論 文
40~8~3

사면체 변요소를 이용한 3차원 정자장 해석

Three Demensional Magnetostatic Analysis Using Tetrahedral Edge Elements

金 東 洙*·李 弘 培*·崔 炅**·鄭 炫 教***·韓 松 曄§
(Dong-Soo Kim · Hong-Bae Lee · Kyung Choi · Hyun-Kyo Jung · Song-Yop Hahn)

Abstract - In this paper, three dimensional magnetostatic fields are analysed using tetrahedral edge elements, magnetic vector potential and modified formulation of weighted residual method. If we define unknown variables in mesh edges, some conditions, such as Coulomb gauge condition in magnetic vector potential are naturally satisfied. So with less memory space, we can obtain more accurate solutions than the method where unknown variables are defined at nodes. Reliability and utility of this method are verified in two examples.

1. 서 론

자기 벡터 포텐셜을 이용하여 3차원 정자장 문제를 해석할 때 해의 유일성(Uniqueness)을 만족하기 위하여 쿨롱 게이지(Coulomb Gauge)를 사용하여 왔다. 따라서 이러한 쿨롱 게이지를 만족시키기 위해 페날티법[1, 2, 3](Penalty Method)를 도입하였다. 이 경우 적절한 페날티 계수를 정할 수 있는 방법이 없기 때문에 이 방법을 적용하는 데는 많은 경험이 요구되고 있다.

이상과 같은 결점을 보완하기 위하여 네데릭(J C. Nedelec)에 의해 제안된 사면체 변요소[4]를 사용하면 쿨롱 게이지 조건은 변요소 보간 함수의 성질에 의해 자연히 만족된다[5].

미지변수가 절점에 정의되던 종전의 절점 요소와는 달리 변요소는 요소의 변(Edge)를 따라 해당 물리량의 선적분 된 양을 미지 변수로 삼는다. 따라서 자기 벡터 포텐셜을 사용할 경우에는 한 요소당, 사면체 요소 6변에 각각의 변을 따라 자기 벡터 포텐셜을 선적분한 양을 미지변수로 삼는다.

본 논문에서는 사면체 변요소의 미지변수로 자기 벡터 포텐셜을 사용하여 3차원 정자장 해석을 수행하였다. 2절에서 변요소의 기본 성질, 장점등을 다루고 3절에서는 이에 적합한 이산화식을 도출하였다. 4절에 요소 행렬식을 유도하고 5절에서는 사례연구를 통해 3차원 정자장 문제를 변요소로 해석할 때 얻는 장점 및 문제점을 다루었다.

2. 변요소의 성질

사면체 변요소는 그림 1에서와 같이 4절점에 의

*正 會 員 : 서울大 大學院 電氣工學科 博士課程
**正 會 員 : 江原大 工大 電子工學科 助教授 · 工博
***正 會 員 : 江原大 工大 電氣工學科 副教授 工博
§正 會 員 : 서울大 工大 電氣工學科 教授 工博
接受日字 : 1990年 8月 28日
1次修正 : 1991年 4月 17日
2次修正 : 1991年 7月 1日

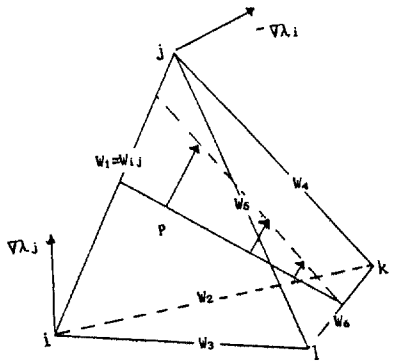


그림 1 변요소 $\vec{W}_{ij}$
Fig. 1 Edge Element $\vec{W}_{ij}$

해 구성되는 6변에 설정된 보간함수에 의해 사면체 내의 함수가 일차 보간된다.

절점 i, j를 따라 정의되는 보간 함수 $\vec{W}_{ij}$는 다음과 같다[5].

$$\vec{W}_{ij}=\lambda_i\nabla\lambda_j-\lambda_j\nabla\lambda_i \tag{1}$$

여기서 λ_i 및 λ_j는 심플랙스 좌표계[6](Simplex Coordinate)로 λ_i는 사면체 전체 체적에 대한 절점 (p, j, k, l)로 구성된 체적의 비율이다. 여기서 p는 사면체 내의 임의의 한점으로 p가 i와 같은 경우에는 $\lambda_i=1$이고 $\lambda_j=0$, $\lambda_k=0$, $\lambda_l=0$이 되며 일반적으로는 다음의 관계를 만족하는 체적 좌표계이다.

$$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i=1 \tag{2}$$

식(1)에서 정의된 보간 함수의 성질을 살펴보면 다음과 같다.

$\nabla\lambda_i$는 (j, k, l)면에 수직이고 사면체 내부로 들어오는 방향으로 이를 고려하면, 보간 함수 $\vec{W}_{ij}$는 내부점 p가 이동함에 따라 절점(k, l)를 축으로하여 절점 i에서 절점 j방향으로 회전하는 성질을 갖는데 이를 그림 1에 나타내었다. 또한 I번째 보간함수를 J번째 적분 경로를 따라 선적분하면 다음의 관계를 만족한다.

$$\int\vec{W}_I\cdot d\vec{l}_J=\begin{cases}1, & I=J\\ 0, & I\neq J\end{cases} \tag{3}$$

식(1)에 정의된 보간 함수에 Divergence를 취해 보면 요소내 6개 보간 함수는 모두 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\nabla\cdot\vec{W}_I=0,\quad I=1,\cdots\cdots 6 \tag{4}$$

이상의 성질을 고려하여 미지변수로 자기 벡터 포텐셜을 도입하면 다음과 같은 성질을 만족한다.

(Ⅰ) 사면체 요소내의 자기 벡터 포텐셜은 다음과 같이 보간 된다.

$$\vec{A}=\sum_{I=1}^{6}a_I\vec{W}_I \tag{5}$$

식(3)을 이용하면

$$a_I=\int\vec{A}\cdot d\vec{l}_I \tag{6}$$

따라서 변요소를 사용할 경우 미지변수는 자신의 변을 따라 자기 벡터 포텐셜을 선적분한 것이 된다.

(Ⅱ) 변요소는 식(4)의 성질에 의해 쿨롱 게이지를 자동으로 만족한다.

$$\nabla\cdot\vec{A}=\nabla\cdot\left[\sum_{I=1}^{n}a_I\vec{W}_I\right]=\sum_{I=1}^{6}a_I[\nabla\cdot\vec{W}_I]=0 \tag{7}$$

(Ⅲ) 이론적으로는 고차의 보간 함수를 사용할 경우 자기 벡터 포텐셜의 접선 성분 연속 조건이 만족되면, 자속 밀도의 법선 성분 연속 조건 및 자계 세기의 접선 성분 연속 조건을 만족한다.

인접해 있는 두 사면체 요소간의 경계에 접선 방향을 갖는 τ, λ 및 법선 방향을 갖는 n으로 구성되는 (n, τ, λ) 좌표계를 도입하여 자속 밀도 $\vec{B}$의 법선 성분 연속 조건을 나타내면 다음과 같다.

$$\left[\frac{\partial A_\lambda}{\partial\tau}-\frac{\partial A_\tau}{\partial\lambda}\right]_1=\left[\frac{\partial A_\lambda}{\partial\tau}-\frac{\partial A_\tau}{\partial\lambda}\right]_2 \tag{8}$$

따라서 $\vec{B}$의 법선 성분 연속 조건은 $\vec{A}$의 접선 성분 연속 조건이 만족되면 자연히 만족된다. 또한 자계의 세기 $\vec{H}$의 접선 성분 연속 조건은 다음과 같다.

$$\frac{1}{\mu_1}\left[\frac{\partial A_\lambda}{\partial n}-\frac{\partial A_n}{\partial\tau}\right]_1=\frac{1}{\mu_2}\left[\frac{\partial A_\lambda}{\partial n}-\frac{\partial A_n}{\partial\tau}\right]_2 \tag{9}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\left[\frac{\partial A_n}{\partial\lambda}-\frac{\partial A_\lambda}{\partial n}\right]_1=\frac{1}{\mu_2}\left[\frac{\partial A_n}{\partial\lambda}-\frac{\partial A_\lambda}{\partial n}\right]_2 \tag{10}$$

이 조건은 자기 벡터 포텐셜의 접선 성분 연속 조건이 만족되면 자연 만족 된다[7]. 그런데 변요소를 사용할 경우에는 인접해 있는 두 사면체의 변을 따라 자기 벡터 포텐셜의 선적분된 양을 미지변수로 삼고 이를 두 요소가 공유하므로 자기 벡터 포텐셜의 접선 성분은 연속 조건은 자연 만족된다. 따라서 사면체 변요소 및 자기 벡터 포텐셜을 사용할 때 장(Field)의 연속 조건은 고차 보간 함수를 사용할 경우 이론적으로는 만족된다.

3. 변요소를 이용한 유한요소 정식화

사면체 변요소와 자기 벡터 포텐셜 그리고 식(11)과 같은 갤러킨 방법(Galerkin Method)을 이용하여 유한요소 정식화를 수행하였다..

$$\langle \vec{W}, \vec{\varepsilon} \rangle = 0 \tag{11}$$

여기서 $\vec{\varepsilon}$는 오차 함수이다.

맥스웰 방정식 및 보조 방정식으로 부터 식(12)와 같은 지배 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = \vec{J} \tag{12}$$

여기서 μ는 자기 투자율이고 $\vec{J}$는 전류밀도이다. 식(11)과 식(12)를 이용하면

$$\int \vec{W} \cdot \left(\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} - \vec{J} \right) dv = 0 \tag{13}$$

식(13)에 벡터등식과 Gauss정리의 1형을 적용하면 다음식과 같이 경계적분항이 포함된 식으로 분리할 수 있다.

$$\int \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{W}) dv + \int \vec{W} \cdot (\hat{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}) \mathrm{ds} = \int \vec{J} \cdot \vec{W} dv \tag{14}$$

식(14)의 경계적분항은 $\vec{B} \| \hat{n}$인 Neumann경계와 변을 따라 자기 벡터 포텐셜의 벡터 선적분 값을 아는 Dirichlet경계에서는 소거되므로 해석 모델의 전 경계를 이와같이 Neumann경계 또는 Dirichlet 경계로 설정할 경우 식(14)의 경계적분항은 소거되므로 다음식과 같은 최종 이산화식을 얻을 수 있다.

$$\int \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{W}) dv = \int \vec{J} \cdot \vec{W} dv \tag{15}$$

4. 요소 행렬식

사면체 변요소를 사용할 경우 [6×6]의 요소 행렬식을 얻게 되는데 최종 이산화 식(15)에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$[S_{IJ}][a_I] = [F_I], \; I = 1, \cdots\cdots, 6, \; J = 1, \cdots, 6 \tag{16}$$

여기서 I번째 변은 (i, j)절점으로 구성되고 J번째 변은 (k, l)절점으로 구성되었다고 본다. 그러면 요소 행렬의 각 항은 다음과 같다.

$$S_{IJ} = \int \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{W}_I) \cdot (\nabla \times \vec{W}_J) dV$$

$$= \frac{1}{324 V^3 \mu} [(c_i d_j - c_j d_i) \times (c_k d_l - c_l d_k) + (b_j d_i - b_i d_j) \times (b_l d_k - b_k d_l) + (b_i c_j - b_j c_i) \times (b_k c_l - b_l c_k)] \tag{17}$$

$$F_I = \int \vec{W}_I \cdot \vec{J} dV = \frac{1}{36} [(b_j - b_i) J_x + (c_j - c_i) J_y + (d_j - d_i) J_z] \tag{18}$$

여기서 V는 사면체 요소의 체적이고 a, b, c, d는 사면체 요소의 절점 좌표값에 의해 결정되는 상수들이다[6, 8].

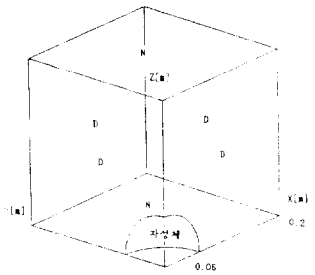
5. 사례 연구

본 사례연구에서는 본론에서 도출한 최종 이산화식과 사면체 변요소를 이용한 3차원 정자장 유한요소해석의 신뢰도 및 유용성을 검토하기 위해 2가지 모델에 대해 적용하여 보았다. 첫번째, 이론해가 존재하는 모델의 이론해와 본 방법에 의한 유한요소해석 수치해를 비교하였다. 두번째, 정자장 해석에서 필요로 하는 모든 구성요소(자성체, 전류)를 포함하는 모델에 대하여 실험치와 유한요소 해석에 의해 구한 수치해를 비교하였다.

5.1 외부자장을 가한 구자성체 모델

변요소를 이용한 3차원 정자장 유한 요소 해석의 신뢰도를 검토하기 위해, 이론해가 존재하는 모델로서 구자성체에 외부자장이 가해진 문제를 해석해 보았다. 모델은 반지름이 0.06[m]이고 비투자율이 1000인 구자성체에 Z방향으로 1[T]의 외부자장을 가한 것이다. 절점수는 3426개이며 계산기 사용 기종은 APOLLO DOMAIN SERIES 4000이다.

모델의 대칭성을 고려하여 구자성체의 1/8영역을 해석 모델로 잡았으며 이 때의 해석 모델 및 경계 조건은 그림 2와 같다. 이 때 6면의 경계조건은 다음과 같다. 윗면과 밑면은 자속 방향이 면과 수직이므로 Neumann경계영역으로서 경계적분항이 소거된다. 구자성체의 절단면을 포함하는 두 옆면은 자기 벡터 포텐셜과 변요소가 수직 관계이고, 최외곽 두 옆면은 자성체와 충분히 떨어졌다고 보면 최외곽 두 옆면에 있는 변요소에서의 자기 벡터 포텐셜 선적분 값은 주어진 외부 자장에 의해 구할 수 있으므로 네 옆면은 Dirichlet경계영역으로서 역시 경계 적분항이 소거된다. 그림 3은 변요소를 이용한 유한요소해석 결과를 $X=$



D : Dirichlet 경계조건
N : Neumann 경계조건

그림 2 해석 모델 및 경계조건
Fig. 2 Model and Boundary Conditions

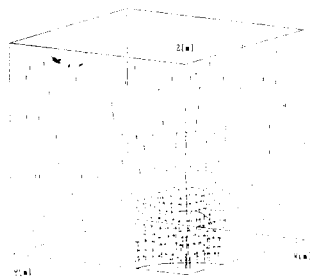


그림 3 자장 분포
Fig. 3 The Field Distribution

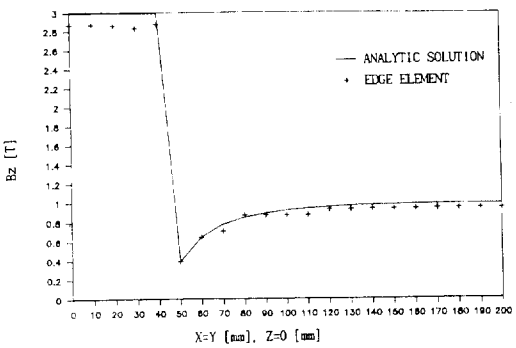


그림 4 이론해와 수치해의 비교
Fig. 4 The Comparision of Analytic and Numerical Solutions

0[m], $Y=0$[m]인 면에 대해 자장의 분포를 나타낸 것으로서, 자성체 내부에서는 Z방향으로 자장이 분포되었고 구자성체와 인접한 공기 영역에서는 자장이 구자성체와 수직 방향으로 분포되었음을 볼 수 있다. 그림 4는 $Z=0$[m]인 면에서 $X=Y$선을 따라 이론해와 수치해를 비교한 것이다.

이론해에 대한 수치해의 최대 오차는 약 4[%]

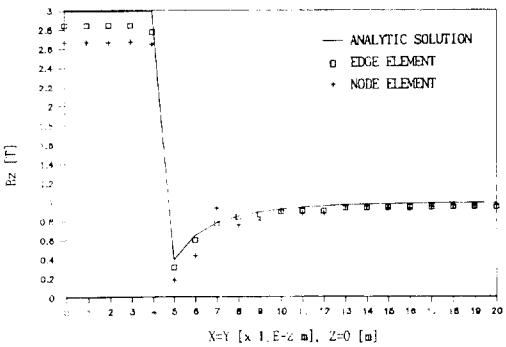


그림 5 이론해 및 변요소, 절점요소에 의한 수치해 비교
Fig. 5 The Comparision of Analytic and Edge, Node Element Solutions

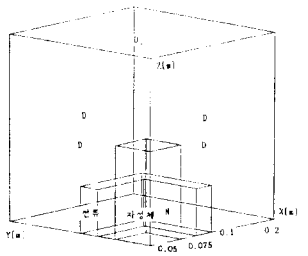
정도인데 최외곽 경계가 무한경계가 아닌 유한 경계라는 점을 생각할 때 본 방법에 의해 구한 해석결과가 매우 높은 신뢰도를 보였음을 알 수 있다. 다음으로 변요소를 이용한 해석과 절점에 미지 변수를 설정하고 자기 벡터 포텐셜을 이용한 기존의 해석과 정확도를 비교하기 위해 절점수 780개 일 때, 각각의 방법에 의해 해석된 수치해를 그림 5에서 비교하여 보았다. 변요소를 사용할 경우 본 론에서 언급한 바와 같이 해석하고자 하는 물리량의 특성을 자체내에 포함하고 있으므로 그림 5에서 보는 바와 같이 기존의 방법에 의한 해석보다 큰 신뢰도를 보임을 알 수 있다.

일반적으로 해석 영역의 절점수를 증가시킬수록 수치해의 신뢰도는 증가하는데, 변요소를 사용할 경우 기존의 방법에 비해 적은 요소수에서도 좋은 결과를 얻었다.

5.2 전류원 및 자성체가 있는 모델

3차원 정자장 해석에서 필요로 하는 모든 구성요소(자성체, 전류)를 포함하는 모델을 해석해 보았다. 모델은 중심에 비투자율이 1000인 육면체의 자성체가 있고 중간에 공극을 두고 3000[AT]의 전류가 흐르는 것으로 모델의 대칭성을 고려해 전 영역의 1/8만 해석하였다. 그림 6에 해석 모델 및 모델의 기하적 크기 및 경계 조건을 나타내었다. 절점수는 2744개이며 계산기 사용 기종은 APOLLO DOMAIN SERIES 4000이다.

해석결과, $X=0$[m], $Y=0$[m]인 면에 대한 자장의 분포를 나타낸 것이 그림 7이다. 중심에 큰 크기의 자장이 분포해 있고 자장이 휘어지는 중심축이 전류원의 중심에서 자성체 쪽으로 약간 이동해 있음을 볼 수 있다. 해석 결과의 신뢰도를 검



D : Dirichlet 경계조건
N : Neumann 경계조건

그림 6 해석 모델 및 경계조건
Fig. 6 Model and Boundary Conditions

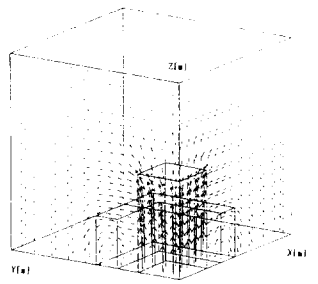


그림 7 자장 분포
Fig. 7 The Field Distribution

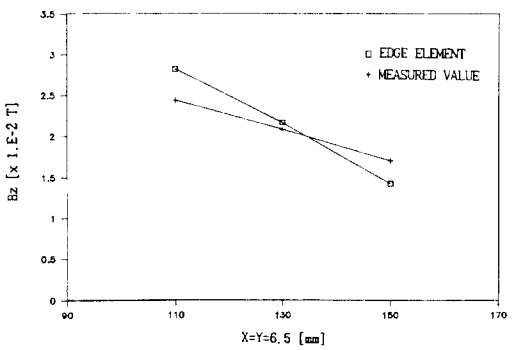


그림 8 Z의 위치에 따른 실험치와 수치해의 비교
Fig. 8 The Comparision of Experimental and Numerical Solutions according to Z position

토하기 위해 실험치[9]와 수치해의 자장값을 $X=Y=0.0065$[m]의 위치에서 Z의 위치에 따라 비교한 그림이 그림 8이다. 구자성체 모델의 경우보다 오차가 증가한 것은 계산기의 기억 용량 한계 때문에 요소망을 충분히 분할하지 못하고 최외곽 경계와 자성체를 충분히 떨어뜨리지 못했기 때문일 것이다.

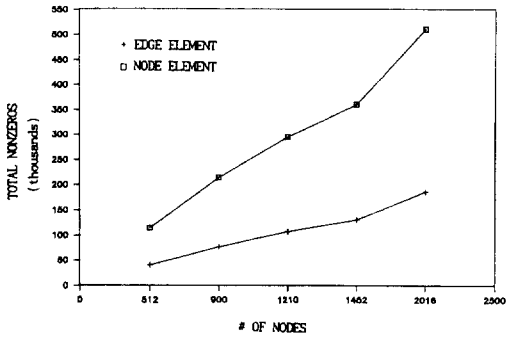


그림 9 변요소와 절점요소의 영이 아닌 항의 갯수
Fig. 9 The Comparision of Total Non-zeros of Edge Element, Node Element

해석 모델을 사면체로 유한요소 분할하는데 있어 정사면체에 가깝게 분할하는 것이 중요하다. 왜냐하면 $(\nabla\times\vec{W})$의 노름(Norm)은 사면체내 6개 변의 길이가 비슷할 경우, $(\nabla\times\vec{W}_i)\cdot(\nabla\times\vec{W}_j)$로 구성되는 시스템 행렬의 대각선 요소(Diagonal term)가 비대각선 요소보다 크게 되는 반면 각 변의 $(\nabla\times\vec{W})$가 큰 차이를 보일 때는 비대각선 요소가 대각선 요소보다 커져 시스템 행렬의 질을 저하시킬 가능성이 있기 때문이다.

변요소를 사용할 때 영이 아닌 전체항(Total Non-zeros)의 수와 절점에 미지변수를 설정할 때와 비교하면 그림 9에서 보듯이 평균 35[%]의 수준으로 감소하여, 변요소에 의한 유한요소해석이 계산 기억 용량 면에서도 큰 이득이 있음을 알았다.

6. 결 론

본 논문에서는 변요소 및 자기 벡터 포텐셜을 이용하여 3차원 정자장 문제를 해석하였다. 일반적으로 사용할 수 있는 이산화식 및 사면체 변요소에 대한 요소 행렬식을 도출하였다.

자기 벡터 포텐셜을 사용할 경우 쿨롱 게이지 조건은 자연히 만족되었다.

이론적으로는 성질이 다른 매질 사이에서 자기 벡터 포텐셜의 접선 성분 연속조건만 만족되어도 자속 밀도의 법선 성분 연속 조건 및 자계 세기의 접선 성분 연속 조건은 만족되었다. 본 논문에서와 같이 일차 보간 함수를 사용했을때 해석 결과를 수치적으로 검토해 본 결과, 인접해 있는 두 요소 사이의 자속 밀도 법선 성분의 수치값은 일치하고 자계 세기의 접선 성분은 일치하지 않음을

확인하였다.

본 방법의 유용성을 검증하기 위하여 외부 자장이 인가된 구자성체의 모델에 적용시킨 결과 미지변수를 절점에 설정하는 기존의 방법보다 미지수의 갯수는 증가하나 해석 정도는 향상되었으며, 같은 요소수에서는 평균 35[%] 수준으로 컴퓨터 기억 용량을 줄일 수 있다.

변요소를 사용한 유한요소법에 관한 앞으로의 연구과제는 포텐셜이 아닌 자장 자체를 미지변수로 하는 이론 및 알고리즘의 연구이다.

끝으로 본 연구는 90년도 현대 연구비의 지원으로 이루어졌음을 알려드립니다.

참 고 문 헌

[1] M.V.K. Chari, et al., IEEE Trans, PAS-100, pp. 4007, 1981.

[2] N.A. Demardash, et al., IEEE Trans. PAS -100, pp. 4104, 1981.

[3] J.L. Coulomb, IEEE Trans, MAG-17, pp. 3241, 1981.

[4] Nedelec J.C., "Mixed finite elements in R^3" Numer. Mathd., 35, pp. 315, 1980.

[5] Alain Bossavit, "Whitney forms," IEE Proc. Vol. 135, Pt. A, No. 8, pp. 493, November, 1988.

[6] Silvester P, Ferrari R, "Finite elements for electrical engineers," Cambridge Univ. Press, 1983.

[7] M.L. Barton, et. al., "New vector finite elements for three-dimensional magnetic field computation", J. Appl. Phys., 61(8), 15, pp. 3919, April, 1987.

[8] 郭炳晩 외, "有限要素法入門", 東明社, 1989.

[9] Y. Kanai, et al., "New formulation of finite-element method with gauge conditon for three-dimensional magnetic field analysis", IEEE Trans on Mag, Vol. 24, No. 6, pp. 3123, November, 1988.