論 文
40~12~13

영상-모드 및 Galerkin법을 이용한 전송선 문제해석

An Analysis of Transmission Line Structure by Combining Image-Mode and Galerkin Methods

申 奎 鉉* · 鄭 炫 教** · 韓 松 燁***
(Guo-Hyun Shin · Hyun-Kyo Jung · Song-Yop Hahn)

Abstract - This paper presents a hybrid image-mode-Galerkin method for the analysis of the transmission line structures suspended between infinite parallel ground planes. A Green's function that consists of numerically accelerated image-mode terms is developed, which is used in boundary integral equation. Transmission lines of arbitrary cross-section are analyzed using Galerkin's method. Two kinds of configurations of transmission lines are studied in sample problems.

1. 서 론

접지된 평행판 사이의 유전체내에 임의의 모양을 갖는 도체 전송선이 존재하는 구조는 유도기(Coupler)나 필터 설계에 중요한 구조이다. 이러한 구조에 대해서는 준-TEM(Quasi-Transverse Electromagnetic) 문제로 근사화시킬 수 있고, 따라서 횡단면에 대해서는 2차원 시불변 계(Static Field)방정식이 지배방정식이 된다. 이때 문제해석에는 경계적분방정식을 이용하는 수치해석법을 적용시킬 수 있다. 경계적분방정식에는 그린함수를 사용하게 되는데 두개의 무한 평판 도체내에서 수치해석상 효율적인 그린함수를 찾는 것이 쉽지 않다. 일반적으로 평행 도체판들로 구성된 구조와 같은 층구조(Layered)의 그린함수를 표현하는 방법으로서 세가지 방법이 이용되었다. 즉 영상법[1], 스펙트럴적분법[2], 및 모드법[3] 등이다. 여기서 영상법은 전원과 관측점간의 거리가 가까운 경우에만 적응이 용이하다. 스펙트럴 적분법은 모든 영상들을 조합하여 표현된 감쇠 스펙트라의 중첩에 의해서 그린함수를 표현하므로 영상들의 급증문제를 피할 수 있다. 그러나 주된 영향을 미치는 영상들을 분리 시킬 수가 없다. 모드법은 전원과 관측점간의 거리가 멀리 떨어져 있을때는 지배적인 모드들 만으로써 그린함수를 표현할 수 있다는 장점을 갖고 있다. 그러나 전원과 관측점간의 거리가 가까울 때는 많은 고차의 모드들까지도 고려해야 하는 어려움이 있다. 따라서 각 방법들의 장점만을 이용하게 되는 여러 방법을 혼합한 알고리즘들이 제시되었다[4~6].

본 논문에서는 경계적분방정식에 이용되는 그린함수를 영상-모드의 혼합법을 사용하여 표현하였다. 즉 전원과 관측점간의 거리가 멀때는 지배적인 모드들 만으로 그린함수를 표현하고 거리가 가까울 때는 몇 개의 지배적인 영상항들로써 그린함수를 표현하게 된다. 그리고 경계적분방정식은 도체의 표면을 소영역으로 이산화하고 소영역내에서

*正 會 員 : 江原大 大學院 電氣工學科 碩士課程
**正 會 員 : 江原大 工大 電氣工學科 副教授 · 工博
***正 會 員 : 서울大 工大 電氣工學科 教授 · 工博
接 受 日 字 : 1991年 6月 25日
1 次 修 正 : 1991年 11月 30日

변수를 근사화 시킨후 Galerkin법을 적용시켜 풀었다.

2. 적분방정식

그림1과 같이 2차원 문제로 모델링한 접지된 평행 도체판 사이에 존재하는 도체들중 l번째 도체의 전체 전하량 Q_l을 표면전하밀도함수 σ_l로 표현하면

$$Q_l=\int_{sl}\sigma_l(\underline{r}')ds_l, \ \underline{r}'=(x', z'), \ \underline{r}'\in s_l \tag{1}$$

가 된다. 여기서 s_l은 l번째 도체의 표면이고 $\underline{r}'$은 표면 위의 위치 벡터이다. 그리고 평행판 내의 임의의 한점 $\underline{r}=(x, z)$에서의 전위 $V(\underline{r})$는

$$V(\underline{r})=\sum_{i=1}^{N}\int_{sl}\frac{\sigma_l(\underline{r}')}{\varepsilon}G(\underline{r}, \underline{r}')ds_l, \ \underline{r}'\in s_l \tag{2}$$

와 같이 도체 표면에 대한 면적적분들의 합으로써 주어진다[7]. 여기서 $G(\underline{r}, \underline{r}')$은 평행판 내에서의 그린함수, ε은 매질의 유전율이고 N은 전체도체의 갯수를 나타낸다. 식(2)는 적분방정식으로서 σ_l는 실제 계산에서 구할려고 하는 미지변수가 되고 s_l는 2차원 문제이기 때문에 도체의 경계를 따라가는 적분경로이다. 그리고 식(2)를 도체표면위에서 표현하면 N개의 도체에 대해 다음과 같이 N개의 연립방정식을 얻게 된다. 즉,

$$V_i(\underline{r})=\sum_{i=1}^{n}\int_{sl}\frac{\sigma_l(\underline{r}')}{\varepsilon}G(\underline{r}\cdot\underline{r}')ds_l, \ \underline{r}'\in s_l, \ \underline{r}\in s_i$$
$$i=1, 2, \cdots, N \tag{3}$$

여기서 $V_i(\underline{r})$은 i번째 도체의 전위이다.

결과적으로 식(3)을 풀면 모든 도체 표면에서의 전하분포를 구할 수 있고 따라서 각 도체의 전체 전하량은 식(1)로 부터 구하게 된다. 이때 그린함수는 영상-모드의 혼합법을 사용하여 구하고 적분방정식을 풀기 위해서 Galerkin법을 적용시킨다.

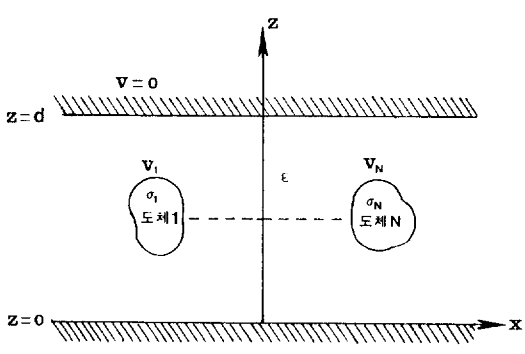

그림 1 차폐된 전송선 구조
Fig. 1 Shielded transmission line structure

3. Galerkin법 적용

식(3)을 풀기 위해서, 도체표면을 2차원 문제의 경우 작은 직선 요소들로 나누고 각 요소 내에서 전하밀도함수를 근사화시킨다. 즉, l번째 도체에서의 근사함수 $\bar{\sigma}_l$은

$$\bar{\sigma}_l(\underline{r})=\sum_{k=1}^{Nl}\sigma_{lk}\alpha_{lk}(x, z), \ \underline{r}\in S_l \tag{4}$$

와 같이 표현될 수 있다. 여기서 σ_{lk}와 α_{lk}는 각각 l번째 도체표면의 k번째 정점에서의 전하밀도값과 보간함수를 나타낸다. 그리고 N_l은 l번째 도체 표면위의 정점수이다. 식(3)에 σ_l대신 식(4)의 근사식 $\bar{\sigma}_l$을 대입하면 다음과 같은 오차(잔차) R이 발생한다.

$$R=V_i(\underline{r})-\sum_{i=1}^{N}\int_{s}\frac{\bar{\sigma}_l(\underline{r}')}{\varepsilon}G(\underline{r}, \underline{r}')ds_l,$$
$$\underline{r}, \underline{r}'\in s_l, \ i=1, 2, \cdots, N \tag{5}$$

따라서 l번째 도체의 $\bar{\sigma}_l$를 구하기 위해 식(5)에 그린함수를 구하여 대입한 후 Galerkin법을 적용시키면

$$\int_{sl}\alpha_{lk}R_l ds_l=0, \ k=1, 2, \cdots, N_l \tag{6}$$

인 관계식을 얻는다. 그리고 식(6)을 모든 도체에 대해 적용시키면

$$[S][\sigma]=[F] \tag{7}$$

인 선형행렬방정식을 얻게 된다. 여기서,

$$[S]=[S_{ij}]_{Nt\times Nt}$$
$$[\sigma]=[\sigma_i]_{Nt\times 1}$$
$$[F]=[F_i]_{Nt\times 1}$$
$$N_t=\sum_{i=1}^{N}N_l, \ \text{즉 전체 도체위의 정점수.}$$

최종적으로 식(7)을 풀면 모든 도체 표면에서 전하밀도를 구할 수 있고 구한 전하밀도를 식(2)에 대입하면 각 도체 표면을 포함한 두 평판 사이의 모든 위치에서 전위를 구할 수 있다.

4. 그린함수 유도

그린함수는 그림1과 같은 2차원 문제에서는 다음과 같은 편미분방정식의 해이다.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]G(\underline{r},\underline{r}')=-\sigma(\underline{r}-\underline{r}'),$$

$$\underline{r}=(x,z),\ \underline{r}'=(x',z') \tag{8}$$

그리고 식(8)을 풀 때 $z=0$ 및 $z=d$에 접지된 무한 평판이 존재하므로

$$G(\underline{r},\underline{r}')=0,\ z=0,\ d \tag{9}$$

인 경계조건을 부여한다.

4.1 적분 표현식

프리에 변환을 이용하여 1차원 스펙트럴 그린함수에 대한 해를 구하면

$$G(\underline{r},\underline{r}')=\frac{-1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{e^{ih(x-x')}}{1-e^{2ikd}}\left[e^{ik|z-z'|}-e^{ik|z+z'|}-e^{ik(2d-|z+z'|)}+e^{ik(2d-|z-z'|)}\right]dh \tag{10}$$

와 같이 된다. 여기서 $k=(-h^2)^{1/2}$로 정의되고, 실수일 경우는 양이 되고 복소수일 경우에는 허수부가 양이 된다. h는 x축 방향의 위상정수를 나타낸다. 식(10)의 피적분항은 폴(pole) 특이점을 갖게 되며, 그 특이점들은 $1-e^{2ikd}=0$으로 부터 다음과 같은 고유치들로써 표현된다[2].

$$h_m=\pm i\frac{\pi m}{d},\ m=1,2,\cdots,\infty \tag{11}$$

4.2 모드 표현식

유수정리(Residue Theorem)을 이용하면 전원점 $\underline{r}'$으로 부터 멀어질수록 감쇠하는 모드들의 합으로써 그린함수를 표현할 수 있다. 즉,

$$G(\underline{r},\underline{r}')=\sum_{m=1}^{\infty}G_m(\underline{r},\underline{r}') \tag{12}$$

여기서,

$$G_m(\underline{r},\underline{r}')=\frac{1}{\pi}\frac{1}{m}\sin\left(\frac{m\pi}{d}z\right)\sin\left(\frac{m\pi}{d}z'\right)\exp\left(-\frac{m\pi}{d}|x-x'|\right) \tag{13}$$

이다. 식(13)의 $G_m(\underline{r},\underline{r}')$은 $|x-x'|\gg 0$에 대해서는 감쇠하는 지수의 영향으로 매우 빨리 수렴하지만, $|x-x'|\approx 0$일때 즉 전원과 관측점이 아주 가까우면 많은 항들을 더하게 되어 매우 천천히 수렴하게 된다. 또한 z 또는 z'이 경계에 가까우면 수렴특성이 나빠진다. 이것은 모든 모드들의 값들이 작아져서 수렴을 위해서는 많은 항들이 필요하기 때문이다.

4.3 영상표현식

영상들로 표현된 그린함수를 얻기 위해서는 먼저 식(10)의 피적분항의 분모를 기하급수로 전개한다. 즉,

$$(1-e^{2ikd})^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{2inkd} \tag{14}$$

식(14)를 식(10)에 대입하면

$$G(\underline{r},\underline{r}')=\sum_{n=0}^{\infty}G_m(\underline{r},\underline{r}') \tag{15}$$

을 얻는다. 여기서,

$$G_i(\underline{r},\underline{r}')=\frac{-1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k}e^{i(h(x-x')+2nkd)}\left[e^{ik|z-z'|}-e^{ik|z+z'|}-e^{ik(2d-(z+z'))}+e^{ik(2d-|z-z'|)}\right]dh \tag{16}$$

이다. 식(16)을 해석적으로 적분하면

$$G_i(\underline{r},\underline{r}')=\frac{-1}{4\pi}ln\left[\frac{(x-x')^2+(2nd+|z-'|)^2}{(x-x')^2+(2nd+(z+z'))^2}\frac{(x-x')^2+(2(n+1)d-|z+z'|)^2}{(x-x')''+(2(n+1)d-(z+z'))^2}\right] \tag{17}$$

와 같이 기존의 영상해를 얻게 된다. 식(17)을 사용하면 $|x-x'|\gg d$일때 그린함수의 수렴특성이 나쁘다. 따라서 수렴특성을 개선하기 위하여 식(15)에서 유한개의 항을 취하고 나머지는 적분표현식을 이용한다. 즉,

$$(1-e^{2ikd})-1=\sum_{n=0}^{N\lambda-1}e^{2inkd}+(1-e^{2ikd})^{-1}e^{2iN_\lambda kd} \tag{18}$$

을 이용하여, 식(15)의 영상항들을 나누면 식(15)는

$$G_i(\underline{r},\underline{r}')=\frac{1}{4\pi}ln\left[\frac{(x-x')^2+(z+z')^2}{(x-x')^2+(z-z')^2}\right]+\sum_{n=1}^{N\lambda-1}\bar{G}_n+R_n \tag{19}$$

로 바뀌어 진다. 여기서

$$\bar{G}_n=\frac{1}{4\pi}ln\left[\frac{(x-x')^2+(z+z'+2na)^2}{(x-x')^2+(z-z'-2na)^2}\cdot\frac{(x-x')^2+(z+z'-2na)^2}{(x-x')^2+(z-z'+2na)^2}\right] \tag{20}$$

$$R_N=\sum_{n=N\lambda}^{\infty}\bar{G}_n \tag{21}$$

이다.

식(21)은 영상들의 집합일 뿐이다. 여기서 N_λ가 크면, 즉

$$N_\lambda\gg\max\left(\frac{|x-x'|}{2d},1\right) \tag{22}$$

의 개념을 도입하면, 식(21)은

$$R_N=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=N\lambda}^{\infty}\frac{-2zz'}{n^2d^2}+0\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{23}$$

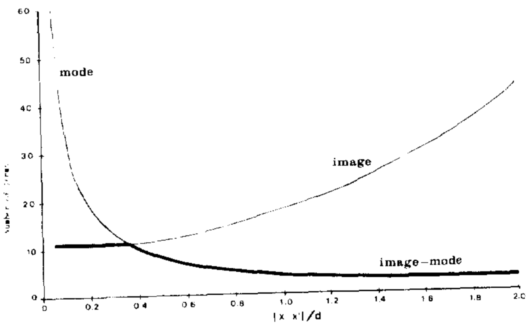

그림 2 전원과 관측점간의 거리에대한 그린함수 표현식들의 항의수

Fig. 2 Number of terms in the Green function representations versus $|x-x'|/d$

로 표현할 수 있으며, 무한급수 값은 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$를 이용하면 계산되어질 수 있다.

4.4 영상-모드의 혼합법

전원과 관측점간의 거리의 변화에 따라 영상표현식 또는 모드표현식만으로써 그린함수를 수치해석상 효율적으로 표현할 수 없는 경우는, 적절한 기준을 두고 두 표현식을 혼합하여 사용하면 매우 효율적이다. 즉, 어떤 기준값 a를 정하여 $|x-x'|>a$인 경우는 모드표현식을 사용하고, $|x-x'|<a$인 경우는 영상표현식을 사용한다. 그림2는 전원과 관측점과의 거리에 대한 영상표현식 및 모드표현식의 수렴에 필요한 항들의 수를 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 $|x-x'|$의 어떤 값을 중심으로 수렴속도가 빠른 그린함수의 표현식이 선택될 수 있다.

5. 사례연구

그림3에서와 같이 접지된 평행 도체판 내에 단면이 임의의 크기의 원형 및 사각형인 도체가 존재하는 경우를 각각 예제로 고려하였다. 먼저 본 논문에서 제시한 그린함수를 구하는 알고리즘 및 프로그램의 타당성을 확인하기 위하여, 평행판 내에 도체가 존재하지 않을 때의 그린함수 값을 모드 표현식과 영상표현식으로써 각각 구하여 그림4에서와 같이 비교하여 보았다. 두 결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

그림4에서는 전원과 관측점간의 거리를 변화시켰을 때 영상 및 모드항들에 의한 그린함수표현식이 수렴하는데 필요한 항의 수를 나타낸 것이다.

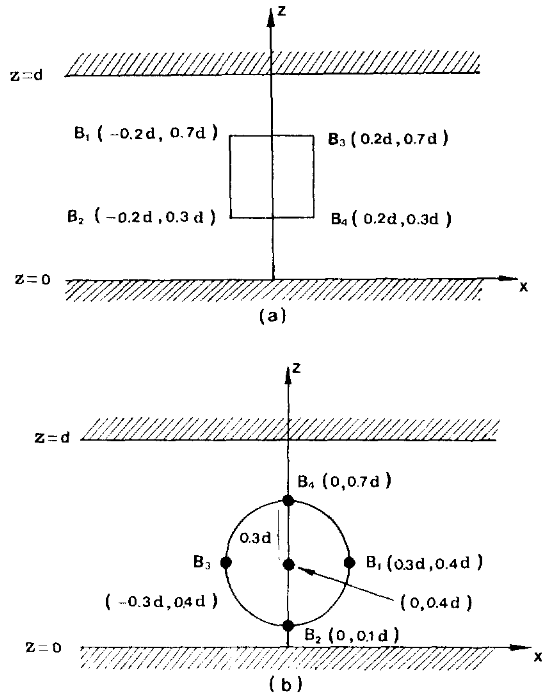

그림 3 해석모델

Fig. 3 Models for numerical analysis

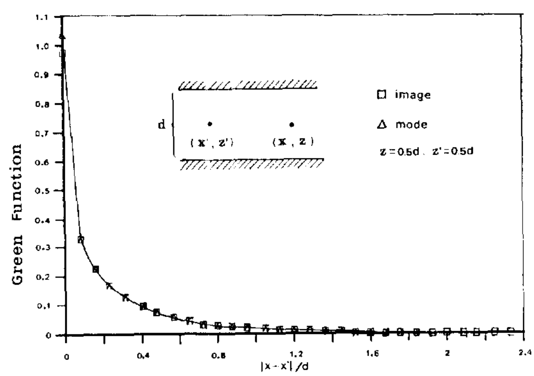

그림 4 전원과 관측점간의 거리에 의한 그린함수값

Fig. 4 Values of Green function versus $|x-x'|/d$

그림에서 알 수 있듯이 전원과 관측점 간의 거리가 가까울 때는 모드표현식을 사용하고 멀때는 영상법을 사용하는 영상-모드 혼합 적용이 매우 효율적이다. 그림5는 그림3(a)와 (b)의 내부 도체 표면에서의 전하분포를 위치에 대해 그린 것이다. 이때 도체의 전위는 1(V)로 주었다. 그리고 평행

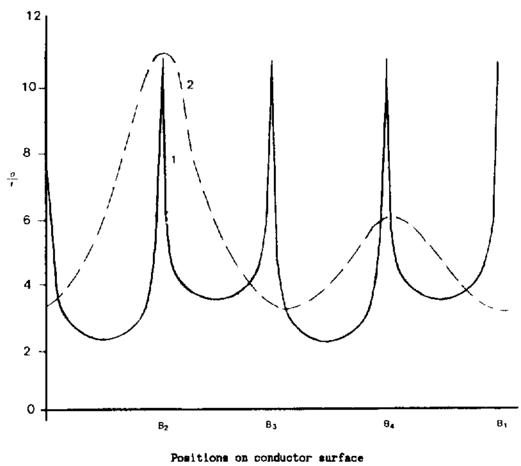

그림 5 도체표면위의 전하밀도(— : 사각도체, ··· : 원형도체)

Fig. 5 Surface charge density on the conductors (— : Rectangular conductance, ··· : Circular conductance)

도체판은 접지된 것이다.

곡선1과 2는 그림3(a)와 (b)에 각각 해당된다. 단면이 원형인 경우 접지된 도체 부근에서 즉, 점 B2와 B4에서 전하밀도가 높게 나타나고 점 B3와 B1 부근에서 낮게 나타난다. 특히 접지된 도체에 가장 가까운 점 B2에서 최대값이 나타나는 것을 알 수 있다. 단면이 사각형인 경우 꼭지점 부근 즉, 점 B1, B2, B3와 B4에 전하가 집중되는 것도 볼 수 있다. 이 결과는 물리적으로 타당성이 있음을 입증하는 것이다.

6. 결 론

본 논문에서는 차폐된 전송선 구조를 수치적으로 해석할 수 있는 알고리즘을 제시했다. 접지된 평행판 도체내의 그린함수는 영상-모드의 혼합법을 적용시킴으로써 효율적으로 구해지고, 각 도체간의 유도현상은 Galerkin법을 사용하여 적분방정식을 풀어서 해석하였다. 그리고 제시된 알고리즘을 간단한 해석모델들에 적용시켜서 물리적으로 타당성이 있는 결과들을 얻었다.

제시된 알고리즘의 유용성만을 확인하기 위해 본 논문에서는 접지된 평행판 내에 한 개의 도체가 존재하는 간단한 모델을 택하였지만, 본 알고리즘은 앞으로 보다 복잡한 문제로서 다중 도체가 존재하는 다층구조의 해석에도 확장 시킬 수 있으며 실제문제로서 MMIC소자 구조를 모델링하여 해석하는 데에도 응용될 수 있을 것이다.

이 논문은 아산사회복지사업재단의 1989년도 연구비 지원에 의하여 이루어 졌음.

참 고 문 헌

[1] W.T. Weeks, "Calculation of coefficients of capacitance of multiconductor transmission lines in the presence of a dielectric interface," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-18, pp. 35~43, Jan. 1970.

[2] A. Farrar and A.T. Adams, "Multi-layer microstrip transmission line," IEEE Trans. Microwave Theory tech., Vol. MTT-22, pp. 889~891, Oct. 1974.

[3] R. Mansour and R. Macphie, "A unified hybrid-mode analysis for planar transmission lines with multi-layer isotropic/anisotropic substrates," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-35, pp. 1382~1391, Dec. 1987.

[4] L.B. Felsen and A.H. Kamel, "Hybrid ray-mode formulation of parallel plane waveguide Green's functions," IEEE Trans. Antennas propagation, Vol. AP-29, pp. 637~649, July 1981.

[5] I-Tai Lu and H.K. Jung, "A hybrid(boundary elements)-(finite elements)-ray-mode method for wave scattering by inhomogeneous scatterers in a waveguide," J Accoust. Soc. Am. Vol. 87, No. 3, pp. 988~996, March. 1990.

[6] Hyun-Kyo Jung, I-Tai Lu and Song-Yop Hahn, "A hybird ray-mode-(boundary integral equation) method for acoustic wave scattering by multiple scatterers in a waveguide," Journal of KIEE, Vol. 3, No. 1, pp. 49~55, 1990.

[7] P.P. Silvester and R.L. Ferrari, Finite Elements for Electrical Engineers, Cambridge University Press, 1983. pp. 98~106.