2/c$ 로 빛의 각 점 P_1 과 P_2 로 부터 P 에 도달 하는데 걸리는 시간이다. c 는 광속도이고, K_1 과 K_2 는 P_1 과 P_2 에 위치한 두 구멍의 크기와 기하학적 구조에 의존하는 상수이다.

점 P 에서 시각 t 에서의 빛의 강도는

$$I(r,t) = V^*(r,t)V(r,t) \quad (3.12)$$

로 주어지고, 이는 식 (3.11)을 이용하여

$$I(r,t) = |K_1|^2 I(r_1,t-t_1) + |K_2|^2 I(r_2,t-t_2) + 2\text{Re}\{K_1^* K_2 V^*(r_1,t-t_1)V(r_2,t-t_2)\} \quad (3.13)$$

로 쓰여지고, Re 은 실수 부분을 의미한다. 식 (3.13)에 ensemble 평균을 취하면, stationarity를 가정하여

$$\langle I(r,t) \rangle = |K_1|^2 \langle I(r_1,t-t_1) \rangle + |K_2|^2 \langle I(r_2,t-t_2) \rangle + 2\text{Re}\{K_1^* K_2 \Gamma(r_1,r_2;t_1-t_2)\} \quad (3.14)$$

를 얻는다. 식 (3.14)의 우변 마지막 항의 0이 아니면 점 P 에서의 평균 강도는 단순히 점 P_1 과 P_2 로 부터의 강도의 합이 아니고, 따라서 이러한 경우 두 빔의 중첩은 간섭 현상을 야기시킨다.

간섭 무늬의 대비를 나타내는 양으로

$$\eta(r) = (\langle I \rangle_{\max} - \langle I \rangle_{\min}) / (\langle I \rangle_{\max} + \langle I \rangle_{\min}) \quad (3.15)$$

으로 정의되는 감도 (visibility)가 있다. 편의상 두 점으로부터의 강도가 같다고 가정할 때,

$$\eta(r) = |\chi(r_1,r_2;\tau)| \quad (\tau = t_1 - t_2) \quad (3.15)$$

로 주어져, 감도를 측정하므로써 $|\eta|$ 를 알 수 있고, 빛의 복소 간섭성 정도가 1에 가까울수록 더욱 선명한 간섭 무늬를 관측할 수 있다.

위에서 간섭 현상을 기술하기 위하여 2차 상호 간섭성 함수를 사용하였으나, 더욱 복잡한 상관관계 현상을 규명하기 위하여는 2차 이상의 간섭성 함수의 도입이 필요하고, 일반적 간섭성 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma^{[N,M]}(x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_{N+M}) = \langle V^*(x_1)V^*(x_2)\dots V^*(x_N)V(x_{N+1})V(x_{N+2})\dots V(x_{N+M}) \rangle \quad (3.17)$$

여기서 x_i 는 (r_i,t_i) 의 4차원적 좌표를 나타낸다. 열 빛과 같은 혼돈한 빛에 대하여는 위의 고차 상호 간섭성 함수는 2차 간섭성 함수의 곱으로 표시되므로 식 (3.17)의 정의는 불필요하나, 레이저와 같은 새로운 빛에서는 이러한 고차 간섭성 함수에 의하여 기술되는 상관관계 현상이 다양하게 존재한다. 특히

$$\Gamma^{[2,2]}(x_1,x_2,x_1,x_2) = \langle V^*(x_1)V^*(x_2)V(x_1)V(x_2) \rangle \quad (3.18)$$

로 표현되는 빛의 강도에 대한 상관관계는 양자 역학적 이론과 비교하여 여러 비고전적 빛의 특성을 고찰하는데 사용되고 있다.

4. 공간-주파수 영역에서의 간섭성 이론^[20,21]

앞 절에서 기술한 고전적 간섭성 이론은 공간-시간 영역에서 정의된 상관관계 함수 들을 이용하였다. 그러나, 빛의 stationarity를 가정하면 서로 다른 주파수 성분 사이의 간섭성은 없다. 이를 보이기 위하여 상호 간섭성 함수의 각 시간 변수에 대한 Fourier transform을 계산하여 보면

$$\begin{aligned} W(r_1,r_2;\omega_1,\omega_2) &= (1/2\pi)^2 \iint \Gamma(r_1,r_2;t_1,t_2) \\ &\quad \exp(i\omega_1 t_1) \exp(i\omega_2 t_2) dt_1 dt_2 \\ &= (1/2\pi) \int \Gamma(r_1,r_2;\tau) \exp(i\omega_1 \tau) \\ &\quad d\tau \delta(\omega_1 - \omega_2) \end{aligned} \quad (4.1)$$

을 얻게 되고, 여기서 delta 함수가 위에서 언급한 내용을 시사한다. 식 (4.1)에서 $\omega = 2\pi\nu$ 이고, 앞으로는 이를 사용하기로 한다. 한편, 빛과 매질 사이의 상호 작용을 다룰 때, 그 관계식은 일반적으로 주파수에 의존한다. 예를 들어 전장에 의하여 매질이 편광될 때, 그 관계는

$$P(\omega) = \chi(\omega)E(\omega) \quad (4.2)$$

로 주어지고, $\chi(\omega)$ 는 electric susceptibility라 불리우며 주파수 ω 에 의존한다.

식 (4.2)를 시간에 대하여 나타내면

$$P(t) = \int \chi(t-t')E(t')dt' \quad (4.3)$$

의 convolution의 형태를 취하게 되어, 식 (4.2)에 의한 주파수 별로 분석하는 것이 선호된다.

식 (4.1)에 의하여 정의된 함수 W 는 상호 분광 밀도라고 칭하고, 이를 정규격화하여 복소 분광 간섭성의 정도를 다음과 같이 정의한다.

$$\mu(r,r';\omega) = W(r,r';\omega) / [W(r,r;\omega)W(r',r';\omega)]^{1/2} \quad (4.4)$$

역시 μ 도 γ 와 마찬가지로 부등식

$$0 < |\mu| < 1 \tag{4.5}$$

를 만족시킨다.

여기서 공간-시간 영역에서의 간섭성 함수 들과 공간-주파수 영역에서의 함수 들 사이의 관계를 명확히 알아 볼 필요가 있다. 빛의 stationarity를 가정하였으므로, 빛을 묘사하는 ensemble 내의 과도 함수는 Fourier transform 짝을 갖지 못한다. 다시 말하여

$$v(r, \omega) = (1/2\pi) \int V(r, t) \exp(i\omega t) dt \tag{4.6}$$

으로 정의되는 $V(r, t)$ 의 시간에 대한 Fourier transform 짝은 보통의 함수 개념 내에서는 그 의미를 갖지 못하고, 이는 stationarity의 가정으로 $|V(r, t)|^2$ 가 시간에 대하여 유한한 적분치를 갖지 않음에서 기인한다.^[22] 따라서 식 (4.6)은 형식적인 표현에 그치고, 함수의 확장된 개념인 distribution 내에서만 그 의미를 갖는다.^[23]

한편, 식 (4.1)은 보통의 함수 이론 내에서 잘 정의되고, 그 역 Fourier transformation은

$$\Pi(r_1, r_2; \tau) = \int W(r_1, r_2; \omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega \tag{4.7}$$

로 주어진다. 이는 $\Pi(r_1, r_2; \tau)$ 가 두 시각의 차인 τ 에 대하여 square integrable 하기 때문이다.

위의 내용으로 W 를 도출하는 ensemble이 식 (4.6)으로 표현되는 v 가 아님은 명백하다. 이는 단순히 식 (4.6)이 형식적인 표현일 뿐 그외의 아무런 의미를 갖지 않기 때문이다. 그러나 우리는 임의로 W 의 ensemble을 설정할 수 있고, 또한 특정 조건을 부여하므로써 유일한 W 에 대한 ensemble을 얻어 낼 수 있으며, 이를 간섭성 모우드 표현이라 부른다.^[24]

간섭성 모우드 표현을 위한 제조건 들은 다음과 같다.

$$\iint_D |W(r_1, r_2; \omega)|^2 dr_1 dr_2 < \infty \tag{4.8}$$

$$W^*(r_1, r_2; \omega) = W(r_2, r_1; \omega) \tag{4.9}$$

$$\int_D \int_D f^*(r_1) W(r_1, r_2; \omega) f(r_2) dr_1 dr_2 \geq 0 \tag{4.10}$$

식 (4.8)은 W 가 Hilbert-Schmidt kernel임을 의미하고, 식 (4.9)는 hermitian임을 의미하며, 식 (4.10)은 non-negative definite임을 나타낸다. 적분 기호의 첨자 D 는 유한한 적분 구역을 의미한다. 이러한 조건하에, Mercer의 전개 정리에 의하여 W 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

[25]

$$W(r_1, r_2; \omega) = \sum_n \lambda_n(\omega) \phi_n^*(r_1; \omega) \phi_n(r_2; \omega) \tag{4.11}$$

$\{\phi_n\}$ 과 $\{\lambda_n\}$ 은 다음의 관계를 만족시킨다.

$$\int_D W(r_1, r_2; \omega) \phi_n(r_1; \omega) dr_1 = \lambda_n(\omega) \phi_n(r_2; \omega) \tag{4.12}$$

$$\int_D \phi_n^*(r; \omega) \phi_m(r; \omega) dr = \delta_{nm} \tag{4.13}$$

$$\lambda_n(\omega) > 0 \tag{4.14}$$

식 (4.11)에서 우변의 각 항은 r_1 만의 함수와 r_2 만의 함수의 곱으로 주어지므로 식 (4.4)의 정의에 의하여 그에 상응하는 $|\mu| = 1$ 이 되어 공간적으로 완전히 간섭성 성분이다. 이러한 의미에서 식 (4.11)전개를 간섭성 모우드 전개라 칭하고, 그 전개 기본 함수들인 $\{\phi_n\}$ 을 모우드라 부른다.

공간-주파수 영역에서 W 의 ensemble을 찾기 위하여

$$u(r, \omega) = \sum_n a_n(\omega) \phi_n(r; \omega) \tag{4.15}$$

의 선형 조합을 생각하자. 여기서 $a_n(\omega)$ 는 random 변수로서 그들 사이의 상관관계는

$$\langle a_n^*(\omega) a_m(\omega) \rangle = \lambda_n(\omega) \delta_{nm} \tag{4.16}$$

으로 둔다. 식 (4.15)와 (4.16)을 이용하여

$$\langle u^*(r_1, \omega) u(r_2, \omega) \rangle = W(r_1, r_2; \omega) \tag{4.17}$$

을 얻을 수 있어, 식 (4.15)로 주어지는 u 의 ensemble은 주어진 상호 분광밀도 W 를 묘사하는 ensemble로 생각되고, random 변수들인 $\{a_n\}$ 을 설정함에 있어서 아직 그 임의성은 잔존한다. 그러나 이러한 임의성은 물리적으로 별 의미를 갖지 못하므로 여기서는 더 이상 문제 삼지 않기로 한다.

위의 간섭성 모우드 표현을 얻기 위하여 식 (4.8)-(4.10)의 세조건이 필요하였다. 그 중 (4.9)와 (4.10)은 상호 분광 밀도의 고유 성질이고, 따라서 실제적인 제약은 식 (4.8)에 의한 것이다. 일반적으로 광원의 상호 분광 밀도는 유한한 구역에서 정의되므로 식 (4.8)을 만족시키나, 그러한 광원으로 부터 발생하는 장의 상호 분광 밀도는 식 (4.8)의 적분치가 발산하는 경우가 대부분이다. 이러한 경우 Mercer의 전개 정리가 직접적으로 적용되지 않아 수학적 테크닉을 구사하여야 한다. 예를 들어, 공간에 속하는 임의의 유한한 구역 D_1 을 설정하여 이 구간에서의 간섭성 모우드 표현을 얻고, 다시 D_1 을 포함하는 더 넓은 구역 D_2 에서의 간섭성 모우드 표현을 구하면, 이 두 간섭성 모우드 전개식의 모우드 함수들은 일대일 대칭을

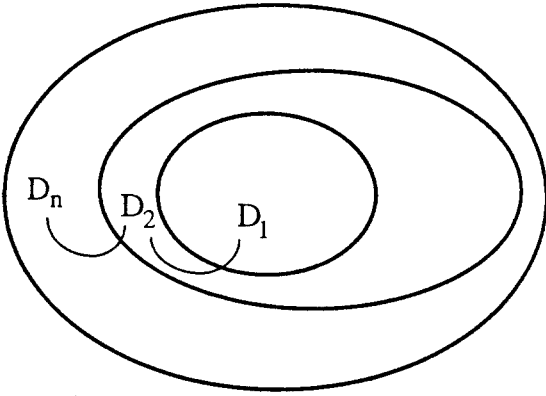


그림 4.1. Hilbert-Schmidt kernel이 아닌 경우, 정의의 영역의 확장 구조.

이룬다. (그림 4.1) 물론 구체적인 모우드 함수의 형태는 달라지지만 전체적인 구조는 변함이 없다. 즉, 모우드의 수는 영역의 크기에 관계 없이 일정하고 영역의 확장에 따른 함수의 확장은 analytic continuation과 같은 개념으로 받아 드릴 수 있으며, 그에 대한 연구는 진행 중이다.

간섭성 모우드 전개를 통하여 주어진 상호 분광 밀도로 묘사되는 파동의 entropy를 정의할 수 있다.^[26] 이를 위하여 $\{\lambda_n\}$ 을 정규격화하여

$$A = \sum_n \lambda_n \quad (4.18)$$

$$p_n = \lambda_n / A \quad (4.19)$$

으로 쓰면, p_n 은 양의 실수이고 그 합은 1 이므로 Shannon의 정의에 따라 entropy S는

$$S = - \sum_n p_n \log p_n \quad (4.20)$$

으로 쓰여진다.^[27] 식 (4.20)으로 부터 $S=0$ 인 경우는 어떤 특정 $p_n=1$ 이고 다른 값들은 0이 되는 때이므로 식 (4.4)의 정의에 의하여 $|\mu|=1$ 이 되어 완전한 간섭성을 나타낸다. 반대로 entropy의 최대치는 모든 p_n 이 같은 값 p_0 를 가질 경우이고, 이 때 모우드 함수들이 complete set을 형성하면

$$W(r_1, r_2; \omega) = p_0 A \sum_n \phi_n^*(r_1; \omega) \phi_n(r_2; \omega) \sim \delta(r_1 - r_2) \quad (4.21)$$

을 얻고 따라서 가장 간섭성이 적은 경우를 나타낸다.

불완전한 간섭성의 예로 다음의 Bessel-correlated 상호 분광 밀도를 생각하여 보자.^[28]

$$W(r_1, r_2; \omega) = A(\omega) j_0(\alpha |r_1 - r_2|) \theta(r_1 - a) \theta(r_2 - a) \quad (4.22)$$

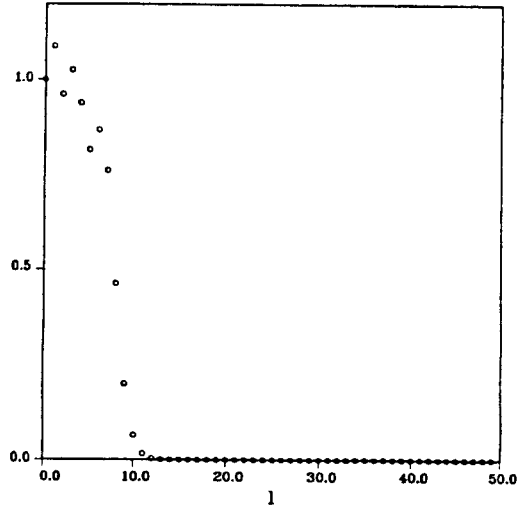


그림 4.2. Bessel-correlated 광원의 간섭성 모우드 전개에서의 고유치 분포 ($\alpha a=10$).

$A(\omega)$ 는 상수이고, j_0 는 0차 spherical Bessel 함수이며, θ 함수는 상호 분광 밀도의 정의의 영역이 반경 a 인 구임을 나타낸다. 상호 분광 밀도의 정의의 영역의 갖는 선형 길이는 a 로 주어지고, 그 안에서의 상관관계 길이는 대략 $1/\alpha$ 로 주어지게 되므로, 그 둘 사이의 비인 αa 에 의하여 Bessel-correlated 광원 또는 장의 간섭성 특성이 결정된다고 예상된다. 위의 상호 분광 밀도에 대한 간섭성 모우드 표현의 모우드 함수 $\{\phi_m\}$ 과 그에 해당하는 고유치 $\{\lambda_m\}$ 은 다음과 같이 계산된다.

$$\phi_m = \theta(r - a) (4\pi/\lambda_m)^{1/2} j_l(\alpha r) Y_{lm}(\Omega) \quad (4.23)$$

$$\lambda_m = 2\pi A(\omega) \alpha^3 [j_l^2(\alpha a) - j_{l-1}(\alpha a) j_{l+1}(\alpha a)] \quad (4.24)$$

l 은 0 또는 자연수이고, m 은 $-l < m < l$ 을 만족하는 정수이다. 식 (4.24)로 표현되는 고유치는 각 모우드의 상호 분광 밀도에 기여하는 강도를 나타내고, 식 (4.20)으로 정의된 entropy와 관련되어 0이 아닌 고유치를 갖는 모우드 수가 많으면 많을수록 간섭성의 정도는 낮다고 할 수 있다. 그림 4.2와 4.3에 $\alpha a=10$ 인 경우와 $\alpha a=100$ 인 경우에 대하여 모우드에 따른 고유치의 크기를 나타내었다. 예상대로 αa 가 클 때, 고유치는 더 많은 모우드에 대하여 0이 아니고 따라서 αa 가 작을수록 더 간섭성이 큼을 알 수 있다.

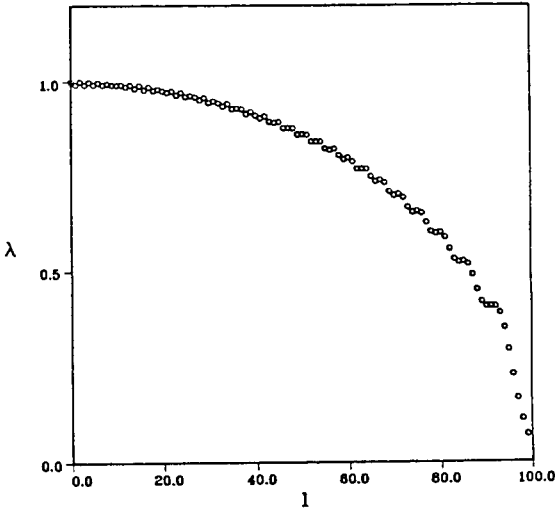


그림 4.3. Bessel-correlated 광원의 간섭성 모우드 전개에서의 고유치 분포 ($\alpha\alpha=100$).

5. 간섭성의 발생과 전파^[29,30]

광원 Q로 부터 발생하는 장 V는 다음의 미분 방정식을 만족시킨다.

$$\{\Delta - (d/cdt)^2\}V(r,t) = -(4\pi)Q(r,t) \tag{5.1}$$

따라서 광원과 장의 상호 간섭성 함수 들은

$$\{\Delta_1 - (d/cdt)^2\} \{\Delta_2 - (d/cdt)^2\} \Gamma_V(r_1, r_2; \tau) = (4\pi)^2 \Gamma_Q(r_1, r_2; \tau) \tag{5.2}$$

을 만족시키고, 여기서 광원과 장의 stationarity를 가정하였다. τ 에 대하여 Fourier transformation을 취하여 상호 분광 밀도가 만족시키는 미분 방정식을 구하면

$$\{\Delta_1 + k^2\} \{\Delta_2 + k^2\} W_V(r_1, r_2; \omega) = (4\pi)^2 W_Q(r_1, r_2; \omega) \tag{5.3}$$

을 얻는다.

우선 자유 공간에서의 간섭성의 전파를 알아 보기로 하자. 이 경우 2차 광원을 생각하여 그림 5-1과 같이 장이 $z>0$ 인 반공간으로 전파되어 나가는 상황을 다루기로 한다. 물론 전파되어 나가는 반공간에는 다른 광원이 없고, 따라서 이 문제는 경계치 문제화 하며 그 해는

$$W(r_1, r_2; \omega) = (1/2\pi)^2 \int_{(z=0)} \int (dG_1^*/dz_1) W(s_1, s_2; \omega) (dG_2/dz_2) ds_1 ds_2 \tag{5.4}$$

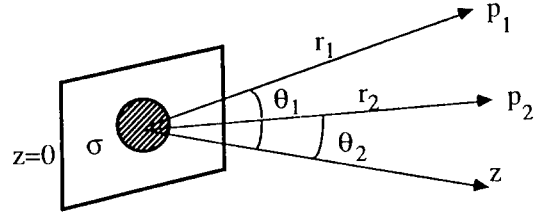


그림 5.1. 2차 광원으로 부터 장의 간섭성의 발생과 전파.

$$G_i = \exp(ik |r_i - s_i|) / |r_i - s_i| \tag{5.5}$$

으로 주어진다.^[31] 식 (5.5)를 그림 5.1에 나타나 있는 각도 $\theta_1, \theta_2, R_1, R_2$ 로 다시 쓰면

$$W(r_1, r_2; \omega) = (1/2\pi)^2 \int_{(z=0)} \int W(s_1, s_2; \omega) [k^2 + ik(R_2^{-1} - R_1^{-1}) + (R_1 R_2)^{-1}] \times \{\exp[ik(R_2 - R_1)] / R_1 R_2\} \cos\theta_1 \cos\theta_2 ds_1 ds_2 \tag{5.6}$$

을 얻고, 관측점들 r_1, r_2 가 파장 $\lambda=2\pi/k$ 보다 매우 큰 경우는 식 (5.6)는 근사적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W(r_1, r_2; \omega) = (k/2\pi)^2 \int_{(z=0)} \int W(s_1, s_2; \omega) \{\exp[ik(R_2 - R_1)] R_1 R_2\} \cos\theta_1 \cos\theta_2 ds_1 ds_2 \tag{5.7}$$

특히 광원으로 부터 먼 곳에서의 상호 분광 밀도는 $R_i = r_i$ 로 놓을 수 있어 식 (5.7)은 더욱 간단하여져

$$W^{[\infty]}(r_1, r_2; \omega) = (2\pi k)^2 \overline{W}^{[0]}(kq_{1\perp}, kq_{2\perp}; \omega) \exp[ik(r_2 - r_1)] / r_1 r_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \tag{5.8}$$

이 얻어진다. 여기서 위첨자 $[\infty]$ 와 $[0]$ 는 관측면과 광원면을 각각 의미하고 \overline{W} 는 W의 Fourier transform을 의미한다. $q_{1\perp}, q_{2\perp}$ 는 그림에 나타난 단위 벡터 q_1, q_2 의 광원면 상의 투영 성분들을 표시한다. 식 (5.8)은 광원면으로부터 먼 곳에서 장의 간섭성 특성은 광원면에서의 상호 분광 밀도의 특정 Fourier 성분에만 의존하며, 이 특정 성분은 관측점 들의 광원면에 대한 각도에 의하여 결정된다.

1차 광원의 경우도 마찬가지로 계산할 수 있고, 이 경우 식 (5.3)에 의하여 광원으로 부터 발생하는 장의 상호 분광 밀도는

$$W_V(r_1, r_2; \omega) = (1/2\pi)^2 \int_D \int G_1^* W_Q(\rho_1, \rho_2; \omega) G_2 d\rho_1 d\rho_2 \tag{5.9}$$

$$G_i = \exp(ik |r_i - \rho_i|) / |r_i - \rho_i| \quad (5.10)$$

로 주어진다. (그림 5.2) 식 (5.9)의 적분은 식 (5.4)에서와는 달리 3차원에서의 적분이다. 역시 같은 과정을 거쳐, 광원으로 부터 먼 곳에서의 장의 상호 분광 밀도는

$$W_V^{[x]}(r_1, r_2; \omega) = (2\pi k)^2 \overline{W}_Q(kq_1, kq_2; \omega) \{ \exp[ik(r_2 - r_1)] / |r_1 r_2| \} \quad (5.11)$$

로 주어진다. 식 (5.11)은 식 (5.8)과 유사한 분석이 가능하다,

$$\overline{W}_Q(kq_1, kq_2; \omega) = 0 \text{ for all } q_1 \text{ and } q_2 \quad (5.12)$$

의 특별한 경우에는 장의 상호 분광 밀도는 광원의 영역 밖에서는 존재하지 않고 이러한 광원을 무방출 광원이라 칭한다.^[32,33] 주어진 광원이 무방출 광원이기 위하여 광원의 상호 분광 밀도의 모든 Fourier 성분이 0이 될 필요가 없고 각 Fourier 변수 공간에서 원점으로 부터의 거리가 k 인 성분만이 0임으로 충분하다는 사실은 주지하여야 한다.

식 (5.8)가 (5.11)의 공통된 결과는, 만일 r_1 과 r_2 가 같은 방향을 가지면, 식 (4.4)로 정의된 복소 분광 간섭성의 정도는

$$\mu^{[x]}(r_1, r_2; \omega) = \exp[ik(r_2 - r_1)] \quad (5.13)$$

로 계산되고, 따라서 광원으로 부터 먼 두 지점이 같은 ray 상에 위치하면 그들 사이의 간섭성은 완벽하다. 또한 일반적인 $\mu^{[x]}$ 의 형태는

$$\mu^{[x]}(r_1, r_2; \omega) = \overline{W}^{[0]}(kq_{1\perp}, kq_{2\perp}; \omega) / \{ \overline{W}^{[x]}(kq_{1\perp}, kq_{1\perp}; \omega) \}$$

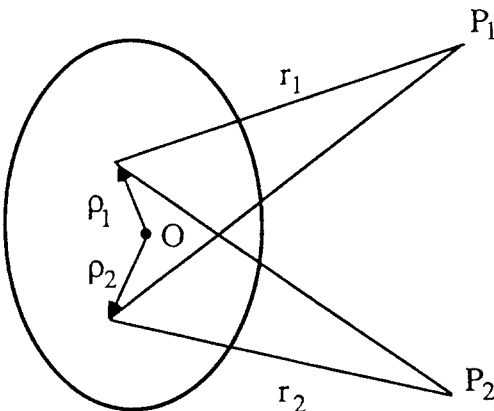


그림 5.2. 1차 광원으로 부터 장의 간섭성의 발생과 전파.

$$\overline{W}^{[0]}(kq_{2\perp}, kq_{2\perp}; \omega) \}^{1/2} \quad (5.14)$$

혹은

$$\mu^{[x]}(r_1, r_2; \omega) = \overline{W}_Q(kq_1, kq_2; \omega) / \{ \overline{W}_Q(kq_1, kq_1; \omega) \overline{W}_Q(kq_2, kq_2; \omega) \}^{1/2} \quad (5.15)$$

로 주어져 거리 r_1 과 r_2 에 무관하다. 식 (5.14)와 (5.15)는 광원으로 부터 발생된 장의 간섭성은 전파하면서 생성 발전됨을 보여주고, 특히 완전히 비간섭성한 광원에서 발생하는 빛도 그로 부터 상당히 먼 곳으로 전파되는 동안 어느 정도의 간섭성이 생겨날 수 있음을 시사한다. 근본적으로 이러한 간섭성의 생성은 독립된 두 점광원에서 발생한 빛은 거리가 멀어질수록 그 광원 사이의 거리차로 부터 기인하는 위상차가 사라지므로 유한한 거리차를 갖는 두 관측점에서 보는 빛의 파동 함수는 매우 흡사하여 질 수 있다는 소위 간섭성과 통계적 유사성 원리에 입각하여 설명될 수 있다.

광원의 간섭성 길이가 극단적으로 0이라 하더라도, 그로 부터 발생되는 장의 간섭성 길이는 적어도 장의 파장에 해당하는 길이보다 작을 수 없고, 또한 파장보다 작은 광원의 간섭성 길이는 구별될 수 없으며, 이는 균등적이고 isotropic 광원의 경우 일반적으로 증명되었다. 따라서 혹사 복사체의 간섭성 특성을 얻기 위하여 광원은, 보통 가정하는, 완전히 비간섭성일 필요가 없이 준균등적이고, isotropic하다는 넓은 가정만으로 족하다.^[34]

4점에서 소개한 간섭성 모우드 전개를 이용하면 주어진 광원으로 부터 발생되는 장의 상호 분광 밀도 함수를 쉽게 얻을 수 있다. 편의상 1차 광원의 경우를 고려하기로 하고, 광원의 간섭성 모우드 전개가

$$W_Q(r_1, r_2; \omega) = \sum_n \lambda_n(\omega) \phi_n^*(r_1; \omega) \phi_n(r_2; \omega) \quad (5.16)$$

으로 주어졌다고 가정하며, 광원의 구역은 D 로 유한하다고 생각한다. 식 (5.16)을 식 (5.9)에 대입하면 곧 장의 상호 분광 밀도는 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$W_c(r_1, r_2; \omega) = \sum_n \lambda_n(\omega) \Psi_n^*(r_1; \omega) \Psi_n(r_2; \omega) \quad (5.17)$$

$$\Psi_n(r; \omega) = \int_D \{ \exp(ik |r - r'|) / |r - r'| \} \phi_n(r'; \omega) dr' \quad (5.18)$$

식 (5.17)은 거의 간섭성 모우드 전개의 형식을 갖고 있으나, 그 모우드 함수들 $\{ \Psi_n \}$ 이 서로 직교하지 않고 이는 식 (5.8)의 적분 kernel이 unitarity를 만족시키지

않음에서 유래된다. 뿐만 아니라 앞서 언급하였듯이 장의 상호 분광 밀도가 Hilbert-Schmidt kernel이 되지 못하므로 이의 간섭성 모우드 전개를 얻는데는 수학적 인 미묘함이 결부되어 있다. 그럼에도 불구하고 식 (5.17)은 실제적인 적용에 많은 이점을 준다.

실제적으로 간섭성 모우드 전개를 응용하는 예로 레이저 모우드의 간섭성 특성을 살펴 보자.^[35] 그림 5.3과 같이 두 개의 거울 사이에서 반사되면서 전파하는 빛을 생각하고 이 때 전파하는데 연관된 kernel을 L 로 두기로 하자. 우리는 L 의 정확한 형태는 필요로 하지 않는다. 초기 조건으로 거울 A에서 장의 상호 분광 밀도가 $W_0(\rho_1, \rho_2, \omega)$ 로 주어졌다고 가정하자. 빛이 거울 B에 반사하여 다시 A에 도달하였을 때의 상호 분광 밀도를 W_1 , 그리고 이와 같은 방법으로 W_n 을 표기하면, W_n 사이에는 다음의 관계식이 성립한다.

$$W_{n+1}(\rho_1, \rho_2; \omega) = \int_A \int_A \xi^*(\rho_1, \rho_1', \omega) W_n(\rho_1, \rho_2, \omega) L^*(\rho_2, \rho_2', \omega) d\rho_1' d\rho_2' \quad (5.19)$$

특히 정상 상태에서는

$$W_{n+1}(\rho_1, \rho_2, \omega) = \alpha(\omega) W_n(\rho_1, \rho_2, \omega) \quad (5.20)$$

을 만족하고 kernel L 의 이중 수직전개

$$L(\rho_1, \rho_2, \omega) = \sum_n \alpha_n(\omega) \xi_n(\rho_1, \omega) \xi_n^*(\rho_1, \rho_2, \omega) \quad (5.21)$$

를 이용하면,^[36] 모우드의 degeneracy가 없는 경우 정상 상태의 해는

$$W_k(\rho_1, \rho_2; \omega) = \alpha_k(\omega) \xi_k^*(\rho_1, \omega) \xi_k(\rho_1, \omega) \quad (5.22)$$

$$\alpha_k(\omega) = |a_k(\omega)|^2 \quad (5.23)$$

로 주어져 단인 모우드로 구성된 완전한 간섭성을 보이는 상호 분광 밀도가 도출됨을 알 수 있다. 실제적으로 정상 상태에 근사적으로 도달하기 까지 빛은 불과 2-3 번의 반사만을 거듭하는 것으로 충분한 것으로 알려져 있다.

6. 양자 역학적 간섭성 이론

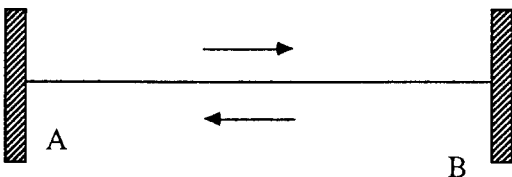


그림 5.3. 레이저 공진기 내에서의 빛의 전파.

앞서 서론에서 언급하였듯이 빛의 간섭성 특성을 양자 역학적으로 기술함에 있어서는 생성 또는 소멸 연산자들의 함수로 관측 대상인 연산자를 정규 차례로 정리하고, 이를 주어진 빛의 밀도 행렬에 대한 기대치를 계산한다. 이 때 밀도 행렬을 간섭성 상태로 전개할 수 있음이 알려져 있고, 이를 이용하여 양자 역학적 기대치는 광학적 동일 정리에 의하여 고전 확률적 계산과 그 형태가 동일하여 앞 절에서 얻은 결과들과 일대일 대응을 이룬다. 주어진 빛의 밀도 행렬을 간섭성 상태로 전개하여

$$\rho = \int \phi(v) |v\rangle \langle v| dv \quad (6.1)$$

을 얻었다고 가정하고, 여기서 $|v\rangle$ 는 간섭성 상태로 소멸 연산자의 고유 상태이고 $\phi(v)$ 는 준확률 밀도 함수라고 부른다. 생성과 소멸 연산자의 함수로 주어지는 연산자 $f(a, a^+)$ 의 정규 차례를

$$:f(a, a^+): = \sum_{nm} c_{nm} a^{+n} a^m \quad (6.2)$$

로 쓰면, 광학적 동일 정리는

$$\langle :f(a, a^+): \rangle = \int f(v, v^*) \phi(v) dv = \langle f(v, v^*) \rangle. \quad (6.3)$$

으로 주어진다.^[37] 식 (6.3)의 우변이 고전 확률적 해석과 상이한 점은 준확률적 밀도 함수 $\phi(v)$ 가 때로는 음이거나 매우 singular한 함수 꼴일 수 있다는 것이다. 일반적으로 $\phi(v)$ 가 고전 확률 밀도 함수의 제조건을 만족시킬 때 양자 역학적 결과는 그에 상응하는 고전적 결과를 갖게 되고, 이는 역으로 빛이 보이는 비고전적 현상을 규명하는 데 이용되어 왔다.^[38-40]

양자 역학적 기술에서 전장 또는 벡터 potential 연산자는

$$F^{(1)}(r, t) = \sum_k a_k u_k(r) \exp(-i\omega_k t) + H.C. \quad (6.4)$$

의 형태를 갖고, 고전 간섭성 이론에서 도입하였던 complex analytic signal에 해당하는 연산자

$$F(r, t) = \sum_k a_k u_k(r) \exp(-i\omega_k t) \quad (6.5)$$

를 정의할 수 있다. 이를 이용하여 2차 상호 간섭성 함수는

$$\Pi(r_1, r_2; t_1, t_2) = \langle F^+(r_1, t_1) F(r_2, t_2) \rangle \quad (6.6)$$

으로 정의되고, 식 (6.5)와 그의 hermitian 짝을 대입하여

$$\Pi(r_1, r_2; t_1, t_2) = \sum_k \sum_{k'} Tr[\rho a_k^+ a_{k'}] u_k^*(r) u_{k'}(r) \exp[i(\omega_k t - \omega_{k'} t')] \quad (6.7)$$

을 얻는다. ρ 가 정상 상태의 빛을 묘사하는 경우, ρ 는

장의 해밀토니안 H_0 와 commute하므로

$$\rho = \exp(-iH_0 t) \rho \exp(iH_0 t) \quad (6.8)$$

이 되어, 식 (6.7) 속의 trace 부분은

$$\text{Tr}\{\rho a_k^- a_k^-\} = \text{Tr}\{\rho a_k^+ a_k^+\} \exp[i(\omega_k - \omega_k')t] \quad (6.9)$$

을 만족시켜 고전적으로 얻어진 stationarity의 결과가 다시 얻어진다. 즉 서로 다른 주파수 성분 사이의 간섭성은 없다. $k=k'$ 인 경우, $\text{Tr}\{\rho a_k^- a_k^-\}$ 은 k -모우드의 광자수를 나타내므로

$$\text{Tr}\{\rho a_k^- a_k^-\} = \langle n_k \rangle \delta_{kk'} \quad (6.10)$$

으로 간단하게 쓸 수 있어, 양자 역학적 2차 상호 간섭성 함수는

$$\Pi(r_1, r_2; t_1, t_2) = \sum_k \langle n_k \rangle u_k^*(r) u_k(r) \exp[i\omega_k(t-t')] \quad (6.11)$$

로 주어진다. 한편 광학적 동일 정리에 의하여

$$\Pi(r_1, r_2; t_1, t_2) = \sum_k \langle |v_k|^2 \rangle u_k^*(r) u_k(r) \exp[i\omega_k(t-t')] \quad (6.12)$$

가 얻어지므로, 식 (6.11)과 (6.12)를 비교하여

$$\langle n_k \rangle = \langle |v_k|^2 \rangle_0 \quad (6.13)$$

의 관계가 성립함을 알 수 있다. $\langle |v_k|^2 \rangle_0$ 는 빛의 강도 평균치를 나타내므로 빛의 강도는 그 빛이 포함하는 광자수와 일치함을 보여준다.

편의상 단일 광자 모우드를 생각하기로 하고, 빛이 n 개의 광자를 포함하는 확률을 $p(n)$ 이라 놓으면,

$$\langle n \rangle = \sum_n n p(n) \quad (6.14)$$

로 계산되고, 간섭성 상태를 Fock 상태로 전개하므로써

$$\begin{aligned} p(n) &= \int \phi(v) \langle n | v \rangle \langle v | n \rangle dv \\ &= \int \phi(v) \exp(-|v|^2) (|v|^{2n}/n!) dv \end{aligned} \quad (6.15)$$

을 얻는다. 식 (6.15)에서 $\exp(-|v|^2) (|v|^{2n}/n!)$ 는 결코 음이 될 수 없으므로, 만일 $\phi(v)$ 가 진짜 확률 밀도 함수라면 $\phi(v) = \delta(v)$ 인 경우를 제외하고는 $p(n) = 0$ 이면 그러한 빛은 비고전적 특성을 갖는다.^[41] 식 (6.15)의 확률 밀도 함수를 이용하여 광자수에 대한 분산을 계산할 수 있고, 준확률 밀도 함수를 사용하여

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle + \langle (\Delta |v|^2)^2 \rangle_0 \quad (6.16)$$

으로 쓰여진다. 따라서 진짜 확률 밀도 함수에 대하여는 $\langle (\Delta |v|^2)^2 \rangle_0$ 이 음이 될 수 없고,

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle \quad (6.17)$$

이 Poisson 분포의 특징임을 주지하여 sub-Poisson 광분포를 보이는 빛은 비고전적 빛임을 알 수 있다. 그 대표적인 예는 Fock 상태로서

$$\langle (\Delta |v|^2)^2 \rangle_0 = -\langle n \rangle \quad (6.18)$$

의 극단적인 상황을 보여준다. Sub-Poisson 광통계는 양자 역학적 squeezing 현상의 한가지 예로 광자수와 위상간의 squeezing을 나타낸다. 한편 전자장의 두 quadrature 간의 squeezing도 많이 연구되었으며, 특히 그들 간의 연관성도 조사되었다.^[42,43]

빛의 파동-입자 양면성과 관련되어 식 (6.16)은 재미있는 물리적 의미를 내포하고 있다.^[44] 생성 및 소멸 연산자의 commutation 관계

$$[a, a^+] = 1 \quad (6.19)$$

를 이용하여, 광자수의 분산은

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n \rangle + \langle :(\Delta n)^2: \rangle \quad (6.20)$$

으로 쓸 수 있고, $\langle :(\Delta n)^2: \rangle$ 은 빛을 고전적 파동으로 취급하였을 때에도 잔존하는 항이므로 이는 양자 역학적 측면에서 빛의 파동성을 나타내는 항으로 간주할 수 있다. 한편, 식 (6.20)의 우변 첫 항인 $\langle n \rangle$ 은 commutation 관계로 나타났고, 따라서 빛의 입자성을 함축적으로 내포하고 있다. 위에서 sub-Poisson 광분포는 $\langle :(\Delta n)^2: \rangle$ 이 음일 때 나타나고, 이는 빛의 파동성이 부정적으로 나타나는 것으로 해석될 수 있다.

고전적 간섭성 이론과 양자 간섭성 이론의 차이점은 고차 간섭성 함수로 확장되면서 매우 다양하게 나타난다. 서로 다른 시각에 2개의 광자를 발견할 확률은 4차 상호 간섭성 함수 또는 빛의 강도 사이의 상관관계 함수로 주어진다. 관측 과정과 연관되어

$$P_2(t, t + \tau) = \langle T : I(t) I(t + \tau) : \rangle = \langle I^2 \rangle [1 + \beta(\tau)] \quad (6.21)$$

로 쓸 수 있고, T 는 시간에 대한 순서를 결정하는 연산자이다. 고전적으로, 식 (3.9)에 의하여

$$\beta(\tau) = |\gamma(0)\gamma(\tau)|^2 \quad (6.22)$$

로 쓸 수 있어, Schwarz 부등식에 의하여

$$\beta(0) > \beta(\tau) \quad (6.23)$$

이 만족된다. 고전적인 빛에 대한 $\beta(\tau)$ 의 그래프는 그림

6.1과 같다. 이는 광자들이 시간에 대하여 뭉쳐 전파됨을 나타내고, 이를 뭉침 효과 (bunching effect)라 칭한다.^[45] 이러한 뭉침 효과는 Hanbury Brown과 Twiss 이래 빈번하게 관측되었으며, 전자장의 양자화 없이 이해될 수 있다.^[46,47]

한편, 흩어짐 효과 (antibunching effect)는 말 그대로 뭉침 효과의 역효과이다.^[48] 물론 이 효과가 나타나기 위하여는 식 (6.23)과 반대인

$$\beta(0) < \beta(\tau) \tag{6.24}$$

가 필요하고, 이는 곧 준확률 밀도 함수가 고전 확률 밀도의 제조건을 위반함을 의미한다. 그림 6.2에 흩어짐 현상을 보여주는 두 그래프를 그려보았다. Sub-Poisson 광분포의 경우와 마찬가지로, 흩어짐 효과도 빛의 입자성이 크게 부각되고 상대적으로 파동성이 줄어드는 논리로 설명될 수 있다. 빛을 내는 광원을 단일 원자로 가정하면, 원자가 그 에너지 준위차에 해당하는 광자를 방출할 때 여기 상태에서 기저 상태로 전이하게 되고 따라서 그 다음 광자를 방출하기까지는 시간이 걸리게 된다. 따라서 다시 여기 상태로 펌핑되는 데 걸리는 시간보다 작은 시간 간격에서 두 개의 광자를 검출할 확률은 매우 낮다. 실제로 이러한 흩어짐 효과는 여러 실험에서 관측되었다.^[49,50]

7. 간섭 현상에서의 양자 효과

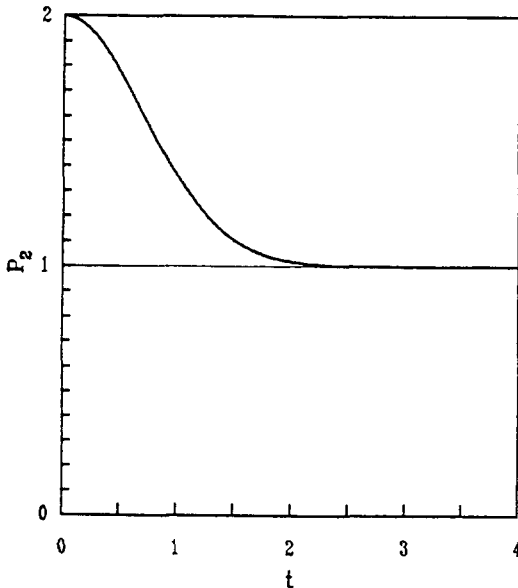


그림 6.1. 뭉침 효과를 보이는 P₂의 그래프.

간섭 현상은 보통 고전적 파동의 입장에서 기술되지만, 또한 직관과 상치되는 다양한 면을 갖고 있으며 이는 양자 역학의 미묘한 특성을 보여 준다. 그림 7.1과 같은 상황에서 파장이 λ인 두 빔의 각도 θ를 충분히 작게 하면, Z=λ/θ의 공간적 주기로 선명한 간섭 무늬를 관측할 수 있다. 아무리 약한 빛을 사용한다 하더라도 간섭 무늬는 관측되고, 비록 광자간의 중첩이 없는 경우, 즉 통계적으로 매번 한개의 광자만이 그림의 간섭계를 통과하는 경우에도 간섭 현상을 관찰할 수 있음이 알려져 있다. 이러한 후자의 경우 때문에 Dirac은 광자는 자기 자신 과만 간섭을 일으킨다고 서술하였다.^[51] 양자 역학에서 간섭 현상은 광자가 택하는 두 경로에 대한 확률 파동 함수의 중첩 결과로 해석한다.

레이저의 발명으로 두 개의 독립적인 레이저 빔이 간섭 현상을 실험할 수 있게 되었다. 그림 7.2와 같이 빔 splitter가 없는 경우, 동일 레이저 빔의 중첩은 도출되지 않으므로 이 경우 간섭 무늬 유무는 흥미있는 문제로 대두되었다. 광자를 검출하므로써 간섭 무늬가 존재함이 밝혀졌다.^[52] 이의 분석은 양자 역학의 불확정성 원리에 의하여 이루어질 수 있다. 간섭 무늬를 구별하기 위하여 공간적 구별 한도 Δx는

$$\Delta x < \lambda/\theta \tag{7.1}$$

를 만족하여야 하고, 광자의 위치에 대한 불확정도 또한 Δx로 주어진다. 위치와 운동량의 불확정성 원리에 의하

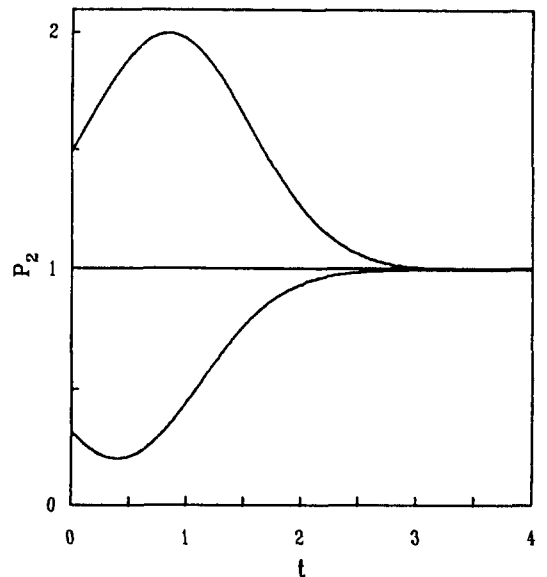


그림 6.2. 흩어짐 효과를 보이는 P₂의 그래프

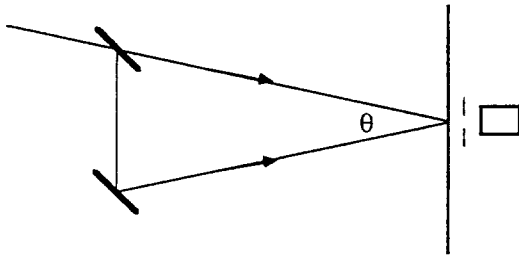


그림 7.1. 단일 레이저를 이용한 간섭 실험.

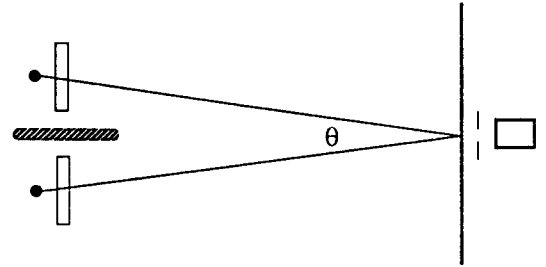


그림 7.2. 두개의 독립된 레이저를 이용한 간섭 실험.

여 운동량의 불확정도는

$$\Delta p > h\theta/\lambda \tag{7.2}$$

로 주어지게 되고, 따라서 어느 레이저로 부터 광자가 방출되었는가를 알길이 없다. 그러므로 두 광자의 경로에 대한 확률 파동 함수는 어느 하나도 정확히 0이 아니고 이 두 성분이 간섭을 일으킨다.

그러나 위의 간섭 현상이 관측되기 위한 필요 조건이 있다. 두 광원으로 부터 방출된 빔은 잘 정의된 위상을 가져야 한다. 레이저에서 방출되는 빛이 근사적으로 간섭성 상태에 의하여 잘 기술되는 것은 잘 정의된 위상을 가짐을 의미하고, 따라서 두 개의 독립된 레이저 빔의 간섭 현상은 일어난다. 그러나 Fock 상태의 빛은 위상이 정의되지 않으므로 간섭 현상을 일으키지 않는다. 예를 들어 두 개의 광원이 각각 N 과 M 개의 2준위 원자들로 구성되어 있다고 가정하자. 초기 모든 원자가 여기 상태에 존재한다고 가정하면, 매번 한개의 광자만이 방출된다는 가정 하에 나중 시각에 여기 상태의 원자수를 셈으로써 광자의 경로를 확인할 수 있고, 따라서 나머지 경로에 대한 확률 파동 함수는 0이 되어 중첩에 의한 간섭 현상을 관측할 수가 없게 된다.

위에 대한 정량적인 분석을 위하여 두 빔이 갖는 두 기하학적 모우드 1과 2를 생각하자.^[53] 이 두 모우드로 구성되는 빔의 상태를 $|u_1, u_2\rangle$ 로 나타내고 광검출기에 의한 광소멸 연산자를

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \tag{7.3}$$

로 쓰면, 두 빔으로 부터 광자가 검출되는 확률은 다음의 간섭성 함수로 주어진다.

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2 | a^+ a | u_1, u_2 \rangle = & | \alpha_1 |^2 \langle u_1 | a_1^+ a_1 | u_1 \rangle + | \alpha_2 |^2 \langle u_2 | a_2^+ a_2 | u_1 \rangle \\ & + [\alpha_1 \alpha_2^* \langle u_1 | a_1 | u_1 \rangle \langle u_2 | a_2^+ | u_2 \rangle + C.C] \end{aligned} \tag{7.4}$$

식 (7.4)의 마지막 두 항이 간섭 현상을 일으키는 바, $|u_1\rangle$ 과 $|u_2\rangle$ 가 간섭성 상태이면 0이 아니나 Fock 상태이면 0이 된다. 그러므로 두 개의 단일 여기 원자를 두 광원으로 갖는 간섭 실험에서는 간섭 무늬를 관측할 수 없다.

위의 논리는 더 높은 차수의 간섭성 함수로 표현되는 여러 광자를 검출하는 실험에 그대로 적용될 수 있고, 더욱 다양한 고전적 간섭성 이론과 양자 역학적 이론의 상이점을 이끌어 낼 수 있다. 근본적으로 이러한 가능성은 n 개의 광자를 갖는 빛으로 부터 n 보다 많은 광자를 검출할 수 없다는 단순한 사실에서 기인되고, 이는 앞서도 지적한 바와 같이 빛의 입자성에 강하게 의존하는 해석이다.

8. 결론 및 전망

빛이 보이는 여러 간섭성 현상을 물리 광학과 양자 광학의 입장에서 서술하였다. 빛의 전자장이 갖는 요동을 ensemble 평균 혹은 양자 역학적 기대치를 취함으로써 정량화 하였고, 그로 인한 빛의 간섭성의 정도는 전파하여 가면서 발전한다는 것을 보였다. 간섭 현상과 관련하여 이론적으로 정의된 물리량들의 실험적으로 어떻게 측정되는가를 알아 보았다. 공간-주파수 영역에서의 간섭성 모우드 표현을 이용하여 빛의 entropy를 정의함으로써, 전체적인 빛의 간섭성 정도에 대한 척도를 도출하였다. 비록 간섭성 상태에서의 고전적인 기술과 양자 역학적인 기술은 밀접한 연관을 갖고 있으나, 양자 역학적 범주 내에서만 이해될 수 있는 비고전적인 빛의 특성을 살펴 보았으며, 이들은 빛이 보이는 파동-입자 양면성의 결과로 이해될 수 있다.

그러나 빛의 간섭성 이론은 발전하면서 수반되는 수많은 문제를 던져 주고 있다. 공간-주파수 영역에서 상호 분광 밀도의 간섭성 모우드 표현이 고차 간섭성 함수로

어떻게 확장될 것인가는 중요한 문제이며 연구 중이다. 간섭성 이론이 고전적 radiometry와 어떻게 화합할 수 있는가 하는 것도 실제적 응용과 연관되어 인식되어야 한다. 마지막으로 양자 역학적 이론과 연관되어, 고전적 해석이 불가능한 현상을 찾아 빛에 대한 근본적 이해를 추구하는 것은 매우 흥미로운 연구 과제로 생각된다.

감사의 글

본 논문을 쓰는 동안 많은 조언을 하여주신 성낙진 박사님과 임창환 씨께 감사드립니다.

참고 문헌

- [1] M. laue, An. Phys. Vol 23, 1 (1907); Vol. 23, 795 (1907).
- [2] M. Berek, Z. Phys. Vol. 36, 675 (1926); Vol. 36, 824 (1926); Vol. 37, 387 (1926); Vol. 40, 420 (1927).
- [3] C. Lakeman and J. T. Groosmuller, Physica Vol. 8, 199 (1928); Vol. 8, 305 (1928).
- [4] E. Schroedinger, Ann. Physik Vol. 87, 570 (1928).
- [5] A. A. Michelson, Phil. Mag. Vol. 30, 1 (1890); Vol. 31, 256 (1891); Nature Vol. 45, 160 (1891).
- [6] N. Wiener, J. Math. Phys. Vol. 7, 109 (1928); Acta. Math (Stockholm) Vol. 55, 118 (1930).
- [7] P. H. Cittert, Physica Vol. 1, 201 (1934); Vol. 6, 1129 (1939).
- [8] F. Zernike, Physica Vol. 5, 785 (1938).
- [9] H. H. Hopkins, Proc. Roy. Soc. (London) Vol. A 208, 263 (1951); Vol. A217, 408 (1953); J. Opt. Soc. Am. Vol. 4, 508 (1957).
- [10] E. Wolf, Proc. Roy. Soc. (London) Vol. A225, 96 (1954); A230, 246 (1955); Nuovo Cimento Vol. 12, 884 (1954); Vol. 13, 1165 (1959).
- [11] A. Blanc-Lappierre and P. Dumontet, Rev. Opt. Vol. 34, 1 (1955).
- [12] S. Pancharatnam, Proc. Indian Acad. Sci. Sec. A 44, 247 (1956); Sec. A44, 398 (1956); Sec. A45, 402 (1957); Sec. A57, 218 (1963); Sec. A57, 231 (1963).
- [13] H. R. Brown and R. Q. Twiss, Nature Vol. 177, 27 (1956); Proc. Roy. Soc. (London) Vol. A242, 300 (1957); Vol. A243, 291 (1957); Vol. A248, 199 (1958); A248, 222 (1958).
- [14] R. J. Glauber, Phys. Rev. Lett. Vol. 10, 84 (1963); Phys. Rev. Vol. 130, 2529 (1963); Vol. 131, 2766 (1963).
- [15] E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. Lett. Vol. 10, 277 (1963).
- [16] A. T. Forrester, R. A. Gudmundson and P. O. Johnson, Phys. Rev. Vol. 99, 1691 (1955).
- [17] G. Magyer and L. Mandel, *Quantum Electronics* (Proceedings of the Third International Congress) ed. N. Bloembergen and P. Grivet, p. 1247 (Columbia University Press, New York, 1964).
- [18] L. Mandel, J. Opt. Soc. Am. Vol. 51, 797 (1961).
- [19] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Ch. 10 (Pergamon Press, Oxford, 1964).
- [20] E. Wolf, J. Opt. Soc. Am. Vol. A72, 343 (1982).
- [21] E. Wolf, J. Opt. Soc. Am. Vol. A3, 76 (1986).
- [22] R. R. Goldgerg, *Fourier Transforms* (Combridge University Press, Cambridge, 1965).
- [23] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Generalized Functions* (Academic Press, New York, 1964).
- [24] E. Wolf, Opt. Lett. Vol. 9, 387 (1984); J. Opt. Soc. Am. Vol. 3, 1920 (1986).
- [25] F. Riesz and B. Sz-Nagy, *Functional Analysis* (Ungar, New York, 1955).
- [26] H. Gamo, Progress in Optics Vol. III, ed. E. Wolf (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964).
- [27] C. E. Shannon, Bell Sys. Tech. J. Vol. 27, 623 (1948).
- [28] K. Kim, Thesis (unpublished).
- [29] W. H. Carter and E. Wolf, J. Opt. Soc. Am. Vol. 67, 785 (1977).
- [30] W. H. Carter and E. Wolf, Opt. Acta Vol. 28, 227 (1981); Vol. 28, 245 (1981).
- [31] L. Rayleigh, Phil. Mag. Vol. 34, 407 (1892).
- [32] A. J. Devaney and E. Wolf, Phys. Rev. Vol. D8, 1044 (1973).
- [33] K. Kim and E. Wolf, Opt. Comm. Vol. 59, 1 (1986).
- [34] H. M. Nussenzveig, F. T. Foley, K. Kim and E. Wolf, Phys. Rev. Lett. Vol. 58, 218 (1987).
- [35] E. Wolf and G. S. Agarwal, J. Opt. Soc. Am. Vol. A1, 541 (1984).

- [36] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, (McGraw-Hill Book Company, New York, 1953).
- [37] J. R. Klauder, Phys. Rev. Lett. Vol. 16, 534 (1966).
- [38] R. Loudon, Rep. Prog. Phys. Vol. 43, 913 (1980).
- [39] H. Paul, Rev. Mod. Phys. Vol. 58, 209 (1986).
- [40] L. Mandel, Physica Scripta Vol. T12, 34 (1986).
- [41] M. Hillery, Phys. Rev. Vol. A31, 338 (1985).
- [42] L. Mandel, Phys. Rev. Lett. Vol. 49, 136 (1982).
- [43] K. Kim and T. Kim, Phys. Lett. Vol. A125, 83 (1987).
- [44] M. Born, W. Heisenberg and P. Jordan, Z. Phys. Vol. 35, 557 (1926).
- [45] H. R. Brown and R. Q. Twiss, Nature Vol. 177, 27 (1956).
- [46] E. M. Purcell, Nature Vol. 178, 1449 (1956).
- [47] L. Mandel, Proc. Phys. Soc. Vol. 72, 1037 (1958); Vol. 74, 233 (1959).
- [48] I. M. Every, J. Phys. (Math. Gen.) Vol. A8, 133 (1973).
- [49] H. J. Kimble, M. Dagenais and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. Vol. 39, 691 (1977); Phys. Rev. Vol. A18, 201 (1978).
- [50] M. Dagenais and L. Mandel, Phys. Rev. Vol. A18, 2217 (1978).
- [51] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* 4th Ed., (Clarendon Press, Oxford, 1978).
- [52] R. L. Pfleeger and L. Mandel, Phys. Rev. Vol. 159, 1084 (1967); J. Opt. Soc. Am. Vol. 58, 946 (1968).
- [53] L. Mandel, Phys. Lett. Vol. A89, 325 (1982); Phys. Rev. Vol. A28, 929 (1983).

Modern Coherence Theory of Light

Kisik Kim and Jongmin Lee
Korea Atomic Energy Research Institute

(Received: February 2, 1990)

The coherence properties of electromagnetic fields are reviewed, based on both the classical and quantum theories. The elementary concepts, employed frequently in the discussion of interference phenomena, are summarized. The well-known interference phenomena are described in terms of second-order coherences. The coherence theory in space-frequency domain is introduced and the coherent mode representation is presented. The generation and propagation of coherence of light are analysed and it is shown that the coherence of light is developed as light propagates. The quantum theory goes parallel with the classical theory, via the optical equivalence theorem. There are, however, certain nonclassical characteristics of light, which may not be easily understood in classical terms. These nonclassical phenomena are believed to originate from the particle aspects of light. The quantum effect on the interference phenomena is analysed and finally the outlook of the future research is briefly mentioned.